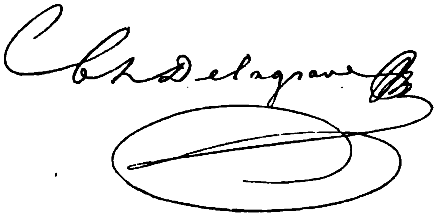
LEÇONS

D'ALGÈBRE





Sceaux. — Imprimerie Charaire et fils.

LEÇONS D'ALGÈBRE

CONFORMES

AUX PROGRAMMES OFFICIELS DE L'ENSEIGNEMENT DES LYCÉES

Par CH. BRIOT

Professeur à la Faculté des sciences, Maître de conférences à l'École normale supérieure

PREMIÈRE PARTIE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DES LYCÉES ET DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT
ÈS SCIENCES, A L'ÉCOLE DE MARINE
ET A L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR

ONZIÈME ÉDITION

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1881

LEÇONS D'ALGÈBRE

INTRODUCTION

EMPLOI DES SIGNES ET DES LETTRES COMME MOYEN D'ABRÉVIATION ET DE GÉNÉRALISATION.

Signes algébriques.

1. Pour abréger l'écriture et faciliter le raisonnement, on est convenu de représenter les quantités par des lettres. On a coutume d'affecter les premières lettres de l'alphabet a, b, c,... aux quantités connues, les dernières x, y, z,... aux quantités inconnues.

On a imaginé aussi des signes pour indiquer les diverses opérations de l'arithmétique.

Le signe $+$, que l'on prononce *plus*, indique l'addition. Ainsi, 5 plus 3 s'écrit

$$5+3.$$

Le signe $-$, que l'on prononce *moins*, indique la soustraction. Ainsi, 5 moins 3 s'écrit

$$5-3.$$

Le signe $\times$, que l'on prononce *multiplié par*, indique la multiplication. Ainsi, 5 multiplié par 3 s'écrit

$$5 \times 3.$$

Pour abréger encore davantage, lorsque les quantités sont représentées par des lettres, on indique leur produit en mettant simplement ces lettres les unes à la suite des autres, et sous-entendant le signe $\times$. Ainsi, le produit $a \times b \times c$ s'écrit plus simplement

$$abc.$$

Le produit $4 \times a \times b \times c$ s'écrira

$$4abc.$$

On indique la division par une barre horizontale au-dessus de laquelle on écrit le dividende, au-dessous le diviseur. Ainsi, 5 divisé par 3 s'écrit

$$\frac{5}{3}.$$

C'est le signe de la fraction en arithmétique.

On indique la puissance d'un nombre, ou le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre, par de petits chiffres placés en haut et à droite et marquant le nombre des facteurs ou le degré de la puissance. Ainsi, la troisième puissance de la quantité a s'écrit

$$a^3.$$

Le nombre 3 se nomme *exposant*.

On indique la *racine* par le signe $\sqrt{}$, au-dessous duquel on écrit le nombre dont on extrait la racine. Ainsi, la racine quatrième de la quantité a s'écrit

$$\sqrt[4]{a}.$$

L'*indice* du radical, qui est ici 4, se met dans l'ouverture.

Cependant, quand il s'agit de racines carrées, on se dis-

pense de mettre l'indice 2. Ainsi, la racine carrée de a s'écrit simplement

$$\sqrt{a}.$$

On se sert du signe $=$, que l'on prononce *égale*, pour exprimer l'égalité de deux quantités. Ainsi, 5 plus 3 égale 8 s'écrit

$$5+3=8.$$

Le signe $>$ veut dire *plus grand que*, le signe $<$ *plus petit que*. Ainsi, 5 plus grand que 3 s'écrit

$$5>3.$$

Au contraire, 3 plus petit que 5 s'écrit

$$3<5.$$

On remarquera que ces signes d'inégalité ont la forme d'un angle, et que la quantité la plus grande est toujours placée du côté de l'ouverture de l'angle.

Quelques exemples feront bien comprendre l'utilité de ces différents signes et le but de l'algèbre.

Emploi des signes comme moyen d'abréviation.

2. PROBLÈME I. *Partager* 50 *francs entre trois personnes, de manière que la première ait* 6 *francs de plus que la seconde, la seconde* 4 *francs de plus que la troisième.*

Voici comment on peut résoudre cette question avec les seules ressources de l'arithmétique.

Il est clair que si l'on connaissait l'une des parts, on obtiendrait ensuite facilement les deux autres. Cherchons, par exemple, la troisième part : la seconde part surpasse la troisième de 4 francs; la première, surpassant la seconde de 6 francs, surpasse la troisième de 4 plus 6, c'est-à-dire de 10 francs. La somme des trois parts se compose donc de

trois fois la troisième part, plus 4, plus 10, c'est-à-dire plus 14. Mais cette somme est égale au nombre à partager 50. Si de 50 nous ôtons 14, le reste 36 sera égal à trois fois la troisième part; si nous divisons 36 par 3, nous aurons la troisième part 12.

Ainsi la troisième part est 12. La seconde, qui la surpasse de 4 francs, est 16. La première, qui surpasse la seconde de 6 francs, est 22.

3. Reprenons la même question en écrivant les raisonnements au moyen des signes de l'algèbre.

Nommons la troisième part . . . . x,
la seconde, qui la surpasse de 4, sera . . . . . $x+4$,
la première, qui surpasse la seconde de 6, sera $x+4+6$.
La somme des trois parts est . . . . $3x+14$.

Mais cette somme doit être égale au nombre à partager 50, ce qui s'écrit

$$3x+14=50.$$

On nomme *équation* une égalité dans laquelle entre au moins une lettre représentant une quantité inconnue. Les raisonnements qui précèdent nous ont conduit à l'équation

$$3x+14=50.$$

Il s'agit maintenant de résoudre cette équation, c'est-à-dire de trouver la valeur inconnue de x.

Si, de ces deux quantités égales, nous retranchons la même quantité 14, il restera évidemment deux quantités égales,

$$3x=50-14=36.$$

Enfin, si nous divisons par 3, nous aurons

$$x=\frac{36}{3}=12.$$

La question est résolue, puisqu'il suffit de connaître la troisième part pour avoir les deux autres.

4. Problème II. *Partager 167 francs entre quatre personnes, de manière que la première ait 2 francs de plus que la seconde, la seconde 7 francs de plus que la troisième, et la troisième 5 francs de plus que la quatrième.*

Nommons la quatrième part . . . . . . x,
la troisième sera . . . . $x+5$,
la deuxième. . . . . $x+5+7$,
la première. . . . . $x+5+7+2$.

La somme des quatre parts est $4x+31$; mais cette somme doit être égale au nombre à partager 167, ce qui s'écrit

$$4x+31=167.$$

Pour résoudre cette équation, on opérera comme précédemment. Si l'on retranche 31 des deux côtés, on a

$$4x=167-31=136.$$

Si l'on divise ensuite par 4, on trouve

$$x=\frac{136}{4}=34.$$

Ainsi, la quatrième part est 34 francs, la troisième 39 francs, la deuxième 46 francs, la première 48 francs.

On vérifiera que la somme est bien 167.

5. Problème III. *Partager 53 francs entre deux personnes, de manière que la première ait un tiers de plus que la seconde, plus encore 4 francs.*

Nommons la seconde part . . . . x,
la première sera . . . . $x+\frac{x}{3}+4$.

Or la somme des deux parts doit être égale à 53 ; on a donc l'équation

$$2x+\frac{x}{3}+4=53.$$

Puisque $2+\frac{1}{3}$ font $\frac{7}{3}$, $2x+\frac{x}{3}$ font $\frac{7x}{3}$, et l'équation s'écrira plus simplement

$$\frac{7x}{3}+4=53.$$

Pour résoudre cette équation, nous retrancherons d'abord 4 de part et d'autre, ce qui donne

$$\frac{7x}{3}=53-4=49.$$

Si nous multiplions ensuite par 3 ces deux quantités égales, nous aurons

$$7x=49\times 3=147.$$

Enfin, si nous divisons par 7, nous trouvons

$$x=\frac{147}{7}=21.$$

Quand on connaît la seconde part 21 francs, en y ajoutant son tiers 7 francs et encore 4 francs, on obtient la première part 32 francs. Et effectivement la somme des deux parts fait bien 53 francs.

6. PROBLÈME IV. *Deux personnes possèdent le même capital. La première place le sien à 5 pour 100, la seconde à 3 pour 100. Le revenu de la première surpasse de 400 francs celui de la seconde. Trouver ce capital.*

Rappelons d'abord ce principe établi en arithmétique : pour trouver l'intérêt d'un capital, on multiplie le taux de l'intérêt par le capital et l'on divise par 100. Si donc on désigne par x le capital cherché, le revenu de la

première personne sera $\frac{5x}{100}$, celui de la seconde $\frac{3x}{100}$. Puisque le revenu de la première surpasse celui de la seconde de 400 francs, on a l'équation

$$\frac{5x}{100}=\frac{3x}{100}+400.$$

Pour résoudre cette équation, nous retrancherons d'abord $\frac{3x}{100}$ de part et d'autre, ce qui donne

$$\frac{5x}{100}-\frac{3x}{100}=400,$$

ou, en effectuant la soustraction)

$$\frac{2x}{100}=400.$$

Multiplions ensuite par 100, nous avons

$$2x=40000.$$

Divisant enfin par 2, nous trouvons

$$x=\frac{40000}{2}=20000.$$

Ainsi le capital cherché est 20000 francs.

Vérification. Le capital 20000 francs, placé à 5 pour 100, produit 1000 francs de revenu; placé à 3 pour 100, il ne produit que 600 francs. Le premier revenu surpasse bien le second de 400 francs.

Résolution d'une équation à une inconnue.

7. On voit, par ces exemples, combien l'emploi des lettres et des signes aide l'esprit et facilite le raisonnement. Ce qui précède nous fournit aussi l'occasion de faire quelques remarques utiles sur la résolution des équations.

Nous avons dit qu'on appelle *équation* en algèbre une égalité dans laquelle entre au moins une lettre représentant une inconnue. Les deux quantités égales entre elles sont les deux *membres* de l'équation. Les diverses parties, séparées les unes des autres par le signe + ou par le signe —, sont les termes de l'équation.

Il est aisé de voir que l'on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre; il suffit, pour cela, de l'écrire dans l'autre membre en changeant son signe. Soit, par exemple, l'équation

$$6x - 7 = 13 + 2x.$$

Si nous ajoutons 7 aux deux membres, c'est-à-dire aux deux quantités égales, l'égalité subsiste évidemment et l'équation devient

$$6x = 13 + 2x + 7.$$

Le terme 7, qui avait le signe — dans le premier membre, est passé avec le signe + dans le second membre. De même, si nous retranchons $2x$ des deux membres, l'équation devient

$$6x - 2x = 13 + 7.$$

Le terme $2x$ qui avait le signe + dans le second membre est passé avec le signe — dans le premier.

Ce principe de la transposition des termes est extrêmement utile; il remplace les raisonnements et permet d'opérer en quelque sorte mécaniquement la résolution des équations. On fait passer les termes connus dans un membre, les termes inconnus dans l'autre; on réduit et on divise par le multiplicateur de l'inconnue.

Ainsi l'équation précédente est devenue

$$6x - 2x = 13 + 7.$$

En réduisant, on a

$$4x = 20,$$

et, en divisant par 4,

$$x = \frac{20}{4} = 5.$$

On peut vérifier que 5 est bien la valeur de l'inconnue; car en remplaçant x par 5 dans l'équation proposée, les deux membres deviennent tous deux égaux à 23.

8. Considérons encore l'équation

$$8x - 17 = 5x - 2.$$

On fera d'abord passer le terme 17 dans le second membre en changeant son signe, ce qui donne

$$8x = 5x + 17 - 2.$$

Mais le terme $5x$, qui est en tête du second membre, n'a pas de signe; on procédera comme s'il était affecté du signe $+$ et on le fera passer dans le premier membre avec le signe $-$; car, si des deux membres on retranche $5x$, on a

$$8x - 5x = 17 - 2;$$

d'où l'on déduit

$$3x = 15,$$

$$x = 5.$$

Quand l'équation contient des dénominateurs, on commence par les faire disparaître en multipliant tous les termes de l'équation par un nombre convenable. Si l'équation ne renferme qu'un seul dénominateur, on multiplie par ce dénominateur. C'est ce que nous avons fait dans les problèmes III et IV. S'il y a dans l'équation plusieurs dénominateurs différents, on multiplie par leur produit, ou, plus simplement, par leur plus petit multiple.

9. Problème V. *Trouver un nombre dont le quart augmenté de 7 égale les deux tiers diminués de 3.*

En appelant x le nombre cherché, on écrira immédiatement l'équation

$$\frac{x}{4}+7=\frac{2x}{3}-3.$$

Pour chasser les deux dénominateurs 3 et 4, nous multiplierons tous les termes par le produit 12 de ces deux dénominateurs, ce qui donne

$$3x+84=8x-36.$$

Nous remarquons que, pour multiplier les deux fractions $\frac{x}{4}$ et $\frac{2x}{3}$ par 12, il suffit de multiplier leurs numérateurs par 3 et 4, en ôtant les dénominateurs. Par la transposition des termes, l'équation devient

$$84+36=8x-3x;$$

d'où l'on déduit

$$5x=120,$$

$$x=\frac{120}{5}=24.$$

Vérification. Le quart de 24, augmenté de 7, donne 13; les deux tiers 16, diminués de 3, donnent aussi 13.

Mise des problèmes en équations.

10. La résolution d'un problème comprend deux parties distinctes : on met d'abord le problème en équations, c'est-à-dire que l'on établit par des équations les relations qui existent entre les quantités connues et les quantités inconnues; on résout ensuite les équations, c'est-à-dire que l'on cherche les valeurs des inconnues qui satisfont aux équations. Nous avons indiqué les règles très-simples par lesquelles on résout les équations à une inconnue. La marche à suivre pour mettre un problème en équations n'est pas sus-

ceptible d'être formulée d'une manière aussi nette et précise. Dans beaucoup de cas simples, il suffit, après avoir représenté les inconnues par des lettres, d'écrire textuellement l'énoncé du problème au moyen des signes de l'algèbre; c'est ce que nous avons fait notamment pour le problème V. Mais, ordinairement, l'énoncé du problème ne se prête pas à cette traduction immédiate en langage algébrique; dans ce cas, la meilleure règle à suivre, c'est, après avoir bien examiné les conditions de l'énoncé et représenté les inconnues par des lettres, de raisonner comme si ces lettres représentaient des quantités connues et d'écrire les opérations qu'il faudrait faire pour vérifier que ces valeurs des inconnues satisfont bien à l'énoncé; on arrive ainsi sans grande difficulté aux équations du problème. C'est de cette manière que nous avons procédé pour le problème IV; nous avons représenté par x le capital inconnu et, raisonnant comme si ce capital était connu, nous avons écrit que le revenu de la première personne surpasse de 400 francs celui de la seconde. Les exemples suivants feront encore mieux comprendre ce précepte.

11. Problème VI. *Deux fontaines coulent dans un bassin : la première, coulant seule, le remplit en 4 heures; la seconde, coulant seule, le remplit en 6 heures. Combien de temps les deux fontaines, coulant ensemble, mettront-elles à remplir le bassin?*

Désignons par x le nombre d'heures qu'il faut aux deux fontaines pour remplir le bassin, et raisonnons comme si nous voulions nous assurer que, dans ce temps x supposé connu, les deux fontaines, coulant ensemble, remplissent bien le bassin. La première fontaine, coulant seule, remplit le bassin en 4 heures; en une heure, elle verse donc $\frac{1}{4}$ du

bassin; en x heures, elle en remplit une fraction marquée par $\frac{x}{4}$. La seconde fontaine, coulant seule, remplit le bassin en 6 heures; en une heure, elle verse $\frac{1}{6}$ du bassin; en x heures, elle en remplit une fraction $\frac{x}{6}$. Dans le temps x, les deux fontaines, coulant ensemble, versent donc une quantité d'eau représentée par $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}$, la capacité du bassin étant prise pour unité. Mais, pendant ce temps, elles doivent remplir le bassin; on a donc l'égalité

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=1.$$

Telle est l'équation du problème.

Pour la résoudre, on fera d'abord disparaître les dénominateurs; on voit de suite que 12 est le plus petit multiple des nombres 4 et 6. On multipliera donc par 12 tous les termes de l'équation, et nous observons que, pour multiplier par 12 les deux fractions $\frac{x}{4}$ et $\frac{x}{6}$, il suffit de multiplier leurs numérateurs par 3 et par 2, en ôtant les dénominateurs. L'équation devient ainsi

$$3x+2x=12, \quad \text{ou} \quad 5x=12.$$

On en déduit

$$x=\frac{12}{5}=2^h+\frac{2}{5}=2^h\,24^m.$$

Ainsi, il faut 2 heures 24 minutes aux deux fontaines, coulant ensemble, pour remplir le bassin.

La vérification a lieu effectivement, si l'on remplace dans l'équation x par sa valeur $\frac{12}{5}$; car les deux fractions $\frac{x}{4}$ et $\frac{x}{6}$

deviennent, après simplification, $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{5}$, dont la somme est 1.

12. Problème VII. *Un père a 40 ans, son fils en a 10. Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il triple de celui du fils?*

Soit x le nombre d'années cherché. Après ce temps, l'âge du père sera $40+x$, celui du fils $10+x$. Comme à cette époque l'âge du père doit être triple de celui du fils, on a l'équation

$$40+x=(10+x)\times 3.$$

La parenthèse indique que la quantité $10+x$ est multipliée par 3. Pour répéter trois fois la somme $10+x$, il suffit évidemment de répéter trois fois chaque partie; l'équation devient donc

$$40+x=30+3x;$$

d'où l'on déduit

$$x=5.$$

Ainsi, dans 5 ans l'âge du père sera triple de l'âge du fils. Et, en effet, à cette époque le père aura 45 ans, le fils 15, et 45 est bien le triple de 15.

13. Problème VIII. *Deux courriers partent au même instant de deux villes distantes de 100 lieues et vont à la rencontre l'un de l'autre. Le premier fait 3 lieues à l'heure, le second en fait 2. Quels chemins les deux courriers parcourront-ils avant de se rencontrer?*

Le choix de l'inconnue a une grande importance pour la facilité des raisonnements et la simplicité des calculs. Dans le problème actuel, au lieu de prendre les inconnues indiquées par l'énoncé, c'est-à-dire les chemins parcourus, nous prendrons une autre inconnue dont les premières se déduisent aisément, savoir le temps pendant lequel marchent

les deux courriers. Soit x ce temps exprimé en heures. Le premier courrier, faisant 3 lieues à l'heure, parcourra en x heures $3x$ lieues; le second, faisant 2 lieues à l'heure, parcourra dans le même temps $2x$ lieues. Mais la somme des chemins parcourus doit être égale à la distance totale 100 lieues. On a donc l'équation

$$3x + 2x = 100;$$

d'où l'on déduit

$$x = 20.$$

Ainsi, les deux courriers se rencontrent après 20 heures de marche. Le premier aura parcouru 60 lieues, le second 40. La somme est bien égale à 100.

14. PROBLÈME IX. *Une montre marque midi; les deux aiguilles, savoir l'aiguille des heures et celle des minutes, sont actuellement au même point du cadran. On demande dans combien de temps, et en quel point du cadran, l'aiguille des minutes rencontrera celle des heures.*

Le cadran d'une montre est divisé en 60 parties égales. Dans une heure, l'aiguille des minutes parcourt les 60 divisions du cadran, tandis que celle des heures n'en parcourt que 5. Prenons l'heure pour unité de temps et appelons x le temps cherché; dans le temps x, l'aiguille des heures parcourt $5x$ divisions, et celle des minutes $60x$; mais, après ce temps, l'aiguille des minutes, ayant rejoint celle des heures, a parcouru le tour du cadran, c'est-à-dire 60 divisions, plus $5x$ divisions. On a donc l'équation

$$60x = 60 + 5x;$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{60}{55} = \frac{12}{11} = 1^h\,5^m + \frac{5^m}{11} = 1^h\,5^m\,27^s + \frac{3^s}{11}.$$

Ainsi, la première rencontre aura lieu à $1^h\ 5^m\ 27^s$ et une fraction $\frac{3}{11}$ de seconde. La deuxième rencontre aura lieu après un temps égal, c'est-à-dire à $2^h\ 10^m + \frac{10^m}{11}$; la troisième, encore après un temps égal, c'est-à-dire à $3^h\ 16^m + \frac{4^m}{11}$, etc. La onzième rencontre aura lieu à minuit, après un intervalle de 12 heures.

15. Problème X. *Le soleil s'avance chaque jour de l'ouest à l'est de* 59′ 8″, 19, *la lune de* 13° 10′ 34″, 89. *La lune est actuellement en conjonction avec le soleil. On demande dans combien de temps elle reviendra en conjonction.*

On dit que la lune est en conjonction avec le soleil quand ces deux astres sont en ligne droite avec la terre et d'un même côté de la terre; c'est le moment de la nouvelle lune. Prenons pour unité de temps le jour et appelons x le temps cherché. Réduisons les arcs en secondes. Le soleil, décrivant 3548″,19 par jour, décrira $3548'',19 \times x$ en x jours; la lune, décrivant 47434″,89 par jour, décrira $47434'',89 \times x$ secondes dans le même temps. Mais la lune, ayant rejoint le soleil, a décrit dans le ciel une circonférence entière, c'est-à-dire 360° ou 1296000″, plus l'arc décrit par le soleil. On a donc l'équation

$$47434{,}89\,x = 1296000 + 3548{,}19\,x.$$

On en déduit

$$x = \frac{1296000}{43886{,}70} = 29^j\ 12^h\ 44^m\ 2^s{,}7.$$

Ce temps est ce qu'on appelle la durée de la révolution synodique de la lune, ou le mois lunaire.

16. Problème XI. *Combien faut-il mélanger de vin à* 45 *centimes le litre et de vin à* 33 *centimes pour faire* 150 *litres de mélange à* 40 *centimes le litre?*

Appelons x la quantité du premier vin qu'il faut mettre dans le mélange; celle du second vin sera $150 - x$. Un litre du premier vin coûtant 45 centimes, x litres coûteront $45x$ centimes; de même $150 - x$ litres du second vin coûteront $33(150 - x)$ centimes. Mais, puisqu'un litre du mélange doit revenir à 40 centimes le litre, le mélange entier doit coûter 40×150 ou 6000^c. On a donc l'équation

$$45x + 33(150 - x) = 6000,$$

en prenant le centime pour unité.

Multiplier 33 par $150 - x$ revient à le répéter 150 fois moins x fois, ce qui donne 33×150 ou 4950 moins $33x$. L'équation devient donc

$$45x + 4950 - 33x = 6000;$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{1050}{12} = 87,5 \text{ litres.}$$

En retranchant ce nombre de 150, on a ce qu'il faut prendre du second vin. Ainsi, on mélangera 87,5 litres du premier vin avec 62,5 du second.

17. PROBLÈME XII. *On a un lingot d'argent pesant* 1245 *grammes au titre* 0,87. *Combien faut-il y ajouter d'un second lingot au titre* 0,95 *pour en élever le titre à* 0,90?

On appelle titre d'un lingot d'or ou d'argent la quantité d'or ou d'argent pur que renferme un gramme du lingot.

Appelons x la quantité du second lingot qu'il faut ajouter au premier. Le lingot formé de l'alliage des deux premiers pèsera $1245 + x$ grammes. Un gramme du premier lingot contenant 0,87 d'argent pur, 1245 grammes contiendront $0,87 \times 1245$ ou 1083,15. Un gramme du second lingot contenant 0,95 d'argent pur, x grammes en con-

tiendront $0,95 \times x$. Mais le troisième lingot, pour être au titre 0,90 et peser $1245+x$ grammes, devra contenir 0,90 $(1245+x)$ d'argent pur. On a donc l'équation

$$1083,15 + 0,95x = 0,90(1245 + x).$$

Si l'on multiplie par 100 les deux membres, l'équation devient

$$108315 + 95x = 90(1245 + x),$$

ou

$$108315 + 95x = 112050 + 90x.$$

On en déduit

$$x = 747 \text{ grammes.}$$

18. PROBLÈME XIII. *D'après Vitruve, la couronne du roi Hiéron pesait 7465 grammes et perdait dans l'eau 467 grammes. On sait que l'or perd dans l'eau les 52 millièmes de son poids, que l'argent en perd les 95 millièmes. Déterminer les quantités d'or et d'argent qui entrent dans la composition de la couronne.*

On raconte que le roi Hiéron de Syracuse avait fait remettre à un orfévre une certaine quantité d'or pour en faire une couronne. Le travail achevé, la couronne avait bien le poids voulu, mais le roi, soupçonnant l'orfévre d'avoir gardé une partie de l'or et d'y avoir substitué un égal poids d'argent, consulta Archimède sur le moyen de découvrir la fraude sans endommager la couronne. Un jour qu'Archimède était aux bains, la solution du problème se présenta tout à coup à son esprit. On dit que, transporté de joie, il s'élança hors du bain, et, oubliant qu'il était nu, traversa les rues de Syracuse en criant : J'ai trouvé, j'ai trouvé (εὕρηκα, εὕρηκα).

Le moyen imaginé par Archimède repose sur ce principe de physique trouvé par lui, savoir, que tout corps plongé dans l'eau y perd une partie de son poids égal au poids du

volume d'eau déplacé. Il consiste à déterminer par deux expériences préliminaires combien l'or, plongé dans l'eau, perd de son poids, et combien perd l'argent; puis à déterminer de la même manière combien perd la couronne plongée dans l'eau et à comparer le résultat aux précédents.

Un gramme d'or perdant 0,052 dans l'eau, 7465 grammes d'or perdent $0,052 \times 7465$ ou 388,18. Si la couronne était d'or pur, plongée dans l'eau, elle perdrait donc 388,18; mais elle perd 467 grammes; ceci annonce qu'il entre dans sa composition un métal, comme l'argent, moins dense que l'or.

Appelons x la quantité d'argent introduite par l'orfévre; la quantité d'or sera $7465-x$. Un gramme d'argent perdant 0,095 dans l'eau, x grammes perdront $0,095x$. De même $7465-x$ grammes d'or perdront $0,052(7465-x)$. La perte éprouvée par les deux quantités d'or et d'argent devant être égale à la perte 467 grammes éprouvée par la couronne (on suppose que l'alliage des deux métaux a lieu sans contraction ni dilatation), on a l'équation

$$0,095x+0,052(7465-x)=467.$$

En faisant la multiplication indiquée par la parenthèse, cette équation devient

$$0,095x+388,18-0,052x=467$$
$$0,043x=78,82,$$

d'où l'on déduit

$$x=1833 \text{ grammes.}$$

Ainsi, l'orfévre avait substitué 1833 grammes d'argent à un égal poids d'or.

19. Jusqu'ici nous n'avons résolu que des problèmes à une inconnue. Nous allons donner quelques exemples de questions à plusieurs inconnues.

PROBLÈME XIV. *Pour payer ses ouvriers sur le pied de 3 francs chacun, il manque 8 francs à celui qui les fait travailler. Mais s'il ne leur donnait que 2 francs chacun, il lui resterait 3 francs. Quelle est la somme d'argent et le nombre des ouvriers?*

Désignons par x le nombre des ouvriers, et par y la somme d'argent. Pour donner 3 francs à chacun, il faudrait $3x$ francs; mais comme il manque 8 francs, on a l'équation

$$y = 3x - 8.$$

Pour donner 2 francs à chacun, il faut $2x$ francs, et comme il reste 3 francs, on a l'équation

$$y = 2x + 3.$$

On a ainsi deux équations à deux inconnues.

Si, dans la seconde équation, nous remplaçons y par la quantité égale $3x - 8$ donnée par la première, nous obtenons une équation à une seule inconnue

$$3x - 8 = 2x + 3,$$

de laquelle nous déduisons, en la résolvant par le procédé ordinaire,

$$x = 11.$$

Une fois la valeur de x trouvée, on obtient celle de y en remplaçant x par sa valeur 11 dans l'une des deux premières équations, ce qui donne

$$y = 25.$$

Ainsi il y a 11 ouvriers, et la somme d'argent est 25 francs.

20. PROBLÈME XV. *Deux sources, qui coulent uniformément, ont rempli ensemble un réservoir de 18 mètres cubes, en coulant l'une pendant 7 heures, l'autre pendant 2 heures. Les deux mêmes sources ont rempli un second réservoir de 22 mètres cubes, la première coulant pendant 3 heures, la seconde pen-*

dant 5 *heures. On demande quelle est la dépense de chacune de ces sources.*

Prenons pour unité de volume le mètre cube, et appelons x et y les volumes d'eau que fournissent les deux sources par heure. La quantité d'eau versée par la première en 7 heures est $7x$, celle versée par la seconde en 2 heures est $2y$; le premier réservoir ayant été rempli de cette manière, on a l'équation

$$7x + 2y = 18.$$

De même $3x$ et $5y$ sont les quantités d'eau versées par les deux sources en 3 heures et en 5 heures ; le second réservoir ayant été rempli de cette façon, on a la seconde équation

$$3x + 5y = 22.$$

Pour résoudre ces deux équations, tirons de la première la valeur de y, comme si x était connue, ce qui donne

$$y = \frac{18 - 7x}{2},$$

et mettons cette valeur à la place de y dans la seconde équation, nous aurons l'équation

$$3x + 5\left(\frac{18 - 7x}{2}\right) = 22,$$

qui ne renferme plus qu'une seule inconnue x.

Si l'on multiplie par 5 le numérateur de la fraction, cette équation devient

$$3x + \frac{90 - 35x}{2} = 22;$$

en chassant le dénominateur et résolvant, on trouve

$$x = \frac{46}{29}.$$

Pour avoir ensuite la valeur de y, on remplacera x par

sa valeur $\frac{46}{29}$ dans l'équation

$$y = \frac{18 - 7x}{2},$$

ce qui donne

$$y = \frac{100}{29}.$$

On vérifierait que les nombres fractionnaires $\frac{46}{29}$ et $\frac{100}{29}$, mis à la place de x et de y, satisfont bien aux deux équations du problème. Si l'on réduit en décimales, on trouve que les deux sources dépensent par heure, la première 1586 litres, la seconde 3448 litres, en négligeant les fractions de litre.

Résolution de deux équations à deux inconnues.

21. Remarquons la méthode que nous avons suivie pour résoudre deux équations à deux inconnues. Nous avons tiré de l'une des équations la valeur de l'une des inconnues, par exemple de y, comme si l'autre x était connue, et nous avons substitué cette valeur dans l'autre équation; nous avons obtenu de la sorte une seule équation à une inconnue x, que nous avons résolue par le procédé ordinaire.

Appliquons encore cette méthode à quelques exemples. Soient les deux équations

$$5x - 3y = 14,$$
$$7x + 6y = 40.$$

De la première, en faisant passer le terme $3y$ dans le second membre, le terme 14 dans le premier, et divisant par 3, on tire

$$y = \frac{5x - 14}{3}.$$

Mettons cette valeur à la place de y dans la seconde équation, nous aurons l'équation à une inconnue

$$7x + 6\frac{5x - 14}{3} = 40.$$

Ici le diviseur 3 disparaît, à cause du multiplicateur 6, et l'équation devient

$$7x + 2(5x - 14) = 40,$$

ou

$$7x + 10x - 28 = 40;$$

d'où

$$x = 4.$$

En portant cette valeur de x dans l'équation

$$y = \frac{5x - 14}{3},$$

on trouve

$$y = 2.$$

Vérification. Ces deux valeurs 4 et 2, mises à la place de x et de y, rendent les deux premiers membres des équations proposées égaux respectivement à 14 et à 40, et les équations sont satisfaites.

Soient encore les deux équations

$$13x - 9y = 17,$$
$$11x - 15y = 7.$$

De la première, résolue par rapport à y, nous tirons

$$y = \frac{13x - 17}{9}.$$

Si, afin d'éviter le signe — devant le terme en y dans la seconde équation, on fait passer ce terme dans le second membre, cette équation devient

$$11x = 7 + 15y;$$

en mettant à la place de y sa valeur déduite de la pre-

mière équation, on a

$$11x = 7 + \frac{15(13x - 17)}{9}.$$

On peut simplifier cette équation en divisant par 3 le numérateur et le dénominateur de la fraction, ce qui donne

$$11x = 7 + \frac{5(13x - 17)}{3},$$

ou

$$11x = 7 + \frac{65x - 85}{3}.$$

Multiplions par 3, l'équation devient

$$33x = 21 + 65x - 85;$$

d'où l'on tire

$$x = 2.$$

Cette valeur, portée dans l'équation

$$y = \frac{13x - 17}{9},$$

donne

$$y = 1.$$

Nous verrons plus tard que la précaution que nous avons prise de faire passer le terme $15y$ dans le second membre, afin d'éviter le signe —, n'est pas nécessaire.

22. PROBLÈME XVI. *On a formé trois mélanges de froment, de seigle et d'orge. Le premier contient* 10 *mesures de froment,* 30 *de seigle et* 20 *d'orge; il revient à* 230 *francs. Le second contient* 12 *mesures de froment,* 15 *de seigle et* 6 *d'orge; il revient à* 138 *francs. Le troisième contient* 4 *mesures de froment,* 10 *de seigle et* 5 *d'orge, et revient à* 75 *francs. Quel est le prix de la mesure de froment, de seigle et d'orge?*

Appelons x, y, z le prix d'une mesure de chaque denrée. Une mesure de froment valant x francs, 10 mesures vaudront 10 fois plus, c'est-à-dire $10x$; ainsi la quantité de

froment contenue dans le premier mélange coûtera $10x$; de même la quantité de seigle coûtera $30y$, la quantité d'orge $20z$; comme le mélange coûte 230 francs, on a l'équation

$$10x + 30y + 20z = 230.$$

On obtiendra de même les équations

$$12x + 15y + 6z = 138,$$
$$4x + 10y + 5z = 75.$$

Nous remarquons d'abord que l'on peut simplifier la première équation en divisant tous ses termes par 10, et la seconde en divisant tous ses termes par 3, de sorte que ces trois équations deviennent

$$x + 3y + 2z = 23,$$
$$4x + 5y + 2z = 46,$$
$$4x + 10y + 5z = 75.$$

Il s'agit de résoudre ces trois équations à trois inconnues. La méthode est la même que celle que nous avons suivie pour deux équations à deux inconnues. De la première équation résolue par rapport à x, comme si l'on connaissait y et z, on tire

$$x = 23 - 3y - 2z.$$

Si nous mettons à la place de x cette valeur dans les deux autres équations, nous obtiendrons deux équations à deux inconnues

$$4(23 - 3y - 2z) + 5y + 2z = 46,$$
$$4(23 - 3y - 2z) + 10y + 5z = 75.$$

Ces équations, simplifiées, deviennent

$$7y + 6z = 46,$$
$$2y + 3z = 17.$$

De la dernière, nous tirons

$$z = \frac{17 - 2y}{3};$$

substituant dans la précédente, nous obtenons une équation à une inconnue

$$7y + 6\frac{17 - 2y}{3} = 46,$$

plus simplement

$$7y + 2(17 - 2y) = 46;$$

d'où

$$y = 4.$$

En portant cette valeur de y dans l'équation

$$z = \frac{17 - 2y}{3},$$

on trouve

$$z = 3.$$

En portant ces valeurs de y et de z dans l'équation

$$x = 23 - 3y - 2z,$$

on trouve enfin

$$x = 5.$$

Ainsi, la mesure de froment coûte 5 francs, celle de seigle 4 francs, celle d'orge 3 francs.

Emploi des lettres comme moyen de généralisation.

23. Nous avons expliqué la formation d'une écriture abrégée qui facilite beaucoup le raisonnement et qui constitue, en quelque sorte, la langue des mathématiques. Elle présente un autre avantage non moins important, qui est de généraliser la résolution des problèmes. Il suffit, pour cela, de représenter par des lettres, non-seulement les quantités inconnues, mais encore les quantités connues, et nous avons déjà dit que, afin d'éviter la confusion, on se sert des premières lettres de l'alphabet pour les quantités connues, des dernières pour les quantités inconnues. De cette manière, les raisonnements porteront non plus sur des nom-

bres particuliers, mais sur des quantités quelconques, et l'on résoudra ainsi, à la fois, toutes les questions de même espèce. Quelques exemples feront bien comprendre cette nouvelle propriété de l'algèbre.

24. Reprenons le problème I. Partager 50 francs entre trois personnes, de manière que la première ait 6 francs de plus que la seconde, la seconde 4 francs de plus que la troisième.

Nommant x la troisième part, nous avons dit que les deux autres parts sont exprimées par $x+4$ et $x+4+6$; écrivant que la somme des trois parts est égale à 50, nous avons obtenu l'équation

$$3x+14=50,$$

que nous avons résolue, et d'où nous avons déduit

$$x=12.$$

Si l'on change les nombres qui entrent dans l'énoncé du problème, si l'on demande, par exemple, de partager 64 francs entre trois personnes, de manière que la première ait 5 francs de plus que la seconde, la seconde 7 francs de plus que la troisième, il est clair qu'il faudra recommencer exactement les mêmes raisonnements.

Ainsi, nommant la troisième part. . . . . . x,
la seconde sera . . . . $x+7$,
la première . . . . $x+7+5$.

Écrivant que la somme des trois parts est égale au nombre à partager 64, on aura l'équation

$$3x+19=64,$$

que l'on résoudra de la même manière, et d'où l'on déduira

$$x=15.$$

On a dû naturellement se demander si l'on ne pourrait pas résoudre à la fois toutes les questions de ce genre, de manière qu'on ne fût pas obligé de recommencer les mêmes raisonnements dans chaque exemple particulier. Or ceci est bien facile. Représentons par la lettre a la somme à partager, par b l'excès de la première part sur la seconde, par c l'excès de la seconde sur la troisième, et raisonnons sur ces lettres comme sur des nombres donnés.

Nommant la troisième part . . . . x,
la seconde sera . . . . $x+c$,
la première . . . . $x+c+b$.

Écrivant que la somme des trois parts est égale au nombre à partager a, nous aurons l'équation

$$3x+2c+b=a.$$

Retranchons des deux membres les quantités b et $2c$, l'équation devient

$$3x=a-b-2c;$$

divisant par 3, nous trouvons

$$x=\frac{a-b-2c}{3}.$$

C'est là ce qu'on appelle une *formule*. Elle indique quelles opérations il faut effectuer sur les quantités connues pour en déduire la valeur de l'inconnue. Cette formule dit que pour trouver la troisième part, il faut, du nombre à partager a, retrancher l'excès b de la première part sur la seconde, et deux fois l'excès c de la seconde sur la troisième, puis diviser le résultat par 3.

Quand on veut appliquer à un exemple, on remplace dans la formule les lettres par leurs valeurs particulières et l'on effectue les calculs. Ainsi, dans le premier exemple,

on fera $a=50$, $b=6$, $c=4$; la formule donne

$$x=\frac{50-6-4\times 2}{3};$$

d'où, en effectuant les calculs,

$$x=12.$$

C'est bien la valeur trouvée directement,

25. Généralisons de la même manière le problème VIII, et pour cela représentons par a la distance des deux villes, par b la vitesse du premier courrier, c'est-à-dire le nombre de lieues qu'il parcourt en une heure, par c la vitesse du second. Nous prendrons encore pour inconnue le temps pendant lequel marchent les deux courriers jusqu'à leur rencontre. Nommons x ce temps. Le premier courrier, faisant b lieues à l'heure, parcourra en x heures bx lieues; le second, faisant c lieues à l'heure, parcourra dans le même temps cx lieues. Mais la somme des chemins parcourus par les deux courriers doit être égale à la distance totale a lieues. Nous avons donc l'équation

$$bx+cx=a,$$

que l'on peut écrire

$$(b+c)x=a,$$

la parenthèse indiquant que la quantité $b+c$ est multipliée par x. En divisant les deux membres de l'équation par $b+c$, on a

$$x=\frac{a}{b+c}.$$

Cette formule dit que, pour trouver après combien d'heures a lieu la rencontre, il faut diviser la distance des deux points de départ par la somme des chemins que parcourent les deux courriers en une heure.

On appliquera à l'exemple considéré, en faisant $a=100$, $b=3$, $c=2$, ce qui donne

$$x=\frac{100}{3+2}=\frac{100}{5}=20.$$

26. Généralisons encore le problème VII, que nous poserons ainsi : l'âge d'un père est a années, celui du fils b. Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il n fois l'âge du fils ?

Désignons par x le nombre d'années cherché. Après ce temps, l'âge du père sera $a+x$, celui du fils $b+x$. Comme l'âge du père doit être n fois l'âge du fils, on a l'équation

$$a+x=(b+x)\times n,$$

ou

$$a+x=nb+nx.$$

Par la transposition des termes, cette équation devient

$$a-nb=nx-x,$$

ou

$$a-nb=x\times(n-1);$$

d'où l'on déduit

$$x=\frac{a-nb}{n-1}.$$

Si l'on applique à l'exemple considéré, on fera $a=40$, $b=10$, $n=3$; la formule donne

$$x=\frac{40-10\times 3}{3-1}=\frac{40-30}{2}=5.$$

27. Cette introduction suffit, je pense, pour faire comprendre au lecteur le but de l'algèbre, et lui donner une idée de la méthode à laquelle les mathématiciens ont donné le nom d'*analyse*. Elle offre d'ailleurs l'avantage de mettre les commençants en état de résoudre immédiatement un grand nombre de questions ; nous en proposons ici quelques-unes comme exercices. Nous allons maintenant revenir sur

nos pas et exposer en détail, et avec ordre, le mécanisme du calcul algébrique.

EXERCICES.

PROBLÈME I. Trois personnes ont ensemble 112 ans; la deuxième a 8 ans de plus que la plus jeune; la troisième a autant que les deux autres. Quel est l'âge de chacune d'elles?

Réponse. La plus jeune a 24 ans, la deuxième 32 ans, la troisième 56.

PROBLÈME II. Faire 53 francs avec 16 pièces de 2 et de 5 francs.

Réponse. On prendra 9 pièces de 2 francs et 7 de 5 francs.

PROBLÈME III. Un homme, en arrivant à Paris, a dépensé le premier jour le $\frac{1}{5}$ de son argent, le second jour la moitié du reste; il n'a plus alors que 48 francs. Combien avait-il d'argent?

Réponse. 120 francs.

PROBLÈME IV. Trouver la fraction telle que, si l'on ajoute 1 à son numérateur, elle devienne égale à $\frac{1}{3}$ et si l'on ajoute 1 à son dénominateur, elle devienne égale à $\frac{1}{4}$.

Réponse. $\frac{4}{15}$.

PROBLÈME V. Un bassin est alimenté par deux tuyaux de conduite. Dans une première expérience, le premier ayant été ouvert pendant 4 heures et le second pendant 5 heures, on a obtenu 40 mètres cubes d'eau. Dans une seconde expérience, le premier ayant été ouvert pendant 6 heures et le second pendant 3 heures et demie, on a obtenu 50 mètres cubes. Quelle est la quantité d'eau que chaque tuyau fournit en une heure?

Réponse. Le premier tuyau dépense 6875 litres d'eau par heure, le second 2500.

PROBLÈME VI. Une personne a des jetons dans ses deux mains; si elle en passe une de la droite dans la gauche, il y en a autant dans les deux mains; mais si elle en passe un de la gauche dans la droite, celle-ci en contient le double.

Réponse. La main droite contient 7 jetons, la gauche 5.

PROBLÈME VII. Une personne a décidé dans son testament que sa fortune serait distribuée entre quatre personnes, de manière que la deuxième ait deux fois autant que la première, la troisième autant que les deux premières et la quatrième autant que la deuxième et la troisième. La fortune totale s'élève à 11000 francs. Quelle est la part de chacune d'elles?

Réponse. La première aura 1000 francs, la deuxième 2000, la troisième 3000 et la quatrième 5000.

PROBLÈME VIII. Trouver le nombre dont le double ajouté à 24 surpasse 80 autant que 100 surpasse ce nombre.

Réponse. 52.

PROBLÈME IX. Partager 75 en deux parties telles que 3 fois la plus grande surpasse 7 fois la plus petite de 15.

Réponse. Ces deux parties sont 54 et 21.

PROBLÈME X. De deux tonneaux égaux, après avoir tiré de l'un 45 litres et de l'autre 150, il reste deux fois plus de vin dans le premier que dans le second. Combien chaque tonneau contenait-il de litres?

Réponse. 255 litres.

PROBLÈME XI. Un maître, ayant proposé 12 problèmes à son élève, convient de lui donner 25 centimes pour chaque problème résolu, à la condition que l'élève paiera 10 centimes pour chaque problème non résolu. Le compte fait, le maître doit à l'élève 1 franc 25 centimes. Combien celui-ci a-t-il résolu de problèmes?

Réponse. L'élève a résolu 7 problèmes.

LIVRE PREMIER

CALCUL ALGÉBRIQUE

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

Définitions.

28. Toute expression algébrique indique une série d'opérations à effectuer sur des quantités représentées par des lettres. L'expression est un *polynôme*, si elle est composée de plusieurs parties séparées les unes des autres par le signe $+$ ou par le signe $-$; ces diverses parties sont les *termes* du polynôme. Dans le cas contraire, c'est un *monôme*.

On donne spécialement le nom de *binôme* à tout polynôme composé de deux termes, celui de *trinôme* à tout polynôme composé de trois termes, etc.

Ainsi, les expressions

$$5a^3b^2c \quad , \quad \frac{4a^2-3b^2}{a+b} \quad , \quad \sqrt{a^2+b^2},$$

sont des monômes.

Les expressions

$$3a^2-5ab \quad , \quad a+4\sqrt{ab} \quad , \quad 7a-\frac{a^2+b^2}{a-b},$$

sont des binômes.

Les expressions

$$a^2 - 2ab + 3b^2 \quad , \quad 2a + 3\sqrt{ab} - 5b,$$

sont des trinômes.

L'expression

$$b^4 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 7ab^3 - 2b^4$$

est un polynôme à cinq termes.

29. Une expression algébrique, qui ne contient pas le signe $\sqrt{\ }$, est dite *rationnelle*; par opposition, elle est dite *irrationnelle*, si elle contient le signe $\sqrt{\ }$.

L'expression

$$\frac{4a^2 - 3b^2}{a + b}$$

est rationnelle; mais l'expression

$$a + \sqrt{ab}$$

est irrationnelle.

30. Une expression rationnelle est *entière*, si elle ne contient pas le signe de la division; elle est *fractionnaire*, si elle le contient.

L'expression

$$a^2 - 2ab + b^2$$

est un polynôme entier.

L'expression

$$a + \frac{a^2 - b^2}{2c} - 4b$$

est fractionnaire.

31. Tout monôme entier est de la forme

$$7a^3b^2c.$$

Il faut distinguer dans ce monôme les lettres a, b, c qui le constituent, les *exposants* 3, 2, 1 dont ces lettres sont affectées (la lettre c, qui n'a pas d'exposant, est censée af-

fectée de l'exposant 1; et, en effet, la quantité c est la première puissance de c), et le multiplicateur 7 placé au commencement. Ce multiplicateur porte spécialement le nom de *coefficient*; il indique que la quantité a^3b^2c est répétée 7 fois.

Le monôme

$$a^3b^2c,$$

qui n'a pas de coefficient, est censé avoir le coefficient 1; en effet, on a ici *une fois* la quantité a^3b^2c.

32. On appelle *degré* d'un monôme entier, par rapport à une lettre, l'exposant de cette lettre; degré par rapport à plusieurs lettres, la somme des exposants de ces lettres.

Ainsi le monôme

$$7a^3b^2c$$

est du troisième degré par rapport à a, du second degré par rapport à b, du premier degré par rapport à c. Il est du cinquième degré par rapport aux deux lettres a et b, du sixième degré par rapport aux trois lettres a, b, c

On appelle degré d'un polynôme, par rapport à une lettre, le degré du terme dans lequel cette lettre est affectée du plus fort exposant. Ainsi le polynôme

$$5x^3 - 4x^2 + 3x - 6$$

est du troisième degré par rapport à x.

Lorsque tous les termes d'un polynôme sont du même degré par rapport aux différentes lettres qu'il renferme, on dit qu'il est *homogène*. Ainsi le polynôme

$$2a^3 - 5a^2b + 4ab^2 - 6b^3$$

est homogène et du troisième degré, parce que tous ses termes sont du troisième degré, par rapport aux deux lettres a et b qui entrent dans ce polynôme

Un terme qui ne contient pas une lettre est regardé comme étant du degré 0 par rapport à cette lettre. Ainsi le premier terme $2a^3$, qui ne contient pas la lettre b, sera du degré 0 par rapport à b. Le dernier, qui ne contient pas la lettre a, sera du degré 0 par rapport à a; de cette façon, on peut dire que dans tous les termes la somme des exposants est égale à 3.

Polynôme.

33. Un polynôme indique une série d'additions et de soustractions à effectuer.

Ainsi le polynôme

$$a + b - c + d - e - f$$

indique qu'il faut ajouter la quantité a, puis la quantité b, ensuite retrancher c, ajouter d, retrancher e et encore f.

Les termes affectés du signe $+$ sont dits *positifs*; les termes affectés du signe $-$ sont dits *négatifs*. Le terme a, qui, placé au commencement, n'a pas de signe, est positif, et doit être considéré comme affecté du signe $+$.

Il est évident que la *série des opérations indiquées par un polynôme revient à ajouter la somme des termes positifs et à retrancher la somme des termes négatifs.*

Pour éclaircir ceci par un exemple, supposons que le polynôme représente les opérations d'un négociant dans le courant de la journée, les termes positifs étant les recettes, les termes négatifs les dépenses. Au commencement de la journée, le négociant avait en caisse une certaine somme d'argent; il a fait d'abord une recette a et une seconde recette b; puis il a payé c; après quoi il a reçu d, il a payé e et encore f. Il est évident qu'à la fin de la journée

son avoir a été augmenté de la somme des recettes et diminué de la somme des dépenses.

Soit le polynôme numérique

$$12 + 7 - 15 + 20 - 6 - 2.$$

La somme des termes positifs est 39, celle des termes négatifs 23. Il faut ajouter 39 et retrancher 23, ce qui revient à ajouter 16, excès de la première somme sur la seconde. Dans ce cas, la valeur du polynôme est positive ; on l'écrit $+16$.

Lorsque la somme des termes négatifs l'emporte sur celle des termes positifs, le polynôme n'en conserve pas moins une signification très-nette. Soit le polynôme

$$5 - 3 + 7 - 10 + 4 - 9.$$

Il faut ajouter 16, somme des termes positifs, et retrancher 22, somme des termes négatifs; ce qui revient à retrancher 6, excès de la seconde somme sur la première. Dans ce cas, la valeur du polynôme est négative; on l'écrit -6.

Deux polynômes, et en général deux expressions algébriques sont égales, lorsqu'elles ont la même valeur affectée du même signe.

34. Il résulte clairement de ce qui précède que l'*on peut changer à volonté l'ordre des termes d'un polynôme;* car, quel que soit l'ordre des termes, on a toujours finalement la même somme à ajouter et la même somme à retrancher.

Ainsi les termes du polynôme

$$a + b - c + d - e - f$$

peuvent être écrits dans tel ordre qu'on voudra, par exemple

dans l'ordre suivant

$$-e+d-f+a-c+b.$$

Il n'y a aucun inconvénient à commencer par un terme négatif. Pour revenir à notre comparaison, cela signifie que le négociant commence par payer e, qu'il reçoit ensuite d, qu'il paye f, etc. Or rien n'empêche de supposer que le négociant a dans sa caisse, au commencement de la journée, une assez grande somme d'argent pour effectuer les paiements.

Termes semblables.

35. On dit que deux termes sont *semblables* lorsqu'ils sont composés des mêmes lettres affectées des mêmes exposants, et qu'ils ne diffèrent que par les coefficients et les signes.

Soit le polynôme

$$5a^3-4a^2b+7ab^2+a^2b-2a^3-8ab^2+a^3-12ab^2+3a^2b.$$

Nous voyons d'abord les trois termes semblables

$$5a^3-2a^3+a^3,$$

que l'on peut réduire et remplacer par le seul terme $+4a^3$. En effet, la quantité a^3 doit être ajoutée 5 fois et encore 1 fois, c'est-à-dire 6 fois, et retranchée 2 fois, ce qui revient à l'ajouter 4 fois.

Nous trouvons ensuite les termes semblables

$$-4a^2b+a^2b+3a^2b$$

qui se détruisent; car la quantité a^2b doit être ajoutée 3 fois et encore 1 fois, c'est-à-dire 4 fois, et retranchée 4 fois.

Il reste les termes semblables

$$+7ab^2-8ab^2-12ab^2,$$

qui se réduisent à $-13ab^2$; car la quantité ab^2 doit être

ajoutée 7 fois et retranchée 8 fois et encore 12 fois, c'est-à-dire 20 fois, ce qui revient à la retrancher 13 fois.

Ainsi, le polynôme proposé s'écrit plus simplement

$$4a^3 - 13ab^2.$$

Dans la pratique, on opère très-rapidement cette réduction des termes semblables. Soient les termes semblables

$$+7ab^2 - 8ab^2 - 12ab^2;$$

faisant abstraction de la quantité ab^2, on ne considère que les coefficients et les signes

$$+7 - 8 - 12,$$

et l'on calcule la valeur -13 de ce polynôme numérique; puis on écrit $-13ab^2$ au résultat, et l'on barre les termes réduits.

Ordonner un polynôme.

36. Après avoir réduit les termes semblables, on a coutume d'ordonner le polynôme, soit par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre, soit par rapport aux puissances croissantes, c'est-à-dire que l'on écrit les termes dans un ordre tel que les exposants de cette lettre aillent soit en diminuant, soit en augmentant.

Ainsi le polynôme

$$5x^3 - 4x^2 + 3x - 6$$

est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x. Ce même polynôme, écrit en ordre inverse,

$$-6 + 3x - 4x^2 + 5x^3,$$

sera ordonné par rapport aux puissances croissantes. Le terme -6, qui ne contient pas la lettre x, sera regardé comme étant du degré 0.

Quand un polynôme contient des termes de tous les degrés, à partir du degré le plus élevé, on dit qu'il est *complet.* Le polynôme étant supposé ordonné par rapport aux puissances croissantes, la série des exposants commence à zéro, et s'élève jusqu'au degré du polynôme inclusivement. Il y a donc autant de termes qu'il y a d'unités dans le degré plus un. Ainsi le polynôme précédent est un polynôme complet du troisième degré, et il renferme quatre termes.

Lorsqu'un polynôme, contenant deux lettres, est homogène, si on l'ordonne par rapport aux puissances décroissantes de l'une d'elles, il sera en même temps ordonné par rapport aux puissances croissantes de l'autre; car, la somme des exposants des deux lettres étant la même dans tous les termes, si les exposants de l'une d'elles vont en diminuant, ceux de l'autre iront nécessairement en augmentant. Ainsi le polynôme homogène

$$2a^3 - 5a^2b + 4ab^2 - 6b^3,$$

qui a été ordonné par rapport aux puissances décroissantes de a, se trouve en même temps ordonné par rapport aux puissances croissantes de b.

CHAPITRE II

ADDITION ET SOUSTRACTION

Addition.

37. Proposons-nous d'ajouter à un premier polynôme un second polynôme; nous supposons que ce second polynôme

ait une valeur positive, c'est-à-dire que la somme des termes positifs l'emporte sur celle des termes négatifs. Ajouter ce polynôme, c'est ajouter sa valeur, en d'autres termes, c'est ajouter l'excès de la somme de ses termes positifs sur la somme des termes négatifs. Mais ajouter cette différence revient évidemment à ajouter les termes positifs et retrancher les termes négatifs, ce qui se fera en écrivant à la suite du premier polynôme tous les termes du second, chacun avec son signe. Ainsi :

Règle. *A un polynôme on en ajoute un autre, en écrivant à la suite du premier successivement tous les termes du second, chacun avec son signe.*

Exemple. Additionner les polynômes

$$3a^4 - 5a^3b + 7a^2b^2 + 4ab^3 - b^4,$$
$$-2a^4 - 3a^3b + 8a^2b^2 + 7ab^3 + 2b^4,$$
$$6a^4 - 2a^3b - 15a^2b^2 - 6ab^3 - 2b^4.$$

Imaginons que l'on ait écrit tous les termes de ces trois polynômes, les uns à la suite des autres, chacun avec son signe, en affectant du signe $+$ le premier terme $6a^4$ du troisième polynôme; réduisons les termes semblables, nous obtiendrons le polynôme

$$7a^4 - 10a^3b + 5ab^3 - b^4.$$

38. Remarque. On peut grouper dans une parenthèse plusieurs termes d'un polynôme, en conservant à chaque terme son signe et mettant le signe $+$ devant la parenthèse.

Par exemple, le polynôme

$$a - b + c - d - e + f$$

peut être écrit sous la forme

$$a - b + (c - d - e + f).$$

En effet, la parenthèse précédée du signe + indique l'addition du polynôme; si l'on effectue cette addition d'après la règle énoncée, on reproduit évidemment le polynôme proposé.

Il n'y a pas à s'inquiéter de savoir si, parmi les termes mis entre parenthèses, la somme des termes positifs est plus grande que celle des termes négatifs, pourvu que l'on étende aux polynômes négatifs la règle démontrée pour l'addition des polynômes positifs. Ainsi nous dirons qu'ajouter un polynôme quelconque, c'est écrire tous ses termes, chacun avec son signe.

39. Il convient aussi d'appliquer la même règle à un terme pris isolément, et nous dirons qu'ajouter une quantité affectée du signe + ou du signe —, c'est l'écrire avec son signe. Soit, par exemple, le polynôme

$$15 - 3 + 6 - 9 - 4 + 2.$$

Si nous mettons les quatre derniers termes entre parenthèses, nous écrirons ce polynôme sous la forme

$$15 - 3 + (6 - 9 - 4 + 2).$$

La partie mise entre parenthèses est négative; mais ceci n'offre aucun inconvénient, puisqu'en effectuant l'addition d'après la règle énoncée on reproduit le polynôme proposé. Remplaçons maintenant le polynôme entre parenthèses par sa valeur -5; il s'agit d'ajouter -5; pour cela, nous écrirons -5, ce qui donne

$$15 - 3 - 5.$$

Et, en effet, dans le polynôme proposé, la partie

$$+6 - 9 - 4 + 2,$$

mise entre parenthèses, signifie qu'il faut ajouter 8 et retrancher 13, c'est-à-dire retrancher 5.

40. D'après cette manière de voir, l'*addition algébrique* ne comporte plus nécessairement l'idée d'augmentation. Si l'on ajoute une quantité positive, il y a effectivement augmentation; mais si l'on ajoute une quantité négative, il y a au contraire diminution. Ajouter — 5, c'est en réalité retrancher 5.

Il résulte de là que l'on peut considérer un polynôme comme étant la *somme algébrique* de tous ses termes, puisque l'addition consiste à les écrire les uns à la suite des autres, chacun avec son signe. Cette manière d'envisager les polynômes est très-utile dans les applications.

Soustraction.

41. La soustraction est l'opération inverse de l'addition. D'une quantité en retrancher une autre, c'est en trouver une troisième telle qu'en y ajoutant la seconde on reproduise la première.

Supposons que du polynôme

$$a - b + c$$

on veuille retrancher le polynôme

$$d - e - f + g.$$

Je dis qu'on obtiendra le résultat demandé en écrivant à la suite du premier polynôme tous les termes du second, chacun avec un signe contraire, ce qui donne

$$a - b + c - d + e + f - g.$$

En effet, si à ce troisième polynôme nous ajoutons le second, nous avons

$$a - b + c - d + e + f - g + d - e - f + g,$$

ou, simplement,

$$a - b + c,$$

en remarquant que les termes $-d$ et $+d$ se détruisent, de même que les termes $+e$ et $-e$, etc. C'est précisément le premier polynôme. Ainsi :

RÈGLE. *Pour retrancher d'un polynôme un autre polynôme, on écrit à la suite du premier successivement tous les termes du second, en changeant le signe de chacun d'eux.*

EXEMPLE. Du polynôme

$$5a^3 - 4a^2b - 6ab^2 + b^3$$

retrancher le polynôme

$$a^3 - 7a^2b + 2ab^2 - 5b^3.$$

Écrivons à la suite du premier polynôme tous les termes du second, en changeant les signes, nous aurons

$$5a^3 - 4a^2b - 6ab^2 + b^3 - a^3 + 7a^2b - 2ab^2 + 5b^3,$$

et, en réduisant les termes semblables,

$$4a^3 + 3a^2b - 8ab^2 + 6b^3.$$

42. REMARQUE. On peut grouper, dans une parenthèse précédée du signe $-$, plusieurs termes d'un polynôme, en ayant soin de changer les signes de tous les termes que l'on met dans la parenthèse.

Par exemple, le polynôme

$$a + b - c + d - e + f - g$$

peut être écrit sous la forme

$$a + b - (c - d + e - f + g).$$

En effet, la parenthèse, précédée du signe $-$, indique la soustraction d'un polynôme; or, si l'on effectue cette soustraction d'après la règle énoncée, on reproduit évidemment le polynôme proposé.

Il n'y a pas à s'inquiéter de savoir si, parmi les termes

mis entre parenthèses, la somme des termes positifs est plus grande ou plus petite que la somme des termes négatifs ; car la règle de l'addition ayant été établie d'une manière générale, celle de la soustraction, qui s'en déduit, a le même degré de généralité ; elle est vraie dans tous les cas, que la valeur du polynôme soit positive ou négative, qu'il comprenne un seul terme ou plusieurs. Ainsi, retrancher une quantité affectée d'un certain signe, c'est l'écrire avec un signe contraire.

Soit, par exemple, le polynôme

$$3-5-4+9-6+8.$$

Si nous mettons dans une parenthèse, précédée du signe —, les quatre derniers termes, en changeant leurs signes, nous écrirons ce polynôme sous la forme

$$3-5-(4-9+6-8).$$

La partie mise entre parenthèses est négative, mais ceci n'offre aucun inconvénient, puisqu'en effectuant la soustraction d'après la règle énoncée, on reproduit le polynôme proposé. Si nous remplaçons le polynôme entre parenthèses par sa valeur -7, nous avons à retrancher -7, ce qui se fait en changeant le signe de cette quantité, c'est-à-dire en écrivant $+7$; nous aurons donc

$$3-5+7.$$

Et, en effet, dans le polynôme proposé, la partie

$$-4+9-6+8,$$

mise entre parenthèses, signifie qu'il faut ajouter 17 et retrancher 10, c'est-à-dire ajouter 7.

43. De même que l'addition algébrique ne comporte plus nécessairement l'idée d'augmentation, la *soustraction algé-*

brique ne comporte plus nécessairement l'idée de diminution. Si l'on retranche une quantité positive, il y a effectivement diminution; mais si l'on retranche une quantité négative, il y a au contraire augmentation. Retrancher —7, c'est en réalité ajouter 7.

En résumé, si l'on considère les quantités comme affectées des signes + ou —, l'addition consiste à les écrire avec leurs signes, la soustraction à les écrire avec des signes contraires.

CHAPITRE III

MULTIPLICATION.

Je rappelle d'abord quelques principes qui nous seront utiles. On sait que, dans un produit de plusieurs facteurs, on peut changer l'ordre des facteurs et les grouper à volonté, sans changer la valeur du produit. On sait aussi que multiplier une quantité par un produit de plusieurs facteurs revient à multiplier cette quantité successivement par chacun des facteurs. Ces principes ont été démontrés en arithmétique pour des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires; on peut donc les appliquer en algèbre, où les lettres représentent des nombres quelconques.

Multiplication des deux puissances d'un même nombre

44. Soit à multiplier a^m par a^n. Multiplier par a^n revient à multiplier successivement par n facteurs égaux à a, puisque a^n désigne le produit de n facteurs égaux à a; d'autre

part, a^m désigne le produit de m facteurs égaux à a; on a donc le produit de $m+n$ facteurs égaux à a, ce qu'on écrit a^{m+n}. Ainsi,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Par exemple,

$$a^4 \times a^3 = a^7.$$

Règle. *On multiplie des puissances d'un même nombre en ajoutant les exposants.*

Une lettre qui n'a pas d'exposant est censée affectée de l'exposant 1. Ainsi,

$$a^4 \times a = a^5.$$

Multiplication de deux monômes.

48. Soit à faire le produit des monômes $4a^3b^2c^4d$ et $3a^2bc^3e^4$. Chacun de ces monômes exprime un produit de plusieurs facteurs; pour multiplier le premier produit par le second, il suffit de le multiplier successivement par chacun des facteurs du second, ce qui donne pour le produit demandé

$$4 \times a^3 \times b^2 \times c^4 \times d \times 3 \times a^2 \times b \times c^3 \times e^4.$$

Si l'on groupe les facteurs de la manière suivante

$$4 \times 3 \times (a^3 \times a^2) \times (b^2 \times b) \times (c^4 \times c^3) \times d \times e^4,$$

et si l'on effectue les produits indiqués dans les parenthèses, on a

$$12 \times a^5 \times b^3 \times c^7 \times d \times e^4,$$

ce qui s'écrit plus simplement

$$12a^5b^3c^7de^4.$$

Ainsi

$$4a^3b^2c^4d \times 3a^2bc^3e^4 = 12a^5b^3c^7de^4.$$

Règle. *Pour multiplier deux monômes entiers, on multiplie les coefficients, on ajoute les exposants des mêmes lettres, et l'on écrit avec leurs exposants les lettres différentes.*

Multiplication d'un polynôme par un monôme.

46. La valeur d'un monôme étant un nombre, entier ou fractionnaire, il s'agit de multiplier un polynôme par un nombre quelconque.

1° Proposons-nous d'abord de multiplier un polynôme

$$a - b + c - d$$

par un nombre entier m. Il faut répéter le polynôme m fois, c'est-à-dire additionner m polynômes égaux au polynôme multiplicande. Or, si l'on fait cette addition, on voit que chaque terme du multiplicande sera répété m fois avec son signe; en réduisant, on aura donc

$$ma - mb + mc - md.$$

Chaque terme du multiplicande sera multiplié séparément par le nombre entier.

2° Soit maintenant à diviser le polynôme

$$a - b + c - d$$

par un nombre entier n. Il faut trouver un polynôme qui, multiplié par n, reproduise le polynôme dividende. Le quotient cherché sera

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{c}{n} - \frac{d}{n},$$

car, si l'on multiplie ce polynôme par n, ce que l'on fait en multipliant chaque terme séparément par n, comme nous l'avons vu, on reproduit le polynôme proposé.

3° Il est aisé maintenant de multiplier le polynôme

$$a - b + c - d$$

par un nombre fractionnaire $\frac{m}{n}$. Multiplier par une fraction $\frac{m}{n}$, c'est répéter m fois la n^e partie du multiplicande;

en d'autres termes, c'est diviser le multiplicande par n et multiplier le résultat par m. Divisons d'abord le multiplicande par le nombre entier n, nous avons

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}+\frac{c}{n}-\frac{d}{n};$$

pour multiplier ce résultat par le nombre entier m, il suffit de multiplier chaque terme par m, ce qui donne

$$\frac{ma}{n}-\frac{mb}{n}+\frac{mc}{n}-\frac{md}{n};$$

ou

$$\frac{m}{n}a-\frac{m}{n}b+\frac{m}{n}c-\frac{m}{n}d.$$

Mais le multiplicateur $\frac{m}{n}$ est un nombre quelconque que nous pouvons représenter par la lettre e, et nous avons alors

$$(a-b+c-d)\times e=ae-be+ce-de.$$

RÈGLE. Ainsi *on multiplie un polynôme par un nombre quelconque, en multipliant chaque terme séparément par ce nombre, et donnant à chaque terme du produit le signe du terme correspondant du multiplicande.*

Multiplication d'un polynôme par un polynôme.

47. Il est évident que le produit d'une quantité quelconque par la somme de plusieurs nombres est égal à la somme des produits de cette quantité par chacun d'eux. Par exemple, 8 fois une quantité égale 5 fois cette quantité, plus 3 fois cette même quantité. Si donc le polynôme multiplicateur a tous ses termes positifs, il suffira de multiplier le multiplicande par chacun d'eux séparément et d'ajouter les résultats.

Il est évident aussi que le produit d'une quantité quel-

conque par la différence de deux nombres est égal à la différence des produits de cette quantité par chacun d'eux. Par exemple, 5 fois une quantité égale 8 fois cette quantité, moins 3 fois cette même quantité. Supposons maintenant que le polynôme multiplicateur ait des termes positifs et des termes négatifs, et que la somme des termes positifs l'emporte sur celle des termes négatifs; la valeur du polynôme multiplicateur est l'excès de la première somme sur la seconde; le produit du multiplicande par cette différence égale donc la différence des produits obtenus en multipliant le multiplicande par chacune de ces deux sommes. Ceci revient à multiplier le multiplicande par chacun des termes du multiplicateur, à ajouter les produits partiels fournis par les termes positifs du multiplicateur, et à retrancher les produits partiels fournis par les termes négatifs. Ainsi,

Règle. *Pour multiplier un polynôme par un polynôme, on multiplie tous les termes du multiplicande successivement par chacun des termes du multiplicateur; on écrit avec leurs signes les produits partiels fournis par les termes positifs du multiplicateur, et avec des signes contraires les produits fournis par les termes négatifs.*

Règle des signes.

48. Soit à multiplier le polynôme

$$a-b+c-d$$

par le polynôme

$$e-f+g-h.$$

Le produit demandé sera

$$+(ae-be+ce-de)-(af-bf+cf-df)$$
$$+(ag-bg+cg-dg)-(ah-bh+ch-dh).$$

ou, en effectuant les additions et les soustractions indiquées par les parenthèses,

$$\begin{array}{r} ae - be + ce - de \\ - af + bf - cf + df \\ + ag - bg + cg - dg \\ - ah + bh - ch + dh. \end{array}$$

On voit que le produit des deux polynômes renferme le produit de chacun des termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur.

On reconnaît aussi qu'*un terme du produit a le signe + s'il provient de deux termes de même signe, le signe — s'il provient de deux termes de signes contraires*. Par exemple, le terme cg, qui provient de deux termes positifs, a le signe +; et de même le terme bf, qui provient de deux termes négatifs; au contraire, les termes bg et cf, qui proviennent de deux termes, l'un positif, l'autre négatif, sont affectés du signe —.

Il est facile de se rendre compte de cette loi, connue sous le nom de règle des signes, si l'on observe que, dans les parenthèses, les signes sont ceux des termes du multiplicande et que chacune d'elles est affectée du signe du terme correspondant du multiplicateur. Un terme positif, multiplié par un terme positif, donne un terme positif dans la parenthèse; comme la parenthèse est précédée elle-même du signe +, ce terme aura finalement le signe +. Un terme négatif, multiplié par un terme négatif, donne un terme négatif dans la parenthèse; comme la parenthèse est précédée elle-même du signe —, ce terme, changeant de signe, aura finalement le signe +, etc.

Dans la pratique, on ordonne les deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes, ou par rapport aux

puissances croissantes d'une même lettre (n° 36) ; on multiplie tous les termes du multiplicande successivement par chacun des termes du multiplicateur, en allant de gauche à droite, et l'on écrit les produits partiels par lignes horizontales, de manière que les termes semblables se trouvent placés les uns au-dessous des autres, puis on fait la réduction que cette disposition facilite beaucoup.

Exemples.

49. Exemple I. Multiplier le polynôme

$$4x^5 - 3x^4 - 7x^3 + x^2$$
$$2x^3 - 4x^2 + 5x.$$

On dispose l'opération de la manière suivante :

$$\begin{array}{llllll}
4x^5 - & 3x^4 - & 7x^3 + & x^2 & & \\
2x^3 - & 4x^2 + & 5x & & & \\
\hline
8x^8 - & 6x^7 - & 14x^6 + & 2x^5 & & \\
 & - 16x^7 + & 12x^6 + & 28x^5 - & 4x^4 & \\
 & & + 20x^6 - & 15x^5 - & 35x^4 + & 5x^3 \\
\hline
8x^8 - & 22x^7 + & 18x^6 + & 15x^5 - & 39x^3 + & 5x^3.
\end{array}$$

Il y a toujours deux termes dans le produit qui ne se réduisent avec aucun autre, et qui, par conséquent, se conservent intacts au résultat; c'est le produit du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, et aussi le produit des deux derniers termes. En effet, l'exposant de la lettre ordonnatrice dans un terme quelconque du produit est la somme des exposants de cette lettre dans les deux termes qui l'ont fourni; or, si les deux polynômes ont été ordonnés par rapport aux puissances décroissantes, il est clair que, dans le terme provenant du produit des deux premiers termes, l'exposant, étant la somme des deux plus forts exposants, sera plus grand que dans tout autre terme du produit; ce terme sera donc irré-

ductible. De même, le terme provenant du produit des deux derniers termes, ayant un exposant égal à la somme des deux plus petits exposants, et par conséquent moindre que celui de tout autre terme du produit, sera irréductible. Ainsi le premier terme du produit des deux polynômes ordonnés provient exactement du produit des deux premiers termes, et le dernier terme du produit des deux derniers termes. Cette remarque nous sera très-utile pour effectuer la division de deux polynômes.

Il résulte de là que le degré du produit des deux polynômes est égal au degré du multiplicande, plus le degré du multiplicateur.

50. EXEMPLE II.

$$
\begin{array}{llllll}
2a^3 & -\ 3a^2b & -\ 5ab^2 & +\ b^3 & & \\
4a^2 & -\ 7ab & +\ 3b^2 & & & \\
\hline
8a^5 & -\ 12a^4b & -\ 20a^3b^2 & +\ 4a^2b^3 & & \\
 & -\ 14a^4b & +\ 21a^3b^2 & +\ 35a^2b^3 & -\ 7ab^4 & \\
 & & +\ 6a^3b^2 & -\ 9a^2b^3 & -\ 15ab^4 & +\ 3b^5 \\
\hline
8a^5 & -\ 26a^4c & +\ 7a^3b^2 & +\ 30a^2b^3 & -\ 22ab^4 & +\ 3b^5.
\end{array}
$$

Les deux polynômes ont été ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de a, et les termes qui ne contiennent pas a sont regardés comme étant du degré o par rapport à cette lettre.

51. EXEMPLE III. Quand les polynômes proposés ne sont pas complets, on laisse des intervalles vides afin de pouvoir placer les termes semblables les uns au-dessous des autres.

$$
\begin{array}{lllllllll}
x^5 & -\ 2x^3 & +\ 7x & -\ 1 & & & & & \\
x^4 & -\ 3x^3 & +\ 2 & & & & & & \\
\hline
x^9 & & -\ 2x^7 & & +\ 7x^5 & -\ x^4 & & & \\
 & -\ 3x^8 & & +\ 6x^6 & & -\ 21x^4 & +\ 3x^3 & & \\
 & & & & +\ 2x^5 & & -\ 4x^3 & +\ 14x & -\ 2 \\
\hline
x^9 & -\ 3x^8 & -\ 2x^7 & +\ 6x^6 & +\ 9x^5 & -\ 22x^4 & -\ x^3 & +\ 14x & -\ 2.
\end{array}
$$

52. Exemple IV. Multiplier les deux polynômes

$$(a^2 - ab)x^2 + (a^3 - 2a^2b + b^3)x - (a^2b^2 + b^4),$$
$$(a^2 + b^2)x^2 - (a^2b + ab^2)x + b^4.$$

Les deux polynômes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, mais les coefficients, au lieu d'être des nombres donnés, sont des polynômes en a et b, ce qui complique beaucoup l'opération. On la dispose ordinairement de la manière suivante, en plaçant les uns au-dessous des autres les termes qui contiennent la même puissance de x, et, pour ne pas répéter cette puissance à chaque fois, on trace un trait vertical à la droite duquel on écrit une fois pour toutes la puissance de x. On multiplie tous les termes du multiplicande d'abord par a^2x^2, ensuite par b^2x^2, puis par $-a^2bx$, etc., en disposant le résultat par colonnes verticales comme nous l'avons dit; puis on réduit les termes semblables dans chaque colonne verticale.

a^2 $-ab$	$x^2 + a^3$ $-2a^2b$ $+ b^3$	$x - a^2b^2$ $- b^4$		
a^2 $+b^2$	$x^2 - a^2b$ $- ab^2$	$x + b^4$		
a^4 $-a^3b$ $+a^2b^2$ $-a\,b^3$	$x^4 + a^5$ $-2a^4b$ $+ a^2b^3$ $+ a^3b^2$ $-2a^2b^3$ $+ b^5$ $- a^4b$ $+ a^3b^2$ $- a^3b^2$ $+ a^2b^3$	$x^3 - a^4b^2$ $- a^2b^4$ $- a^2b^4$ $- b^6$ $- a^5b$ $+2a^4b^2$ $- a^2b^4$ $- a^4b^2$ $+2a^3b^3$ $-ab^5$ $+ a^2b^4$ $- ab^5$	$x^2 + a^4b^3$ $+ a^2b^5$ $+ a^3b^4$ $+ ab^6$ $+ a^3b^4$ $-2a^2b^5$ $+ b^7$	$x - a^2b^6$ $- b^8$
a^4 $-a^3b$ $+a^2b^2$ $-a\,b^3$	$x^4 + a^5$ $-3a^4b$ $+ a^3b^2$ $+ b^5$	$x^3 - a^5b$ $+2a^3b^3$ $-2a^2b^4$ $-2ab^5$ $-b^6$	$x^2 + a^4b^3$ $+2a^3b^4$ $- a^2b^5$ $+ ab^6$ $+ b^7$	$x - a^2b^6$ $- b^8$

Remarques sur la multiplication.

53. Remarque I. Nous avons établi (nº 47) la règle de la multiplication des polynômes, en supposant que, dans le polynôme multiplicateur, la somme des termes positifs est plus grande que celle des termes négatifs, et nous avons vu que l'opération revient à ajouter le produit du multiplicande par la somme des termes positifs du multiplicateur, et à retrancher le produit du multiplicande par la somme des termes négatifs. Il est naturel d'étendre cette idée au cas où la somme des termes positifs du multiplicateur est plus petite que celle des termes négatifs; nous dirons donc que multiplier par un polynôme quelconque, c'est multiplier par la somme des termes positifs, et par la somme des termes négatifs, ajouter le premier produit et retrancher le second. De cette manière, la règle à laquelle nous sommes arrivés sera générale.

Soit, par exemple, l'expression

$$a-(b-c)(d-e)$$

dans laquelle nous supposons b plus grand que c, d plus grand que e. Nous avons à retrancher le produit de deux polynômes; il suffit pour cela de changer les signes de l'un d'eux; car il est évident que l'on change ainsi les signes de tous les termes du produit, et l'on sait que la soustraction revient à un changement de signes. Nous pouvons donc écrire l'expression sous l'une des deux formes

$$a+(c-b)(d-e)$$

ou

$$a+(b-c)(e-d).$$

L'un des polynômes devient négatif; mais ceci n'offre aucun inconvénient, puisque si l'on effectue la multiplica-

tion d'après la règle énoncée, les trois expressions donnent naissance au même polynôme

$$a - bd + cd + be - ce.$$

Si l'on change les signes des deux polynômes, le produit ne change pas; ainsi l'expression précédente peut encore être mise sous la forme

$$a - (c - b)(e - d).$$

54. Il convient aussi d'appliquer la même définition à des termes pris isolément, et nous dirons que multiplier une quantité quelconque par une quantité affectée du signe $+$ ou du signe $-$, c'est multiplier par cette quantité et ajouter ou retrancher le produit, suivant que le multiplicateur est positif ou négatif.

Reprenons l'expression

$$a - (b - c)(d - e),$$

dans laquelle nous avons supposé b plus grand que c, d plus grand que e. Si nous désignons par f et g les valeurs des deux polynômes $b - c$ et $d - e$, l'expression se réduit à

$$a - fg.$$

Nous avons dit que l'on peut mettre cette expression sous la forme

$$a + (b - c)(e - d);$$

remplaçons les deux polynômes $b - c$ et $e - d$ par leurs valeurs $+f$ et $-g$; nous aurons à multiplier $+f$ par $-g$, ce qui donne $-fg$, et nous retrouvons ainsi le même résultat $a - fg$.

Considérons encore l'expression

$$a + (b - c)(d - e),$$

qui se réduit à

$$a + fg.$$

Nous pouvons la mettre sous la forme

$$a+(c-b)(e-d);$$

remplaçons les deux polynômes $c-b$ et $e-d$ par leurs valeurs $-f$ et $-g$; nous aurons à multiplier $-f$ par $-g$, ce qui donne $+fg$, et nous retrouvons ainsi le même résultat $a+fg$.

Il résulte de cette manière d'envisager la *multiplication algébrique* que le produit de deux polynômes est égal à la *somme algébrique* des produits de tous les termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur.

55. Remarque II. Le produit d'une quantité négative par une quantité négative étant positif, le carré d'une quantité négative sera positif; mais le cube, qui est égal au produit du carré par la quantité elle-même, sera négatif; en général, les puissances paires d'une quantité négative sont positives, mais les puissances impaires sont négatives.

Cette remarque est importante. Si l'on veut changer le signe d'une lettre dans un polynôme, on changera les signes de toutes les puissances impaires de cette lettre, sans changer ceux des puissances paires.

Par exemple, en multipliant le binôme $a+b$ par lui-même, on trouve

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Changeons le signe de b; le terme $2ab$ changera de signe, mais le terme b^2 ne changera pas; nous aurons donc

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Ces deux égalités donnent naissance à ces deux théorèmes de géométrie élémentaire : le carré construit sur la somme ou sur la différence de deux lignes est égal à la somme des

carrés construits sur chacune de ces deux lignes, plus ou moins deux fois le rectangle ayant l'une pour base, l'autre pour hauteur.

La multiplication de $a+b$ par $a-b$ donne

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

En changeant le signe de b, on permute simplement les deux facteurs du produit, et l'on voit qu'en effet le second membre ne change pas. L'égalité précédente s'énonce ainsi : le produit de la somme de deux quantités par leur différence est égal à la différence des carrés de ces deux quantités. C'est une proposition fréquemment employée en algèbre; elle se traduit en géométrie par ce théorème : le rectangle construit sur la somme et la différence de deux lignes est égal à la différence des carrés construits sur ces deux lignes.

Si l'on multiplie le carré de $a+b$ par $a+b$, on trouve

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

on en déduit, en changeant le signe de b,

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

CHAPITRE IV

DIVISION.

56. La division est l'opération inverse de la multiplication. Elle a pour but, étant données deux expressions algébriques, nommées, l'une dividende, l'autre diviseur, d'en trouver une troisième, nommée quotient, qui, multipliée par le diviseur, reproduise le dividende.

Quotient de deux puissances d'un même nombre.

57. Soit à diviser a^m par a^n, le quotient sera a^{m-n}; car si l'on multiplie ce quotient par le diviseur a^n, ce que l'on fait en ajoutant les exposants, on reproduit le dividende a^m. On a donc

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

RÈGLE. *Pour diviser deux puissances d'un même nombre l'une par l'autre, de l'exposant du dividende on retranche celui du diviseur.*

EXEMPLE :

$$\frac{a^7}{a^4} = a^3.$$

Exposant zéro.

58. Le quotient est entier lorsque l'exposant du dividende est plus grand que celui du diviseur. Alors on peut effectivement retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende.

Lorsque l'exposant du diviseur est égal à celui du dividende, l'application de la règle précédente conduit au symbole a^0; car on a dans ce cas,

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0.$$

Le symbole a^0, représentant le quotient de deux quantités égales, a une valeur égale à l'unité, quelle que soit la valeur de a. L'emploi de ce symbole est très-utile en algèbre; nous en avons déjà fait usage plusieurs fois implicitement : ainsi nous avons dit (n° 32) que, lorsqu'une lettre

n'entre pas dans un monôme, on peut la considérer comme y entrant avec l'exposant zéro, et nous avons supposé le polynôme

$$2a^3 - 5a^2b + 4ab^2 - 6b^3$$

écrit sous la forme

$$2a^3b^0 - 5a^2b + 4ab^2 - 6a^0b^3.$$

Les facteurs introduits b^0 et a^0, étant égaux à l'unité, ne changent pas les valeurs du premier et du dernier terme.

L'emploi de l'exposant zéro simplifie les énoncés : on peut énoncer la règle de la multiplication des monômes en disant simplement que l'on multiplie les coefficients et que l'on ajoute les exposants des mêmes lettres. Il n'y a qu'à supposer, en effet, que, lorsqu'une lettre n'entre pas dans l'un des monômes, elle s'y trouve avec l'exposant zéro.

Lorsque l'exposant du diviseur est plus grand que celui du dividende, le quotient est fractionnaire; on le simplifie en divisant les deux termes par le numérateur. Ainsi

$$\frac{a^4}{a^7} = \frac{1}{a^3}.$$

Dans ce cas, l'application de la règle de la division conduit au symbole a^{-3}, qui représente $\frac{1}{a^3}$; c'est là l'origine des exposants négatifs dont il sera question plus tard.

Division des monômes.

59. La règle formulée pour la multiplication des monômes (n° 45) conduit immédiatement à la règle suivante :

RÈGLE. *Pour diviser un monôme par un monôme, on divise le coefficient du dividende par celui du diviseur, et l'on retranche les exposants du diviseur des exposants des mêmes lettres dans le dividende.*

Soit à diviser $12a^5b^3c^7de^4$ par $4a^3b^2c^4d$. Le quotient demandé sera $3a^2bc^3e^4$; car si l'on multiplie ce quotient par le diviseur, on reproduit évidemment le dividende. Ainsi

$$\frac{12a^5b^3c^7de^4}{4a^3b^2c^4d}=3a^2bc^3e^4.$$

En appliquant la règle, on regardera la lettre e comme affectée de l'exposant o dans le diviseur.

60. REMARQUE. Pour que le quotient soit entier, il faut que le coefficient du dividende soit divisible par le coefficient du diviseur, et que les exposants du diviseur ne surpassent pas les exposants des mêmes lettres dans le dividende.

La seconde condition est surtout essentielle; car si elle est remplie sans que la première le soit, le quotient aura, il est vrai, un coefficient fractionnaire, mais il sera encore *entier algébriquement*. On aura, par exemple,

$$\frac{8a^7b^5c^4d^2e}{12a^4b^3c^2d}=\frac{2}{3}a^3b^2c^2de.$$

On dit qu'une expression est *entière algébriquement*, lorsqu'elle est entière sauf des coefficients fractionnaires.

Si la seconde condition n'est pas remplie, le quotient sera fractionnaire; mais alors on le simplifiera autant que possible. Par exemple

$$\frac{18a^9b^4c^2d^3}{30a^7b^5c^4}=\frac{3a^2d^3}{5bc^2}$$

Division d'un polynôme par un monôme.

61. On sait que l'on multiplie un polynôme par un monôme, en multipliant chaque terme du polynôme par le monôme (n° 46); on effectuera donc la division d'un polynôme

entier par un monôme entier, en divisant chaque terme du dividende par le diviseur. Le quotient sera entier si chaque terme du dividende est divisible séparément par le diviseur; sinon, il sera fractionnaire.

Division des polynômes.

62. Supposons les deux polynômes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre. La question est de trouver un polynôme entier qui, multiplié par le polynôme diviseur, reproduise le dividende. Imaginons ce polynôme trouvé et ordonné aussi par rapport aux puissances décroissantes de la même lettre. Nous savons que, dans la multiplication de deux polynômes ordonnés (n° 49), le premier terme du produit provient sans réduction de la multiplication du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur. Ainsi le premier terme du dividende est exactement le produit du premier terme du diviseur par le premier terme du quotient; si donc on divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, on obtiendra le premier terme du quotient.

Le dividende est égal à la somme des produits partiels que l'on obtient en multipliant le diviseur par chacun des termes du quotient; multiplions le diviseur par le premier terme du quotient, et retranchons ce produit du dividende, nous aurons un reste qui sera égal au produit du diviseur par les autres termes du quotient. Ce reste constitue donc un nouveau dividende, sur lequel nous pouvons raisonner comme sur le dividende proposé. Le premier terme de ce nouveau dividende est le produit du premier terme du diviseur par le premier terme du quotient correspondant; en

divisant le premier terme du reste par le premier terme du diviseur, on aura donc le second terme du quotient, etc.

Rien n'est changé dans le raisonnement, quand les polynômes sont ordonnés par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre.

On déduit de là la règle suivante :

RÈGLE. *Pour diviser deux polynômes entiers l'un par l'autre, on ordonne ces deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes, ou par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre; on divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, ce qui donne le premier terme du quotient; on multiplie le diviseur par ce premier terme du quotient et l'on retranche le produit du dividende; on divise le premier terme du reste par le premier terme du diviseur, ce qui donne le deuxième terme du quotient; on multiplie le diviseur par ce deuxième terme du quotient, et l'on retranche le produit du premier reste; on divise le premier terme du deuxième reste par le premier terme du diviseur, et l'on continue de cette manière jusqu'à ce que l'on arrive au dernier terme du quotient.*

On obtient directement le dernier terme du quotient en divisant le dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur. Car, dans la multiplication de deux polynômes ordonnés, le dernier terme du produit provient aussi sans réduction de la multiplication du dernier terme du multiplicande par le dernier terme du multiplicateur. Arrivé au dernier terme, on doit trouver ensuite un reste nul, si la division se fait exactement.

Il est clair que la loi des signes est la même que dans la multiplication; si les deux termes que l'on divise l'un par

l'autre ont le même signe, le terme du quotient devra être affecté du signe $+$; s'ils ont des signes contraires, le terme du quotient devra être affecté du signe $-$.

Exemples.

63. Exemple I. Soit à diviser le polynôme

$$8a^5-26a^4b+7a^3b^2+30a^2b^3-22ab^4+3b^5$$

par le polynôme

$$2a^3-3a^2b-5ab^2+b^3.$$

On dispose l'opération de la manière suivante :

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
8a^5 & -26a^4b & +7a^3b^2 & +30a^2b^3 & -22ab^4 & +3b^5 & 2a^3-3a^2b-5ab^2+b^3 \\
-8a^5 & +12a^4b & +20a^3b^2 & -4a^2b^3 & & & \overline{4a^2-7ab+3b^2} \\
\hline
 & -14a^4b & +27a^3b^2 & +26a^2b^3 & -22ab^4 & +3b^5 & \\
 & +14a^4b & -21a^3b^2 & -35a^2b^3 & +7ab^4 & & \\
\hline
 & & +6a^3b^2 & -9a^2b^3 & -15ab^4 & +3b^5 & \\
 & & -6a^3b^2 & +9a^2b^3 & +15ab^4 & -3b^5 & \\
\hline
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

Les deux polynômes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de a. On divise le premier terme $8a^5$ du dividende par le premier terme $2a^3$ du diviseur, ce qui donne le premier terme $4a^2$ du quotient. On multiplie tout le diviseur par $4a^2$ et l'on retranche le produit du dividende; pour cela on écrit au-dessous du dividende les différents termes de ce produit, avec des signes contraires, puis on additionne, en réduisant les termes semblables. On obtient ainsi le reste

$$-14a^4b+27a^3b^2+26a^2b^3-22ab^4+3b^5.$$

On divise le premier terme $-14a^4b$ de ce reste par le premier terme $2a^3$ du diviseur, ce qui donne le deuxième

terme $-7ab$ du quotient. On observe que ce terme doit être affecté du signe —, en vertu de la règle des signes établie pour la multiplication des polynômes (n° 48); en effet, le terme $-14a^4b$ du produit ayant le signe —, les deux termes qui le produisent doivent avoir des signes contraires; mais le terme $2a^3$ a le signe +; donc le terme $7ab$ aura le signe —. On multiplie le diviseur par ce deuxième terme, et l'on retranche le produit du reste; on obtient ainsi un deuxième reste

$$+6a^3b^2-9a^2b^3-15ab^4+3b^5.$$

On divise le premier terme $+6a^3b^2$ de ce deuxième reste par le premier terme $2a^3$ du diviseur, ce qui donne le troisième terme $+3b^2$ du quotient. On multiplie le diviseur par ce troisième terme du quotient; on en retranche le produit du deuxième reste; on trouve *zéro*. L'opération est terminée. Le quotient demandé est

$$4a^2-7ab+3b^2.$$

Remarquons que l'on aurait trouvé immédiatement le dernier terme $+3b^2$ du quotient, en divisant le dernier terme $+3b^5$ du dividende par le dernier terme $+b^3$ du diviseur.

Le degré du quotient par rapport à la lettre ordonnatrice est égal au degré du dividende, moins celui du diviseur.

64. Exemple II. Soit encore à diviser

$$4x^4-9x^2+6x-1$$

par

$$2x^2-3x+1.$$

Le polynôme dividende n'étant pas complet, on laissera des intervalles vides afin de pouvoir placer les termes sem-

blables les uns au-dessous des autres.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^4 & & -\ 9x^2+6x-1 & & 2x^2-3x+1 \\
-4x^4 & +6x^3 & -\ 2x^2 & & \overline{2x^2+3x-1} \\ \hline
 & +6x^3 & -11x^2+6x-1 & & \\
 & -6x^3 & +\ 9x^2-3x & & \\ \hline
 & & -\ 2x^2+3x-1 & & \\
 & & +\ 2x^2-3x+1 & & \\ \hline
 & & 0 & &
\end{array}
$$

Remarques sur la division,

65. Remarque I. Quand les polynômes proposés renferment plusieurs termes non semblables du même degré par rapport à la lettre ordonnatrice, les coefficients des diverses puissances de cette lettre sont des polynômes, et l'opération devient très-compliquée. Soit à diviser le polynôme

$$
(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3)x^4+(a^5-3a^4b+a^3b^2+b^5)x^3
$$
$$
+(-a^5b+2a^3b^3-2a^2b^4-2ab^5-b^6)x^2
$$
$$
+(a^4b^3+2a^3b^4-a^2b^5+ab^6+b^7)x-(a^2b^6+b^8)
$$

par $\qquad (a^2+b^2)x^2-(a^2b+ab^2)x+b^4.$

On disposera l'opération de la manière suivante :

a^4 $-a^3b$ $+a^2b^2$ $-ab^3$	$x^4+\ a^5$ $-3a^4b$ $+\ a^3b^2$ $+\ b^5$	$x^3-\ a^5b$ $+2a^3b^3$ $-2a^2b^4$ $-2ab^5$ $-\ b^6$	$x^2+\ a^4b^3$ $+2a^3b^4$ $-\ a^2b^5$ $+\ ab^6$ $+\ b^7$	$x-a^2b^6$ $-b^8$
	$+\ a^4b$ $+\ a^3b^2$ $-\ a^3b^2$ $-\ a^2b^3$	$-\ a^2b^4$ $+\ ab^5$ $+\ a^5b$ $+\ a^4b^2$ $-2a^4b^2$ $-2a^3b^3$ $+\ a^2b^4$ $+\ ab^5$	$-\ a^2b^4$ $+2a^2b^5$ $-\ b^7$ $-\ a^4b^3$ $-\ a^3b^4$ $-\ a^2b^5$ $-\ ab^6$	$+a^2b^6$ $+b^8$
	$+\ a^5$ $-2a^4b$ $+\ a^3b^2$ $-\ a^2b^3$ $+\ b^5$	$-\ a^4b^2$ $-2a^2b^4$ $-\ b^6$	0	0

a^2 $+b^2$	$x^2-\ a^2b$ $-\ ab^2$	$x+b^4$
a^2 $-ab$	$x^2+\ a^3$ $-2a^2b$ $+\ b^3$	$x-a^2b^2$ $-b^4$

1re DIVISION PARTIELLE.

$$
\begin{array}{l|l}
a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 & a^2 + b^2 \\ \cline{2-2}
-a^4 \qquad\quad - a^2b^2 & a^2 - ab \\ \cline{1-1}
\quad -a^3b \qquad\quad -ab^3 & \\
\quad +a^3b \qquad\quad +ab^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

2e DIVISION PARTIELLE.

$$
\begin{array}{l|l}
a^5 - 2a^4b + a^3b^2 - \ a^2b^3 + b^5 & a^2 + \ b^2 \\ \cline{2-2}
-a^5 \qquad\quad - a^3b^2 & a^3 - 2a^2b + b^3 \\ \cline{1-1}
\quad -2a^4b \qquad\quad - \ a^2b^3 + b^5 & \\
\quad +2a^4b \qquad\quad +2a^2b^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad + \ a^2b^3 + b^5 & \\
\qquad\qquad\qquad - \ a^2b^3 - b^5 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

3e DIVISION PARTIELLE.

$$
\begin{array}{l|l}
-a^4b^2 - 2a^2b^4 - b^6 & a^2 + b^2 \\ \cline{2-2}
+a^4b^2 + \ a^2b^4 & -a^2b^2 - b^4 \\ \cline{1-1}
\qquad - \ a^2b^4 - b^6 & \\
\qquad + \ a^2b^4 + b^6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Les deux polynômes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x et les coefficients sont eux-mêmes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de a. Pour avoir le premier terme du quotient, il faut diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; on divisera donc le coefficient

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3$$

du premier terme du dividende par le coefficient $a^2 + b^2$ du

premier terme du diviseur; faisant cette division à part, on trouve ainsi

$$(a^2 - ab)x^2$$

pour le premier terme du quotient. On multiplie le diviseur par le premier terme du quotient et on écrit le résultat, avec des signes contraires, au-dessous du dividende, et dans les colonnes verticales convenables. Il est inutile d'écrire le produit du premier terme du diviseur; car on sait d'avance que ce produit détruira le premier terme du dividende. Comme il suffit de connaître le premier terme du reste pour continuer l'opération, on ne fera la réduction des termes semblables que dans la deuxième colonne verticale.

Pour avoir le deuxième terme du quotient, on divise le premier terme du reste par le premier terme du diviseur, ce qui exige que l'on effectue à part la division du coefficient

$$a^5 - 2a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + b^5$$

de ce premier terme par le cofficient $a^2 + b^2$ du premier terme du diviseur; on trouve ainsi

$$+(a^3 - 2a^2b + b^3)x$$

pour le deuxième terme du quotient. On multiplie le diviseur par le deuxième terme du quotient, et on écrit le résultat, avec des signes contraires, au-dessous du dividende, et dans les colonnes convenables; il est inutile d'écrire le produit du premier terme du diviseur, puisqu'on sait que ce produit détruit le premier terme du reste. On réduira les termes semblables dans la troisième colonne verticale, afin d'avoir le premier terme du nouveau reste.

Divisant à part le coefficient

$$-a^4b^2 - 2a^2b^4 - b^6$$

du premier terme du deuxième reste par le coefficient a^2+b^2 du premier terme du diviseur, on obtient le troisième terme du quotient

$$-a^2b^2-b^4.$$

On multiplie le diviseur par le troisième terme du quotient et on écrit le résultat avec des signes contraires au-dessous du dividende; il est inutile comme précédemment d'écrire le produit du premier terme du diviseur. Réduisant les termes semblables dans la quatrième et la cinquième colonne verticales, on trouve un reste nul. L'opération est terminée.

66. Remarque II. Les raisonnements précédents, et les conclusions que nous en avons tirées, supposent qu'il existe un polynôme entier qui, multiplié par le diviseur, reproduit le dividende. Voyons à quels caractères on reconnaît si ce polynôme entier existe.

Les polynômes étant ordonnés par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une même lettre, il est nécessaire d'abord que le premier terme du dividende soit divisible par le premier terme du diviseur, et le dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur. Soit, par exemple, à diviser

$$x^5-3x^4-5x^3+7x^2-8x$$

par

$$x^3-4x^2.$$

Le dernier terme $8x$ du dividende n'est pas divisible par le dernier terme $4x^2$ du diviseur; donc la division est impossible.

Lorsque ces deux conditions sont remplies, on effectue la division par le procédé ordinaire; si l'opération ne conduit pas au dernier terme tel qu'on l'a obtenu directement,

la division est impossible. Soit, par exemple, à diviser

$$2-3x-5x^2+4x^3-6x^4$$

par

$$1-4x+3x^2.$$

Le premier terme du dividende est divisible par le premier terme du diviseur, ce qui donne 2 pour le premier terme du quotient; le dernier terme est aussi divisible par le dernier terme, ce qui donne $-2x^2$ pour le dernier terme du quotient. Effectuons l'opération suivant le procédé ordinaire

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -3x & -5x^2 & +4x^3 & -6x^4 & 1-4x+3x^2 \\
-2 & +8x & -6x^2 & & & \overline{2+5x+9x^2} \\
\hline
 & +5x & -11x^2 & +4x^3 & -6x^4 & \\
 & -5x & +20x^2 & -15x^3 & & \\
\hline
 & & +9x^2 & -11x^3 & -6x^4 &
\end{array}$$

L'opération nous conduit à un dernier terme $+9x^2$, qui n'est pas égal au dernier terme $-2x^2$, tel qu'on l'a trouvé directement. Donc la division est impossible.

Soit encore à diviser

$$x^4-5x^3-2x^2+3x+4$$

par

$$x^2-2x+3.$$

La division du dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur donne $\frac{4}{3}$ pour le dernier terme du quotient. Mais, le coefficient du premier terme du diviseur étant l'unité, on n'aura dans le calcul que des coefficients entiers, et par conséquent on n'arrivera pas à un dernier terme fractionnaire. Donc la division est impossible.

Lorsque l'opération conduit au dernier terme tel qu'on l'a obtenu *à priori*, il faut encore que le reste suivant soit nul. Soit, par exemple, à diviser

$$2-3x-16x^2+4x^3-6x^4$$

par

$$1-4x+3x^2.$$

L'opération conduit au dernier terme $-2x^2$ tel qu'on l'obtient directement, mais le reste suivant n'est pas nul. Donc la division est impossible.

67. Remarque III. En général, on ordonne les deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre. Soit m le degré du dividende, n celui du diviseur, m étant supposé plus grand que n; en effectuant l'opération, on obtient au quotient un polynôme entier du degré $m-n$. On observe que les degrés des restes successifs vont donc en diminuant d'unité en unité; on poussera l'opération jusqu'à ce que l'on arrive à un reste d'un degré inférieur à celui du diviseur. Si ce reste est nul, la division se fait exactement et le quotient est entier. S'il n'est pas nul, il est impossible de continuer l'opération : le quotient est fractionnaire, et, pour le compléter, on ajoute une fraction ayant pour numérateur le dernier reste, et pour dénominateur le diviseur. En voici un exemple :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -7x^3 & +10x^2 & +7x & -5 & x^2-5x+3 \\
-x^4 & +5x^3 & -3x^2 & & & \hline x^2-2x-3 \\
\hline
 & -2x^3 & +7x^2 & +7x & -5 & \\
 & +2x^3 & -10x^2 & +6x & & \\
\hline
 & & -3x^2 & +13x & -5 & \\
 & & +3x^2 & -15x & +9 & \\
\hline
 & & & -2x & +4 &
\end{array}$$

On a

$$\frac{x^4-7x^3+10x^2+7x-5}{x^2-5x+5}=x^2-2x-3-\frac{2x-4}{x^2-5x+3}.$$

Exemples.

68. QUESTION I. Diviser $x^m - a^m$ par $x - a$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^m \quad - a^m & x - a \\
\hline
\text{1}^{\text{er}} \text{ reste. } a\,x^{m-1} - a^m & x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1} \\
\text{2}^{\text{e}} \text{ reste. } a^2x^{m-2} - a^m & \\
\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots & \\
a^{m-1}x - a^m &
\end{array}
$$

Dernier reste. $a^m - a^m = 0$.

La loi des termes du quotient est facile à observer. Tous les termes sont positifs : les exposants de x vont en diminuant, tandis que ceux de a vont en augmentant. Le dernier reste étant nul, la division se fait exactement, quel que soit l'exposant m. On a donc

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

Ce résultat est d'un usage fréquent en algèbre ; il est bon de se le rappeler.

On pouvait d'ailleurs reconnaître *à priori* la possibilité de la division. En effet, on sait qu'en effectuant l'opération on trouvera un quotient entier du degré $m - 1$ par rapport à x et un reste du degré 0 par rapport à x, c'est-à-dire indépendant de x. Si donc on désigne par q le quotient et par r le reste, on aura

$$x^m - a^m = (x - a)q + r.$$

Cette égalité a lieu quelle que soit la valeur de x; or, donnons à x la valeur a; le premier membre devient nul; le premier terme du second membre devient aussi nul; car le facteur $x - a$ devenant nul, et le polynôme entier q pre-

nant une valeur finie, le produit devient nul; donc le reste r est nul; et il est identiquement nul, c'est-à-dire qu'il est nul quelle que soit x, puisqu'il ne contient pas cette lettre. Donc la division est possible.

69. QUESTION II. Diviser $x^m + a^m$ par $x - a$.

$$\begin{array}{r|l} x^m \quad + a^m & x - a \\ \hline \text{1}^{\text{er}} \text{ reste. } a\,x^{m-1} + a^m & x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1} \\ \text{2}^{\text{e}} \text{ reste. } a^2x^{m-2} + a^m & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a^{m-1}x + a^m & \end{array}$$

Dernier reste. $a^m + a^m = 2a^m$.

Le quotient est le même que dans l'exemple précédent; seulement le dernier reste, au lieu d'être nul, est égal à $2a^m$. La division est impossible. Le quotient est fractionnaire et l'on a

$$\frac{x^m + a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} \ldots + a^{m-1} + \frac{2a^m}{x - a}.$$

On peut aussi reconnaître *à priori* l'impossibilité de la division. Car, en appelant toujours q le quotient et r le reste, on a

$$x^m + a^m = (x - a)q + r;$$

d'où l'on déduit $2a^m = r$, en faisant $x = a$.

70. QUESTION III. Diviser $x^m - a^m$ par $x + a$.

Il faut ici distinguer deux cas, suivant que l'exposant m est pair ou impair. Supposons d'abord que m soit pair

$$\begin{array}{r|l} x^m \quad - a^m & x + a \\ \hline \text{1}^{\text{er}} \text{ reste. } -a\,x^{m-1} - a^m & x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots + a^{m-2}x - a^{m-1} \\ \text{2}^{\text{e}} \text{ reste. } +a^2x^{m-2} - a^m & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ -a^{m-1}x - a^m & \end{array}$$

D^{er} reste. $+a^m - a^m = 0$.

Les termes du quotient sont affectés alternativement du signe $+$ et du signe $-$. Le quotient, étant un polynôme complet du degré $m-1$, contient m termes, c'est-à-dire un nombre pair de termes, si m est pair; comme les signes alternent en commençant par le signe $+$, le dernier terme sera affecté du signe $-$, et par conséquent le dernier reste sera $+a^m-a^m$ ou zéro. Dans ce cas, la division est possible.

Si m est impair, le quotient, ayant un nombre impair de termes, se termine par le signe $+$, et le reste est $-a^m-a^m$ ou $-2a^m$. Dans ce cas, la division est impossible.

71. QUESTION IV. Diviser x^m+a^m par $x+a$.

Le quotient a la même forme que dans l'exemple précédent. Si m est impair, le dernier terme du quotient a le signe $+$ et l'on a pour reste $-a^m+a^m$, c'est-à-dire zéro; la division est possible. Mais si m est pair, le dernier terme du quotient a le signe $-$ et l'on a pour reste $+a^m+a^m$, c'est-à-dire $2a^m$; la division est impossible.

On peut rattacher ces deux derniers exemples aux deux précédents par des considérations sur les changements de signes. Nous savons que, lorsqu'on change le signe d'une lettre, les puissances impaires de cette lettre changent de signes, tandis que les puissances paires ne changent pas. La division effectuée au n° 68 prouve que l'on a

$$x^m-a^m=(x-a)(x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots+a^{m-1}).$$

Changeons le signe de a; nous aurons, si m est pair,

$$x^m-a^m=(x+a)(x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots-a^{m-1});$$

et, si m est impair,

$$x^m+a^m=(x+a)(x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots+a^{m-1}).$$

On en conclut que $x^m - a^m$ est divisible par $x+a$, quand m est pair, et $x^m + a^m$ par $x+a$, quand m est impair.

72. En résumant ce qui précède, on voit qu'une opération algébrique a pour but de composer un polynôme au moyen de deux ou de plusieurs polynômes donnés, d'après certaines règles déterminées.

D'un point de vue plus général, on peut considérer une opération algébrique comme ayant pour but de transformer une expression en une autre équivalente. On dit que deux expressions algébriques sont *équivalentes*, lorsqu'elles fournissent le même résultat, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres. Ainsi les deux expressions

$$(a+b)^2 \quad , \quad a^2+2ab+b^2,$$

qui indiquent deux séries d'opérations différentes à effectuer sur les quantités a et b, conduiront toujours au même résultat, quelles que soient les valeurs particulières attribuées aux lettres a et b ; ces deux expressions sont donc équivalentes, et l'on peut remplacer l'une par l'autre à volonté. Il est clair que les opérations algébriques transforment les expressions en d'autres équivalentes ; car, dans les raisonnements, les lettres représentent des quantités quelconques, et non telles ou telles valeurs particulières.

CHAPITRE V

FRACTIONS ALGÉBRIQUES

On appelle *fraction algébrique* le quotient de deux quantités quelconques, entières ou fractionnaires, positives ou

négatives. Les fractions algébriques jouissent des mêmes propriétés que les fractions arithmétiques.

73. THÉORÈME I. *On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou divisant ses deux termes par une même quantité.*

Soit la fraction algébrique $\frac{a}{b}$, dont nous désignerons par q la valeur. On a

$$\frac{a}{b}=q,$$

ou

$$a=bq.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette égalité par la même quantité c, il vient

$$ac=bqc=bcq,$$

d'où

$$\frac{ac}{bc}=q.$$

Donc

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}.$$

Réciproquement, si l'on divise les deux termes de la fraction $\frac{a}{b}$ par une même quantité c, on obtient une fraction égale

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}};$$

car, en multipliant par c les deux membres de cette dernière fraction, on reproduit la fraction proposée.

COROLLAIRE I. *On ne change pas la valeur d'une fraction en changeant les signes de ses deux termes;* car ceci revient à multiplier ses deux termes par -1.

COROLLAIRE II. *Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, on multiplie les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres.*

COROLLAIRE III. *Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, on divise ses deux termes successivement par leurs facteurs communs.*

COROLLAIRE IV. *On effectue l'addition ou la soustraction de plusieurs fractions en réduisant ces fractions au même dénominateur, et ajoutant ou retranchant les numérateurs.*

74. THÉORÈME II. *On multiplie deux fractions en multipliant numérateur par numérateur, dénominateur par dénominateur.*

Soient les deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ dont nous désignerons les valeurs par q et q'; on a

$$\frac{a}{b}=q \quad , \quad \frac{c}{d}=q',$$

ou

$$a=bq \quad , \quad c=dq'.$$

Si l'on multiplie ces deux égalités membre à membre, il vient

$$ac=bdqq';$$

d'où

$$\frac{ac}{bd}=qq'.$$

Ainsi

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

75. THÉORÈME III. *On divise une quantité par une fraction, en multipliant cette quantité par la fraction diviseur renversée.*

Soit à diviser la fraction $\frac{a}{b}$ par la fraction $\frac{c}{d}$. Je dis que

le quotient cherché est égal à

$$\frac{ad}{bc};$$

car, si l'on multiplie cette fraction par le diviseur, et si l'on simplifie, on reproduit le dividende.

76. Théorème IV. *Lorsqu'on a plusieurs fractions égales et qu'on ajoute les numérateurs et les dénominateurs, on forme une nouvelle fraction égale à chacune des fractions proposées.*

Soient les fractions égales

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\dots\dots$$

En désignant par q la valeur de chacune d'elles, on a

$$\frac{a}{b}=q \quad , \quad \frac{a'}{b'}=q \quad , \quad \frac{a''}{b''}=q, \dots\dots$$

ou

$$a=bq \quad , \quad a'=b'q \quad , \quad a''=b''q, \dots\dots$$

Si l'on ajoute ces diverses égalités membre à membre, il vient

$$a+a'+a''+\dots\dots=(b+b'+b''+\dots\dots)q,$$

d'où

$$\frac{a+a'+a''+\dots\dots}{b+b'+b''+\dots\dots}=q.$$

Corollaire I. *Lorsqu'on a plusieurs fractions égales, si, après avoir multiplié les deux termes de chacune d'elles par une même quantité, on ajoute les numérateurs et les dénominateurs, on forme une nouvelle fraction égale à chacune des fractions proposées.*

Soient les fractions égales

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\dots\dots$$

Si l'on multiplie les deux termes de la première par m,

ceux de la seconde par m',..., on obtient des fractions

$$\frac{ma}{mb} = \frac{m'a'}{m'b'} = \frac{m''a''}{m''b''} \cdots\cdots$$

égales respectivement aux fractions proposées, et par conséquent égales entre elles. Donc la nouvelle fraction

$$\frac{ma + m'a' + m''a'' + \cdots\cdots}{mb + m'b' + m''b'' + \cdots\cdots}$$

est aussi égale à chacune des fractions proposées.

COROLLAIRE II. *Lorsqu'on a plusieurs fractions égales, la fraction qui a pour numérateur la racine carrée de la somme des carrés des numérateurs, et pour dénominateur la racine carrée de la somme des carrés des dénominateurs, est égale à chacune des fractions proposées.*

En effet, les carrés des fractions égales

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \cdots\cdots$$

sont des fractions égales

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a''^2}{b''^2} = \cdots\cdots$$

En vertu du théorème précédent, on a

$$\frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots\cdots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + \cdots\cdots} = \frac{a^2}{b^2};$$

si l'on prend la racine carrée, il vient

$$\frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots\cdots}}{\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2 + \cdots\cdots}} = \frac{a}{b}.$$

Exemples.

1° Trouver les côtés d'un rectangle semblable à un rectangle donné, connaissant le périmètre.

Appelons a et b les deux côtés du rectangle donné, $2p$ le périmètre donné, x et y les deux côtés du rectangle cherché. On a les rapports égaux

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}.$$

En ajoutant les numérateurs et les dénominateurs, on forme la fraction égale

$$\frac{x+y}{a+b}=\frac{p}{a+b};$$

on a donc

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{p}{a+b};$$

d'où l'on déduit, en égalant chacune des deux premières fractions à la troisième,

$$x=\frac{pa}{a+b} \quad , \quad y=\frac{pb}{a+b}.$$

2° Trouver les côtés d'un rectangle semblable à un rectangle donné, connaissant la diagonale d.

Si l'on applique le corollaire II aux deux fractions égales

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b},$$

on forme la fraction égale

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On a donc

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

d'où l'on déduit

$$x=\frac{da}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad y=\frac{db}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

3° Trouver les côtés d'un rectangle semblable à un rec-

tangle donné, conduisant l'excès e du demi-périmètre sur la diagonale.

Les deux fractions égales

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$$

donnent naissance aux deux fractions égales

$$\frac{x+y}{a+b} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

qui, à leur tour, produisent la fraction égale

$$\frac{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{e}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On a donc

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{e}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}},$$

d'où l'on déduit les valeurs de x et de y.

Exercices sur le Livre Ier.

QUESTION I. Faire la multiplication

$$(a^2+ab+b^2)(a-b).$$

Réponse : Le produit est a^3-b^3.

QUESTION II. Faire la multiplication

$$(a^2-ab+b^2)(a+b).$$

Réponse : a^3+b^3.

QUESTION III. Faire la multiplication

$$(a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2\ldots+b^m)(a-b).$$

Réponse : $a^{m+1}-b^{m+1}$.

QUESTION IV. Faire la multiplication

$$(3a^2x-5b^3)(3a^2x+5b^3).$$

Réponse : $9a^4x^2-25b^6$.

QUESTION V. Faire la multiplication

$$(5ab + 3ac - c^2)(-5ab + 3ac - c^2).$$

Réponse : $-25a^2b^2 + 9a^2c^2 - 6ac^3 + c^4.$

QUESTION VI. Faire la division

$$\frac{2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4}{2a^2 - 3ab + 4b^2}.$$

Réponse : $a^2 - 5ab + 6b^2.$

QUESTION VII. Faire la division

$$\frac{4x^4 - 9a^2x^2 + 6a^3x - a^4}{2x^2 - 3ax + a^2}.$$

Réponse : $2x^2 + 3ax - a^2.$

QUESTION VIII. Calculer

$$\frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2}.$$

Réponse : $a^4 + a^2b^2 + b^4.$

QUESTION IX. Calculer

$$\frac{125a^3 - 8b^3}{5a - 2b}.$$

Réponse : $25a^2 + 10ab + 4b^2.$

QUESTION X. Multiplier le polynôme

$$(a-b)x^2 + a(a-b)x - ab^2$$

par

$$(a+b)x - a^2.$$

Réponse : $(a^2 - b^2)x^3 + ab(a-b)x^2 - (a^4 - a^3b + a^2b^2 + ab^3)x + a^3b^2.$

QUESTION XI. Simplifier l'expression

$$\frac{6ab}{3c-d}\left(\frac{c+d}{4} - \frac{d}{3}\right).$$

Réponse : $\frac{ab}{2}.$

QUESTION XII. Simplifier l'expression

$$\frac{a - \frac{a-b}{1+ab}}{1 + \frac{a(a-b)}{1+ab}}.$$

Réponse : $b.$

QUESTION XIII. Vérifier l'égalité

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)-(aa'+bb')^2=(ab'-ba')^2.$$

QUESTION XIV. Vérifier l'égalité

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2$$
$$=(ab'-ba')^2+(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2.$$

QUESTION XV. Reconnaître dans quel cas a^m-b^n est divisible par a^p-b^q.

Réponse. Il faut que les deux exposants m et n du dividende soient des équimultiples des deux exposants p et q du diviseur.

QUESTION XVI. Additionner les fractions

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)},$$
$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)},$$
$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)},$$
$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

Réponse. Les deux premières sommes sont égales à zéro, la troisième à l'unité, et la quatrième à $a+b+c$.

LIVRE II

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

CHAPITRE PREMIER

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

Définitions.

77. Une *identité* est une égalité évidente par elle-même, comme

$$a = a.$$

Une *équation* est une égalité dans laquelle entrent une ou plusieurs lettres désignant des quantités inconnues.

Résoudre des équations, c'est trouver les valeurs des inconnues qui satisfont aux équations proposées, c'est-à-dire qui rendent égaux les deux membres de chacune d'elles. Si l'on remplace les inconnues par leurs valeurs, les équations deviennent des identités.

On dit que deux équations sont *équivalentes*, lorsque toutes les valeurs des inconnues qui satisfont à l'une satisfont à l'autre et réciproquement.

Deux systèmes d'équations simultanées sont *équivalents*, lorsque toutes les valeurs des inconnues qui satisfont à l'un satisfont à l'autre et réciproquement.

Il est clair que, dans la résolution des équations, on peut remplacer une équation par une équation équivalente, un système d'équations par un système équivalent.

78. On appelle *degré* d'une équation la plus grande somme des exposants de toutes les inconnues dans un même terme. Ainsi les équations

$$5x - 7 = 24 + 2x,$$
$$7x + 6y = 40,$$

sont du premier degré. Les équations

$$4x^2 - 7y = 15,$$
$$5x - 3y = 2xy - 3,$$

sont du second degré ; dans cette dernière le terme $2xy$ est du second degré par rapport aux deux inconnues x et y.

On a classé les équations d'après leurs degrés. Nous nous occuperons d'abord des équations du premier degré.

Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.

79. La résolution d'une équation du premier degré à une inconnue dépend de principes très-simples dont nous avons déjà parlé dans l'introduction (n°s 7 et 8), et que nous allons exposer avec plus de détail.

THÉORÈME I. *Si aux deux membres d'une équation on ajoute une même quantité, ou si des deux membres on retranche une même quantité, on transforme cette équation en une autre équivalente.*

Appelons A et B les deux membres de l'équation proposée, qui sera ainsi représentée par

$$A = B,$$

et, afin de simplifier, supposons qu'elle ne contienne qu'une seule inconnue x. Une solution de cette équation est une valeur de x qui rend les deux expressions algébriques A et B égales entre elles. En ajoutant aux deux membres la même quantité C, nous formerons une nouvelle équation

$$A+C=B+C,$$

équivalente à la proposée. En effet, toute valeur de x, qui satisfait à la première équation, satisfait aussi à la seconde; car, si aux deux quantités égales A et B on ajoute la même quantité C, on obtient deux quantités égales $A+C$ et $B+C$. Réciproquement, toute valeur de x, qui satisfait à la seconde équation, satisfait aussi à la première ; car, si des deux quantités égales $A+C$ et $B+C$ on retranche la même quantité C, on obtient deux restes égaux A et B. Les deux équations, admettant les mêmes solutions, sont donc équivalentes.

On démontrerait de la même manière qu'en retranchant une même quantité C des deux membres de l'équation proposée, on forme une nouvelle équation équivalente

$$A-C=B-C.$$

80. Corollaire I. *Un terme quelconque d'une équation peut être écrit dans l'autre membre avec un signe contraire.*

Soit l'équation

$$6x-7=13+2x.$$

Si nous ajoutons 7 aux deux membres, l'équation devient

$$6x=13+2x+7;$$

le terme 7, qui avait le signe $-$ dans le premier membre, est passé dans le second membre avec le signe $+$. De même, si nous retranchons $2x$ des deux membres, l'équa-

tion devient

$$6x - 2x = 13 + 7;$$

le terme $2x$, qui avait le signe $+$ dans le second membre, est passé dans le premier avec le signe $-$.

81. Corollaire II. *On peut changer les signes de tous les termes d'une équation.*

Soit l'équation

$$10 - 3x = 5x - 6.$$

Si l'on fait passer dans le second membre tous les termes du premier et réciproquement, cette équation devient

$$-5x + 6 = -10 + 3x,$$

ou, en transposant les deux membres,

$$-10 + 3x = -5x + 6.$$

82. Théorème II. *Si l'on multiplie ou si l'on divise les deux membres d'une équation par une même quantité ne renfermant aucune inconnue, on transforme cette équation en une équation équivalente.*

En vertu du théorème précédent, nous pouvons supposer que l'on a fait passer tous les termes de l'équation dans le premier membre, de sorte que, si nous appelons X ce premier membre, l'équation sera représentée par

$$X = 0.$$

Une solution de cette équation est une valeur de x qui rend l'expression algébrique X égale à zéro. En multipliant tous les termes de cette équation par un nombre donné A, nous formerons une nouvelle équation

$$AX = 0,$$

équivalente à l'équation proposée. En effet, toute valeur de x qui satisfait à la première équation satisfait aussi à la seconde; car, si la quantité X est nulle, le produit de cette

quantité par le nombre A est aussi nul. Réciproquement, toute valeur de x qui satisfait à la seconde équation satisfait aussi à la première; car, si le produit AX est nul, il faut que l'un des deux facteurs le soit; mais le nombre donné A n'est pas nul; donc l'autre facteur X est nécessairement nul. Les deux équations, admettant les mêmes solutions, sont équivalentes.

De même, si l'on divise tous les termes par un même nombre A, on transforme l'équation proposée en une autre $\frac{X}{A}=0$ équivalente.

83. Remarque. Pour la rigueur du raisonnement, il importe que le multiplicateur A ne soit ni nul ni infini, et, pour cela, il faut que ce multiplicateur ne contienne pas l'inconnue. Supposons, par exemple, que l'on ait multiplié par $x-2$; l'équation

$$(x-2)X=0$$

admet bien toutes les solutions de l'équation $X=0$; mais elle admet en outre la solution $x=2$, qui annule le multiplicateur. Ainsi, la seconde équation n'est pas équivalente à la première, puisque, outre les solutions de la première, elle en admet encore une autre.

Ceci montre comment la multiplication par une quantité contenant l'inconnue introduit dans l'équation des solutions étrangères à la question. Quand une semblable opération sera nécessaire, on tiendra compte de cette circonstance, et parmi les solutions trouvées on distinguera celles qui satisfont réellement à l'équation proposée.

Au contraire, la division par une quantité contenant l'inconnue peut faire disparaître une ou plusieurs solutions de l'équation.

84. Corollaire. *On fait disparaître les dénominateurs d'une équation en multipliant tous les termes de l'équation par le plus petit multiple des dénominateurs.*

Soit l'équation

$$\frac{7x}{8}-\frac{3}{4}=\frac{1}{6}+\frac{5x}{12}.$$

Le plus petit multiple de tous les dénominateurs est 24. Si nous multiplions tous les termes de l'équation par 24, il est clair que les dénominateurs disparaissent; l'équation devient

$$21x-18=4+10x.$$

Pour faire cette multiplication, on multiplie le numérateur de chaque terme par le quotient du plus petit multiple par le dénominateur, et l'on ôte ce dénominateur; ainsi nous avons multiplié les numérateurs par les quotients 3, 6, 4, 2 du plus petit multiple 24 par les différents dénominateurs.

Si l'équation ne contient qu'un seul dénominateur, on multipliera par ce dénominateur.

Si l'on éprouve quelque difficulté à trouver le plus petit multiple, on multipliera par le produit des dénominateurs, qui est un multiple commun.

85. Nous pouvons maintenant énoncer la règle à suivre pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue : 1° *on chasse les dénominateurs, s'il y en a;* 2° *on fait passer les termes inconnus dans le premier membre, les termes connus dans le second membre, et l'on réduit les uns et les autres;* 3° *enfin on divise par le coefficient de l'inconnue.*

Reprenons l'équation

$$\frac{7x}{8}-\frac{3}{4}=\frac{1}{6}+\frac{5x}{12}.$$

Chassons d'abord les dénominateurs, cette équation devient

$$21x - 18 = 4 + 10x.$$

Ensuite, faisons passer les termes inconnus dans le premier membre, les termes connus dans le second, nous avons

$$21x - 10x = 4 + 18,$$

ou, en réduisant,

$$11x = 22.$$

Enfin, divisons par 11, il vient

$$x = \frac{22}{11} = 2.$$

On voit que la méthode consiste à transformer l'équation proposée en une série d'équation équivalentes, jusqu'à ce que l'on arrive à une équation de la forme $x = 2$. Mais cette dernière équation est évidemment satisfaite, si l'on donne à l'inconnue la valeur 2, et ne l'est par aucune autre valeur; donc l'équation proposée, qui est équivalente à cette dernière, admet la solution $x = 2$ et n'en admet aucune autre.

86. Considérons encore l'équation

$$\frac{x}{4} + 7 = \frac{2x}{3} - 3,$$

que nous avons déjà résolue (n° 9). Les deux dénominateurs étant premiers entre eux, leur plus petit multiple est leur produit; on multipliera donc par 12, ce qui donne

$$3x + 84 = 8x - 36.$$

On en déduit, par la transposition des termes,

$$3x - 8x = -36 - 84,$$

$$-5x = -120,$$

et, en changeant les signes des deux membres,

$$5x = 120,$$

d'où

$$x = \frac{120}{5} = 24.$$

Résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues.

87. Si l'on n'avait qu'une équation à deux inconnues x et y, l'équation admettrait une infinité de solutions; car on pourrait donner à x une valeur quelconque, et il en résulterait pour y une valeur correspondante. La question serait donc indéterminée.

Soit, par exemple, l'équation

$$5x - 3y = 9,$$

qui, résolue par rapport à y, devient

$$y = \frac{5x - 9}{3}.$$

Si l'on donne à x les valeurs 2, 3, 4,......, on trouve pour y les valeurs $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{11}{3}$...... Ainsi l'équation est satisfaite par les systèmes de valeurs

$$x = 2 \quad , \quad y = \frac{1}{3},$$
$$x = 3 \quad , \quad y = 2,$$
$$x = 4 \quad , \quad y = \frac{11}{3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Chacun d'eux constitue une solution de l'équation proposée et il y en a une infinité.

Les théorèmes I et II, et les transformations qui en résultent, sont vrais d'une manière générale et s'appliquent à une équation à plusieurs inconnues. Mais, alors, il faut

entendre par équations équivalentes deux équations qui admettent les mêmes solutions en nombre infini.

Si l'on a deux équations simultanées à deux inconnues, l'indétermination disparaît; on ne peut plus prendre x arbitrairement; car il faut que les valeurs de x et de y satisfassent à la fois aux deux équations.

88. Parmi les diverses méthodes employées pour effectuer cette résolution, l'une des meilleures et des plus usitées est celle dite de *substitution*. Nous l'avons déjà fait connaître dans l'introduction (nº 21). *Elle consiste à tirer de l'une des deux équations proposées la valeur de l'une des inconnues, comme si l'autre était connue, et à substituer cette valeur dans l'autre équation;* on obtient ainsi une équation à une inconnue que l'on résout par le procédé ordinaire.

Soient les deux équations simultanées

$$(1) \qquad 5x - 3y = 9,$$

$$(2) \qquad 7x + 11y = 43,$$

que nous numérotons, afin d'abréger le discours. De la première tirons la valeur de y, comme si la valeur de x était connue, nous avons

$$(3) \qquad y = \frac{5x-9}{3}.$$

Mettons cette expression à la place de y dans la seconde équation, nous obtiendrons une équation à une inconnue

$$(4) \qquad 7x + 11\,\frac{5x-9}{3} = 43.$$

Cette équation, résolue par le procédé habituel, donne $x=3$. En portant cette valeur dans l'expression (3) de y, on trouve $y=2$. Telles sont les valeurs des deux inconnues.

89. Il est aisé de voir que cette méthode remplace le système des deux équations proposées (1) et (2) par le système équivalent des deux équations (3) et (4). En effet, nous remarquons d'abord que l'équation (3) n'est autre que l'équation (1) transformée. Si donc, pour certaines valeurs de x et de y, les équations (1) et (2) sont satisfaites, l'équation (3), qui est la même que l'équation (1), le sera évidemment, et aussi l'équation (4), qui ne diffère de l'équation (2) qu'en ce que la quantité y a été remplacée par une quantité égale $\frac{5x-9}{3}$. Réciproquement, si, pour certaines valeurs de x et de y, les équations (3) et (4) sont satisfaites, l'équation (1), qui est la même que l'équation (3), le sera évidemment, et aussi l'équation (2), qui ne diffère de l'équation (4) qu'en ce que la quantité $\frac{5x-9}{3}$ a été remplacée par la quantité égale y. Les deux systèmes d'équations admettent donc les mêmes solutions, et par conséquent sont équivalents.

Mais l'équation (4), transformée, devient

$$x=3.$$

On peut donc remplacer le système proposé par le système équivalent

$$(3) \qquad y=\frac{5x-9}{3},$$

$$(5) \qquad x=3.$$

L'équation (5) n'est satisfaite que par la valeur $x=3$; pour satisfaire en même temps à l'équation (3), il faut donner à y la valeur 2. Ainsi, ce dernier système d'équations, et par conséquent le système proposé, admet la solution $x=3$, $y=2$, et n'en admet pas d'autre.

Exemples.

90. Dans la pratique, on profitera de toutes les circonstances qui permettent de simplifier le calcul.

1° Résoudre les deux équations

$$7y - 4x = 2,$$
$$5y + 4x = 22.$$

Les deux coefficients de x étant les mêmes, on tirera de la première équation la valeur de x,

$$x = \frac{7y - 2}{4},$$

que l'on substituera dans la seconde, ce qui donne

$$5y + 4\frac{7y - 2}{4} = 22.$$

Le dénominateur 4 disparaît de lui-même, et l'équation s'écrit plus simplement

$$5y + 7y - 2 = 22,$$

d'où l'on déduit

$$y = 2,$$

et, en portant cette valeur dans l'expression de x,

$$x = 3.$$

2° Résoudre les deux équations

$$17x - 10y = 11,$$
$$13x - 5y = 19.$$

Le coefficient de y, dans la première équation, étant un multiple du coefficient de y dans la seconde, on tirera de celle-ci la valeur de y,

$$y = \frac{13x - 19}{5},$$

que l'on substituera dans la première, ce qui donne

$$17x - 10\,\frac{13x - 19}{5} = 11,$$

ou, plus simplement,

$$17x - 2(13x - 19) = 11.$$

On en déduit $x = 3 \quad , \quad y = 4.$

3° Résoudre les équations

$$8x - 11y = 1,$$
$$19y - 12x = 11.$$

Les deux coefficients de x ayant un commun diviseur, de la première équation on tirera

$$x = \frac{1 + 11y}{8},$$

et l'on substituera dans la seconde, ce qui donne

$$19y - 12\frac{1 + 11y}{8} = 11.$$

Si l'on divise par 4 les deux termes de la fraction, cette équation se simplifie et devient

$$19y - 3\frac{1 + 11y}{2} = 11.$$

On en déduit $y = 5 \quad , \quad x = 7.$

Résolution de trois équations du premier degré à trois inconnues.

91. La marche à suivre est toujours la même : *de l'une des trois équations proposées on tirera la valeur de l'une des inconnues, comme si les valeurs des deux autres étaient connues, et l'on substituera cette valeur dans les deux autres équations.* On obtiendra ainsi deux équations à deux inconnues que l'on résoudra par le procédé indiqué précédemment.

Soient les trois équations

$$(1) \qquad 5y - 7x + 3z = 4,$$
$$(2) \qquad 4x + 9y - 5z = 30,$$
$$(3) \qquad 2x - 3y + 6z = 1.$$

Si de la première on tire

$$(4)\qquad z=\frac{4+7x-5y}{3},$$

et que l'on substitue dans les deux autres, on a les deux équations à deux inconnues

$$(5)\qquad 4x+9y-5\frac{4+7x-5y}{3}=30,$$

$$(6)\qquad 2x-3y+6\frac{4+7x-5y}{3}=1,$$

qui, simplifiées, deviennent

$$52y-23x=110,$$
$$13y-16x=7.$$

La question est ramenée ainsi à la résolution de deux équations à deux inconnues. Si de la dernière on tire

$$(7)\qquad y=\frac{7+16x}{13},$$

et que l'on substitue dans la précédente, on a l'équation à une inconnue

$$(8)\qquad 52\frac{7+16x}{13}-23x=110,$$

ou, plus simplement,

$$4(7+16x)-23x=110.$$

Cette dernière équation, résolue, donne $x=2$. Portant cette valeur dans l'équation (7), on en déduit $y=3$; portant ces deux valeurs dans l'équation (4), on a enfin $z=1$. Telles sont les valeurs des trois inconnues.

92. Il est aisé de voir que la méthode transforme le système des trois équations proposées en un système équivalent composé des trois équations (4), (5) et (6). En effet, l'équation (4) est la même que l'équation (1), et l'on déduit

les équations (5) et (6) des équations (2) et (3) en remplaçant z par une quantité égale, ou réciproquement.

Mais le système des deux équations (5) et (6) peut être remplacé à son tour par le système équivalent des deux équations (7) et (8), et cette dernière, résolue, devient $x=2$. Ainsi, le système des trois équations proposées est transformé en un système équivalent

$$(4) \qquad z=\frac{4+7x-5y}{3},$$

$$(7) \qquad y=\frac{7+16x}{13},$$

$$(9) \qquad x=2.$$

La dernière équation n'est satisfaite que par la valeur $x=2$; pour satisfaire en même temps à la seconde, il faut donner à y la valeur 3; pour satisfaire en même temps à la première, il faut donner à z la valeur 1. Ainsi, ce dernier système, et par conséquent le système proposé, admet la solution

$$x=2 \quad , \quad y=3 \quad , \quad z=1,$$

et n'en admet pas d'autre.

Exemples.

93. Dans chaque cas particulier, on dirigera les calculs de manière à les simplifier autant que possible.

1° Résoudre les trois équations

$$(1) \qquad x+y+z=6,$$

$$(2) \qquad x+2y+3z=10,$$

$$(3) \qquad x+4y+9z=20.$$

Si de la première on tire

$$(4) \qquad x=6-y-z,$$

et que l'on substitue dans les deux autres, on a les deux équations à deux inconnues

$$6 - y - z + 2y + 3z = 10,$$
$$6 - y - z + 4y + 9z = 20,$$

qui, simplifiées, deviennent

$$(5) \qquad y + 2z = 4,$$
$$(6) \qquad 3y + 8z = 14.$$

On résoudra ces deux équations en tirant de la première

$$(7) \qquad y = 4 - 2z,$$

et, substituant dans la seconde, ce qui donne

$$3(4 - 2z) + 8z = 14,$$

d'où

$$(8) \qquad z = 1.$$

Le système des trois équations proposées est équivalent au système des trois équations (4), (5), (6) et par suite au système des trois équations (4), (7), (8). Portant la valeur de z dans l'équation (7), on trouve $y = 2$; portant les valeurs de z et y dans l'équation (4), on a $x = 3$.

2° Résoudre les trois équations

$$(1) \qquad 5x - 7y = 2,$$
$$(2) \qquad 4y - 3z = 1,$$
$$(3) \qquad 2x - z = 7.$$

Les trois inconnues n'entrent pas dans chacune des trois équations et le calcul est plus simple. Si de la troisième équation on tire

$$(4) \qquad z = 2x - 7,$$

et que l'on substitue dans la seconde, on a

$$4y - 3(2x - 7) = 1,$$

plus simplement

$$6x - 4y = 20,$$

ou

$$(5) \qquad 3x - 2y = 10.$$

Cette équation, jointe à la première qui ne contient pas z, forme un système de deux équations à deux inconnues

$$5x - 7y = 2,$$
$$3x - 2y = 10.$$

Si de la dernière on tire

$$(6) \qquad y = \frac{3x - 10}{2},$$

et que l'on substitue dans la précédente, on a l'équation à une inconnue

$$(7) \qquad 5x - 7\frac{3x - 10}{2} = 2.$$

Le système des trois équations proposées est équivalent au système des trois équations (1), (4), (5) et, par suite, au système des trois équations (4), (6), (7). On en déduit

$$x = 6 \quad , \quad y = 4 \quad , \quad z = 5.$$

3° Résoudre les trois équations

$$(1) \qquad 8x - 3y = 47,$$
$$(2) \qquad 3x + 2y - 2z = 19,$$
$$(3) \qquad 2x + 3z - 3y = 17.$$

Si de la seconde équation on tire

$$(4) \qquad z = \frac{3x + 2y - 19}{2},$$

et que l'on substitue dans la troisième, on a l'équation

$$2x + 3\frac{3x + 2y - 19}{2} - 3y = 17,$$

qui, simplifiée, se réduit à

$$(5) \qquad 13x = 91.$$

Le système des trois équations proposées est équivalent au système des trois équations (1), (4), (5). Cette dernière donne immédiatement $x = 7$. La valeur de x étant connue, on tirera de la première équation $y = 3$; en portant ces deux valeurs dans l'équation (4), on aura $z = 4$.

Résolution d'un nombre quelconque d'équations du premier degré à un pareil nombre d'inconnues.

94. La méthode de substitution, que nous avons employée pour deux et pour trois équations, s'applique sans difficulté à un plus grand nombre d'équations. Supposons que l'on ait à résoudre n équations à n inconnues. De la première équation on tirera la valeur de la première inconnue que l'on substituera dans toutes les autres équations, ce qui donnera $n-1$ équations à $n-1$ inconnues, qui, jointes à la première, formeront un système équivalent au système proposé. De la seconde équation de ce second système, on tirera de même la valeur de la seconde inconnue que l'on substituera dans toutes les suivantes; le système proposé sera transformé en un système équivalent, composé d'une équation à n inconnues, d'une à $n-1$ inconnues, et de $n-2$ équations à $n-2$ inconnues. On continuera de la même manière jusqu'à ce que l'on arrive à une équation à une inconnue, et alors le système des n équations sera transformé en un système équivalent de n équations, contenant, la première les n inconnues, la seconde $n-1$, la troisième $n-2, \ldots$, enfin la dernière une seule inconnue. De cette équation, on déduira la valeur de la dernière inconnue, et en remontant de proche en proche, on trouvera successivement les valeurs de toutes les inconnues.

Appliquons cette méthode à la résolution des quatre équations à quatre inconnues

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} x-2y+z-3u=1, \\ 7y-2x-4z+12u=4, \\ 3x+y-3z+u=9, \\ 2z-x-y+7u=6. \end{array}\right.$$

De la première équation tirons la valeur de x, substituons-la dans toutes les autres et simplifions; nous transformons le système des équations proposées en un autre équivalent

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2y - z + 3u, \\ 3y - 2z + 6u = 6, \\ 7y - 6z + 10u = 6, \\ 3z - 3y + 4u = 7. \end{array}\right.$$

De la seconde équation de ce second système tirons la valeur de y et substituons-la dans les deux suivantes, nous obtenons le troisième système

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2y - z + 3u, \\ y = \dfrac{6 + 2z - 6u}{3}, \\ z + 3u = 6, \\ z + 10u = 13, \end{array}\right.$$

équivalent au second, et par conséquent au premier.

Si de la troisième équation de ce troisième système nous tirons la valeur de z pour la substituer dans la dernière équation, nous arrivons enfin au système

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2y - z + 3u, \\ y = \dfrac{6 + 2z - 6u}{3}, \\ z = 6 - 3u, \\ u = 1. \end{array}\right.$$

équivalent à chacun des précédents.

En remontant de proche en proche, on trouve

$$u = 1 \quad , \quad z = 3 \quad , \quad y = 2 \quad , \quad x = 5.$$

Exemples.

95. Dans un grand nombre de cas, on abrége beaucoup

les calculs en dirigeant convenablement les substitutions.

1° Résoudre les cinq équations à cinq inconnues

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} y+2x=4, \\ z+3y=9, \\ u+4z=16, \\ v+5u=25, \\ x+y+z+u+v=15. \end{array}\right.$$

On tire, de la première

$$(2)\qquad y=4-2x;$$

de la seconde, en y remplaçant y par sa valeur,

$$(3)\qquad z=6x-3;$$

de la troisième, en y remplaçant z par sa valeur,

$$(4)\qquad u=28-24x;$$

de la quatrième, en y remplaçant u par sa valeur,

$$(5)\qquad v=120x-115.$$

Les quatre inconnues y, z, u, v sont exprimées ainsi au moyen de x; si l'on substitue ces valeurs dans la cinquième équation, on obtient une équation à une seule inconnue

$$(6)\qquad 101x=101,$$

et le système des cinq équations proposées est équivalent au système des cinq équations (2), (3), (4), (5), (6). L'équation (6) donne $x=1$; en portant cette valeur dans les équations précédentes, on trouve

$$y=2\quad,\quad z=3\quad,\quad u=4\quad,\quad v=5.$$

2° Résoudre les quatre équations à quatre inconnues

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x+5z=29, \\ 3y-2x+u=5, \\ 4u-3z=13, \\ 9x-7y-2u=8. \end{array}\right.$$

Si de la première et de la troisième on tire

$$x = 29 - 5z, \tag{2}$$

$$u = \frac{13 + 3z}{4}, \tag{3}$$

et que l'on substitue ces valeurs dans les deux autres, on a deux équations à deux inconnues

$$12y + 43z = 239, \tag{4}$$

$$14y + 93z = 493. \tag{5}$$

En tirant de la première de ces deux équations

$$y = \frac{239 - 43z}{12}, \tag{6}$$

et substituant dans la seconde, on obtient une équation à une inconnue

$$257z = 1285. \tag{7}$$

Le système des quatre équations proposées est équivalent au système des quatre équations (2), (3), (4), (5) et par suite au système des quatre équations (2), (3), (6), (7). De l'équation (7) on déduit $z = 5$; portant cette valeur dans les équations précédentes, on trouve $y = 2$, $u = 7$, $x = 4$.

Autre procédé d'élimination.

96. L'élimination d'une inconnue entre deux équations a pour but de trouver un système de deux équations équivalent au système des deux équations proposées et dont l'une ne contient plus cette inconnue. Nous avons effectué jusqu'à présent l'élimination par substitution; voici une autre méthode que l'on emploie quelquefois de préférence.

Considérons deux équations

$$A = B, \tag{1}$$

$$C = D, \tag{2}$$

à deux ou à un plus grand nombre d'inconnues; si on les ajoute membre à membre, on forme une nouvelle équation

$$A + C = B + D,$$

qui peut remplacer l'une des deux équations proposées, par exemple la seconde, c'est-à-dire que le système des deux équations proposées est équivalent au système des deux équations

$$(1) \qquad A = B,$$
$$(3) \qquad A + C = B + D.$$

En effet, si, pour certaines valeurs des inconnues, les équations (1) et (2) sont satisfaites, l'équation (3) le sera aussi; car la somme des deux quantités A et C sera égale à celle des deux quantités respectivement égales B et D. Réciproquement, si les deux équations (1) et (3) sont satisfaites, l'équation (2) le sera aussi; car, si des quantités égales $A + C$, $B + D$ on retranche les quantités égales A et B, on a des restes égaux C et D. Les deux systèmes d'équations, admettant les mêmes solutions, sont équivalents.

On démontrera de la même manière que si l'on retranche les deux équations proposées membre à membre, on obtient un système équivalent

$$(1) \qquad A = B,$$
$$(4) \qquad A - C = B - D.$$

97. Pour éliminer une inconnue entre deux équations, il suffit de multiplier tous les termes de chacune d'elles par un nombre tel que les coefficients de cette inconnue deviennent égaux, puis de retrancher ou d'ajouter les deux équations membre à membre, suivant que les deux coefficients ont le même signe ou des signes contraires.

Proposons-nous, par exemple, d'éliminer y entre les deux équations

$$(1) \qquad 11x - 3y = 10,$$
$$(2) \qquad 9x + 5y = 38.$$

Si l'on multiplie les termes de la première par 5, ceux de la seconde par 3, ces équations deviennent

$$55x - 15y = 50,$$
$$27x + 15y = 114;$$

en les ajoutant membre à membre, on obtient l'équation à une inconnue

$$(3) \qquad 82x = 164.$$

D'après ce que nous avons dit, le système des deux équations proposées est équivalent au système des deux équations (1) et (3). De l'équation (3) on déduit $x=2$; portant cette valeur dans l'équation (1), on trouve $y=4$.

Nous avons multiplié les termes de la première équation par le coefficient de y dans la seconde, et ceux de la seconde par le coefficient de y dans la première; après cette opération, l'inconnue y a dans les deux équations un coefficient égal au produit des deux coefficients primitifs. Quand ces deux coefficients ne sont pas premiers entre eux, il est plus simple de les rendre égaux à leur plus petit multiple.

Soient les deux équations

$$4y + 7x = 27,$$
$$6y - 13x = 17.$$

Les deux coefficients de y ont pour plus petit multiple 12; pour éliminer y, on multipliera les termes de la première équation par 3, ceux de la seconde par 2; les deux équations deviennent

$$12y + 21x = 81,$$
$$12y - 26x = 34;$$

en les retranchant membre à membre, on obtient l'équation

$$47x = 47,$$

d'où

$$x = 1.$$

En portant cette valeur de x dans la première équation, on y trouve $y = 5$.

98. Le principe dont nous nous sommes servis peut être étendu à un plus grand nombre d'équations. Considérons trois équations

$$(1) \qquad X_1 = 0 \quad , \quad X_2 = 0 \quad , \quad X_3 = 0,$$

à trois ou à un plus grand nombre d'inconnues. L'équation

$$(2) \qquad A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 = 0,$$

que l'on obtient en ajoutant ces équations membre à membre, après avoir multiplié leurs termes par des quantités A_1, A_2, A_3, finies et ne renfermant pas les inconnues, peut remplacer l'une de celles des équations proposées dont les termes ont été multipliés par une quantité différente de zéro, c'est-à-dire que l'équation nouvelle avec les deux autres équations forme un système équivalent au système proposé. Supposons, par exemple, que la quantité A_3 soit différente de zéro; le système des trois équations proposées sera équivalent au système des trois équations

$$(3) \quad X_1 = 0 \ , \ X_2 = 0 \ , \ A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 = 0.$$

En effet, tout système de valeurs des inconnues qui satisfait aux équations (1), annulant séparément les trois polynômes X_1, X_2, X_3, satisfait à l'équation (2) et par conséquent au système des équations (3). Réciproquement, tout système de valeurs des inconnues qui satisfait aux équations (3), annulant X_1 et X_2 ainsi que la somme

$A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3$, annule A_3X_3 et par suite X_3, puisque le multiplicateur A_3 est différent de zéro. Ainsi les deux systèmes d'équations sont équivalents.

Exemples.

1° Trouver deux nombres, connaissant leur somme a et leur différence b.

On a les deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x + y = a, \\ x - y = b. \end{cases}$$

En les ajoutant ou les retranchant membre à membre, on en déduit les deux équations

$$(2) \qquad \begin{cases} 2x = a + b, \\ 2y = a - b. \end{cases}$$

En ajoutant ou retranchant membre à membre ces deux dernières équations, on retrouve les premières; d'où l'on conclut que le système des équations (1) est équivalent au système des équations (2) et, par conséquent, admet la solution

$$(3) \qquad x = \frac{a+b}{2}, \qquad y = \frac{a-b}{2},$$

et n'en admet pas d'autre.

2° Trouver quatre nombres, connaissant les sommes de ces quatre nombres trois à trois.

On a les quatre équations

$$(1) \qquad \begin{cases} y + z + u = a, \\ z + u + x = b, \\ u + x + y = c, \\ x + y + z = d, \end{cases}$$

à quatre inconnues. En les ajoutant membre à membre, on

en déduit

$$3(x+y+z+u)=a+b+c+d,$$

ou

$$(2)\qquad x+y+z+u=\frac{a+b+c+d}{3}=m,$$

en désignant par m le second membre qui est connu. Si maintenant de l'équation (2) on retranche chacune des équations (1) membre à membre, on trouve

$$(3)\qquad x=m-a\ ,\ y=m-b\ ,\ z=m-c\ ,\ u=m-d.$$

Tout système de valeurs des inconnues, qui satisfait aux équations proposées, satisfait aux équations (2) et (3) qui s'en déduisent par addition ou soustraction ; ces valeurs ne peuvent donc être que celles qui sont données par les formules (3) ; on vérifiera qu'elles satisfont bien aux équations proposées.

3° Trouver quatre nombres, connaissant l'excès de la somme de trois quelconques d'entre eux sur le quatrième.

On a les quatre équations à quatre inconnues

$$(1)\qquad \begin{cases} y+z+u-x=a,\\ z+u+x-y=b,\\ u+x+y-z=c,\\ x+y+z-u=d. \end{cases}$$

En procédant comme précédemment, on en déduit

$$(2)\qquad x+y+z+u=\frac{a+b+c+d}{2}=m,$$

et, par suite,

$$(3)\qquad x=\frac{m-a}{2}\ ,\ y=\frac{m-b}{2}\ ,\ z=\frac{m-c}{2}\ ,\ u=\frac{m-d}{2}.$$

4° Résoudre les trois équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x+2y+3z=a,\\ y+2z+3x=b,\\ z+2x+3y=c. \end{cases}$$

En les ajoutant membre à membre, on en déduit

$$(2)\qquad x+y+z=\frac{a+b+c}{6}=m.$$

D'autre part, si l'on retranche membre à membre la première de la seconde, celle-ci de la troisième et cette dernière de la première, on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2x-y-z=b-a, \\ 2y-z-x=c-b, \\ 2z-x-y=a-c. \end{array}\right.$$

En ajoutant membre à membre chacune des équations (3) à l'équation (2), on trouve enfin

$$(4)\quad x=\frac{m+b-a}{3},\quad y=\frac{m+c-b}{3},\quad z=\frac{m+a-c}{3}.$$

Tout système de valeurs qui satisfait aux équations proposées satisfait aussi aux équations (2), (3), (4) qui s'en déduisent par le mode de combinaison habituel; ces valeurs ne peuvent donc être que celles qui sont données par les formules (4); on vérifiera qu'elles satisfont bien aux équations proposées.

CHAPITRE II

UTILITÉ DES QUANTITÉS NÉGATIVES DANS LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES.

99. Nous avons dit (n° 33) qu'un polynôme indique une série d'additions et de soustractions à effectuer, et nous avons appelé quantités *positives* les quantités à ajouter,

quantités *négatives* les quantités à retrancher. Un polynôme se résumant finalement en une quantité à ajouter ou à retrancher, il a dans le premier cas une valeur positive, dans le second cas une valeur négative.

Nous avons généralisé les opérations algébriques de manière à les appliquer indistinctement aux polynômes, soit positifs, soit négatifs, et nous avons étendu les mêmes règles ou définitions aux termes considérés isolément, ce qui permet dans les calculs de remplacer les polynômes par leurs valeurs. Il est résulté de là un perfectionnement notable dans le mécanisme du calcul et dans la transformation des expressions algébriques, en ce sens que toute restriction a disparu, et qu'il n'y a pas à s'inquiéter de savoir si les valeurs des polynômes sur lesquels on opère sont positives ou négatives.

La considération des quantités positives ou négatives n'est pas moins utile dans la résolution des problèmes. Elle permet, comme nous le verrons, de comprendre dans les mêmes équations, et par suite dans les mêmes formules, les différents cas d'une même question.

100. PROBLÈME I. *Un mobile, partant d'un point donné, parcourt sur une droite successivement plusieurs longueurs données. On demande à quelle distance il se trouve finalement du point de départ.*

La question présente plusieurs cas différents, suivant que chacune des longueurs est parcourue dans un sens ou dans l'autre. Lorsque toutes les longueurs sont parcourues dans le même sens à la suite les unes des autres, elles s'ajoutent évidemment; si donc on appelle a, b, c, d ces diverses longueurs, que, pour préciser, nous supposerons au nombre

de quatre, et x la distance à laquelle le mobile se trouve finalement du point de départ, on aura la formule

$$x = a + b + c + d.$$

Grâce à la considération des quantités positives ou négatives, cette formule peut être étendue à tous les autres cas. En effet, soit O le point de départ du mobile sur la droite donnée ; prenons vers la gauche un point K situé à une distance arbitraire m du point O, mais assez grande pour que le mobile reste toujours à sa droite, et proposons-nous d'évaluer à chaque instant la distance du mobile à ce point fixe K.



Au moment du départ, le mobile est en O, à la distance m du point K ; il parcourt ensuite diverses longueurs OA, AB, BC, CD, dans un sens ou dans l'autre ; il est clair que chaque longueur parcourue de gauche à droite, l'éloignant du point K, devra être ajoutée, et par conséquent regardée comme positive, et que chaque longueur parcourue en sens contraire, c'est-à-dire de droite à gauche, le rapprochant du point K, devra être retranchée, et par conséquent regardée comme négative. Si donc on représente par les lettres a, b, c, d les longueurs données, affectées chacune du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est parcourue de gauche à droite ou en sens contraire, la distance finale du mobile au point K sera exprimée par la formule

$$m + a + b + c + d.$$

Supposons maintenant que le mobile aille directement du point O au point D, et désignons par x la longueur OD, affectée du signe + ou du signe — suivant qu'elle est par-

courue de gauche à droite ou de droite à gauche, la distance finale du mobile au point K sera exprimée aussi par $m+x$. On aura donc

$$m+x=m+a+b+c+d.$$

Si l'on retranche la quantité m de part et d'autre, il vient

$$x=a+b+c+d. \tag{1}$$

Lorsque le polynôme aura une valeur positive, la distance x, devant être ajoutée à m, sera comptée à partir du point O vers la droite; lorsque le polynôme aura une valeur négative, la distance x, devant être retranchée de m, sera comptée à partir du point O vers la gauche.

Supposons, par exemple, que le mobile parcoure une première longueur OA de 5 mètres de gauche à droite, une seconde AB de 3 mètres en sens contraire, une troisième BC de 4 mètres de gauche à droite, et enfin une quatrième CD de 8 mètres en sens inverse; affectant chacune d'elles du signe convenable, on fera

$$a=+5 \quad , \quad b=-3 \quad , \quad c=+4 \quad , \quad d=-8.$$

La formule générale (1) indique qu'il faut faire la somme algébrique des quantités représentées par les lettres a, b, c, d; or on sait que l'addition algébrique consiste à écrire les quantités avec leurs signes; on aura donc, en remplaçant les lettres par leurs valeurs,

$$x=5-3+4-8=-2.$$

Cette valeur -2 signifie qu'il faut de la distance m retrancher 2 mètres; ainsi le point d'arrivée D est à 2 mètres du point de départ O vers la gauche.

101. Problème II. *On connaît l'âge d'un père et celui de son fils, et l'on demande à quelle époque l'âge du père sera ou a été triple de l'âge du fils.*

Appelons a l'âge actuel du père, b celui du fils, le rapport actuel de l'âge du père à celui du fils est $\frac{a}{b}$. On sait que, lorsqu'on augmente d'une même quantité les deux termes d'une fraction plus grande que l'unité, la fraction diminue; donc, si le rapport des âges est actuellement plus grand que 3, il arrivera un moment où il sera égal à 3; mais s'il est actuellement plus petit que 3, il a été autrefois égal à 3. Ainsi la question présente deux cas bien distincts, suivant que l'époque cherchée est dans l'avenir ou dans le passé. Dans le premier cas, il faudra ajouter aux âges actuels un certain nombre d'années; dans le second cas, en retrancher un certain nombre d'années. Si donc on désigne par la lettre x ce nombre d'années, affecté du signe + ou du signe —, suivant qu'il doit être ajouté ou retranché, l'équation

$$\frac{a+x}{b+x}=3$$

conviendra à tous les cas de la question. On en déduit la formule

$$x=\frac{a-3b}{2}.$$

A l'inspection de cette formule, on reconnait en effet que, si a est plus grand que $3b$, c'est-à-dire si l'âge du père est actuellement plus grand que trois fois celui du fils, l'inconnue x a une valeur positive, et que, dans le cas contraire, elle a une valeur négative.

Pour montrer une application de cette formule, supposons que le père ait 40 ans, le fils 10 (n° 12). En remplaçant a et b par leurs valeurs, on trouve

$$x=+5.$$

Cette valeur positive indique qu'il faut ajouter 5 ans aux âges actuels ; ainsi l'âge du père sera dans 5 ans triple de l'âge du fils. Et, en effet, à cette époque le père aura 45 ans et le fils 15, et 45 est bien le triple de 15.

Supposons maintenant que le père ait actuellement 45 ans, le fils 17. La formule donne

$$x = -3.$$

Cette valeur négative indique qu'il faut retrancher 3 ans des âges actuels; ainsi l'âge du père était il y a 3 ans triple de l'âge du fils.

102. Remarque. Nous voyons par ce qui précède que certaines espèces de grandeurs sont susceptibles d'être comptées dans deux sens, inverses l'un de l'autre. Ainsi, partant d'un point quelconque, on peut marcher sur une ligne dans un sens ou dans le sens opposé. On regardera comme positives les longueurs parcourues dans un sens convenu, par exemple de gauche à droite, si la ligne est horizontale, celles portées en sens inverse comme négatives.

On comprend bien la signification de ce double signe affectant les longueurs, si l'on imagine un point K très-éloigné vers la gauche (voyez n° 100), d'où l'on suppose pour un instant que l'on compte les distances : la distance du mobile à cette origine fictive augmentera si la longueur est parcourue de gauche à droite, et diminuera si elle est parcourue en sens contraire.

Le temps présente aussi deux sens opposés. Compté à partir d'un instant quelconque, si l'on en descend le cours, c'est-à-dire si l'on marche vers l'avenir, il sera naturellement affecté du signe +; au contraire, si l'on remonte vers le passé, il sera affecté du signe —. En effet, que l'on ima-

gine une origine fictive très-reculée, le temps, compté à partir de cette origine fictive, sera augmenté dans le premier cas, diminué dans le second cas. Par exemple, dans les calculs qui se rapportent à notre siècle, les astronomes ont coutume de compter le temps à partir du 1[er] janvier 1800; si l'on marche de 10 ans en avant ou en arrière, on aura un temps représenté par $+10$ ou par -10; et en effet, en rapportant à l'origine ordinaire qui est beaucoup plus reculée, savoir le commencement de l'ère chrétienne, on aurait

$$1800+10 \quad \text{ou} \quad 1800-10.$$

Il en est de même des degrés de température marqués par le thermomètre. Les Français prennent pour origine la température de la glace fondante; c'est là qu'est marqué le zéro. Au-dessus, les degrés sont positifs, au-dessous négatifs. Et, en effet, que l'on imagine une température plus basse que toutes celles que l'on aura à considérer, et que l'on compte les degrés à partir de ce point; à la glace fondante correspondra un certain nombre de degrés m; la température $+5$, ou 5 degrés au-dessus de 0, signifie $m+5$; la température -5, ou 5 degrés au-dessous de 0, signifie $m-5$.

108. Problème III. *Un mobile, se mouvant uniformément sur une droite avec une vitesse donnée, passe au point O à un certain instant. Déterminer sa position à un instant quelconque.*

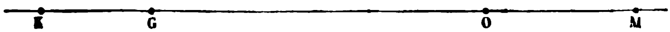
En mécanique, on évalue ordinairement les longueurs en mètres, les temps en secondes, et l'on appelle vitesse l'espace parcouru par le mobile en une seconde.

Supposons d'abord que le mobile marche de gauche à

droite avec une vitesse a, et que l'on demande sa position t secondes après qu'il a passé au point O. Le mobile parcourant a mètres par seconde, parcourt $2a$ mètres en 2 secondes, $3a$ mètres en 3 secondes, en général at mètres en t secondes; si donc on appelle x la distance parcourue dans le temps t, on aura l'équation

$$x = at,$$

et cette distance, portée à partir du point O vers la droite, nous donnera la position M du mobile à l'instant considéré.



Cette formule est générale et convient à tous les cas de la question, si l'on affecte chaque quantité du signe convenable. On demande la position M du mobile, un temps quelconque *après* ou *avant* le moment où le mobile passe au point O; désignons par t ce temps, considéré comme positif dans le premier cas, comme négatif dans le second cas, et par x la distance OM, affectée du signe + ou du signe —, suivant que le point M est à droite ou à gauche du point O. La vitesse a sera elle-même positive ou négative, suivant que le mobile marche de gauche à droite ou en sens contraire; car, si l'on imagine les distances comptées à partir d'un point K très-éloigné vers la gauche, l'espace parcouru en une seconde, ou la vitesse, devra être ajouté dans le premier cas, retranché dans le second cas. Concevons maintenant que l'on compte le temps à partir d'une époque suffisamment reculée, et soit G la position du mobile à cet instant (si la vitesse est positive, le point G est très-loin vers la gauche; si elle est négative, il est au contraire très-loin vers la droite).

Nous pouvons toujours supposer le point K, origine fictive des distances, situé à gauche du point G, et nous appellerons m la distance KG. Désignons par α le temps qui s'écoule depuis l'origine fictive des temps, c'est-à-dire depuis le moment où le mobile est en G, jusqu'au moment où il passe au point O; l'espace GO, parcouru pendant ce temps et affecté du signe convenable, est $a\alpha$. Le temps qui s'écoule depuis cette même origine jusqu'au moment où le mobile vient en M, sera représenté par $\alpha + t$, et l'espace parcouru GM, affecté du signe convenable, par $a(\alpha + t)$. Supposons que le mobile parte du point G, et parcoure successivement les chemins $a\alpha$ et x, ce qui l'amène au point O, puis au point M, il sera finalement à une distance du point K marquée par

$$m + a\alpha + x.$$

Mais, le mobile arrivant au point M après le temps $\alpha + t$, et par conséquent après avoir parcouru l'espace $a(\alpha + t)$ à partir du point G, sa distance au point K est exprimée aussi par $m + a(\alpha + t)$; on a donc l'équation générale

$$m + a\alpha + x = m + a(\alpha + t),$$

ou, plus simplement,

$$x = at.$$

Voici quelques applications de cette formule :

1° Le mobile se meut de gauche à droite avec une vitesse de 10 mètres par seconde; on demande où il sera 6 secondes après avoir passé au point O. On fera $a = +10$, $t = +6$, ce qui donne $x = +60$. Ainsi le mobile sera à 60 mètres à droite du point O, ce qui est évident *à priori*, puisque le mobile marche vers la droite.

2° Le mobile se meut de gauche à droite avec une vitesse de 10 mètres par seconde; on demande où il était 6 secondes

avant d'arriver au point O. On fera $a = +10$, $t = -6$, d'où $x = -60$. Ainsi le mobile était à 60 mètres à gauche du point O, ce qui est évident, puisque le mobile vient de la gauche.

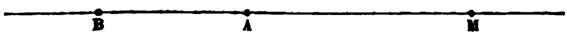
3° Le mobile se meut de droite à gauche avec une vitesse de 10 mètres par seconde ; on demande où il sera 6 secondes après avoir passé au point O. On fera $a = -10$, $t = +6$, ce qui donne $x = -60$. Ainsi le mobile sera à 60 mètres à gauche du point O ; ce qui est évident, puisque le mobile marche vers la gauche.

4° Le mobile se meut de droite à gauche avec une vitesse de 10 mètres par seconde ; on demande où il était 6 secondes avant d'arriver au point O. On fera $a = -10$, $t = -6$; ce qui donne $x = +60$. Ainsi le mobile était à 60 mètres à droite du point O, ce qui est évident, puisque le mobile vient de la droite.

104. Problème IV. *Deux mobiles, se mouvant uniformément sur une même droite, passent au même instant, le premier au point* A, *le second au point* B. *On connaît la vitesse de chacun d'eux. Trouver la position du point de rencontre de ces deux mobiles.*

Cette question présente plusieurs cas différents, suivant que les mobiles se meuvent dans un sens ou dans l'autre, et que la vitesse du premier est plus grande ou moins grande que celle du second.

Supposons d'abord que les deux mobiles marchent tous deux de gauche à droite, et que le premier, celui qui est à droite au point A, aille moins vite que le second qui est en B.



La rencontre aura évidemment lieu en un certain point M

à droite du point A. Appelons a la vitesse du premier mobile, b celle du second, d la distance BA, t le temps inconnu après lequel aura lieu la rencontre, x et y les distances AM et BM des points A et B au point de rencontre M. Le premier mobile, parcourant a mètres par seconde, parcourra at mètres en t secondes; on a donc l'équation

$$(1) \qquad x = at;$$

de même, le second mobile, parcourant b mètres par seconde, parcourra bt mètres en t secondes, et l'on aura

$$(2) \qquad y = bt.$$

Mais la distance BM ou y devant être égale à BA plus AM, on a la troisième équation

$$(3) \qquad y = d + x.$$

On a ainsi trois équations à trois inconnues t, x, y que l'on résoudra en substituant dans la troisième les valeurs de x et de y données par les deux autres. On en déduit les formules suivantes

$$(4) \qquad t = \frac{d}{b-a}, \quad x = \frac{ad}{b-a}, \quad y = \frac{bd}{b-a}.$$

Il est aisé de voir que ces trois équations, et par suite les formules qui en résultent, conviennent à tous les cas de la question, si l'on affecte chaque quantité du signe convenable. D'après ce que nous avons dit précédemment, la vitesse de chacun des mobiles sera regardée comme positive ou négative, suivant que ce mobile marchera de gauche à droite ou en sens contraire; les distances x et y, comptées à partir des points A et B, seront positives ou négatives, selon qu'elles seront portées vers la droite ou vers la gauche; le temps t sera lui-même positif ou négatif, suivant que la ren-

contre a lieu après ou avant le moment où les deux mobiles passent aux points A et B. De cette manière, et en vertu de la formule établie dans le numéro précédent, on voit que les équations (1) et (2) conviennent à tous les cas de la question. Il en est de même de l'équation (3), si l'on remarque qu'en partant du point B on arrive au même point M, soit en parcourant la distance y, soit en parcourant successivement les distances d et x.

105. Pour achever de nous familiariser avec l'interprétation des quantités positives ou négatives, nous ferons encore quelques applications de ces formules. Supposons la distance BA égale à 120 mètres, c'est-à-dire $d = 120$.

1° Les mobiles marchent tous deux de gauche à droite, le premier avec une vitesse de 6 mètres par seconde, le second avec une vitesse de 10 mètres. On fera $a = +6$, $b = +10$, ce qui donne

$$t = +30 \quad , \quad x = 180 \quad , \quad y = 300.$$

Ainsi la rencontre aura lieu après 30 secondes, à droite et à 180 mètres du point A. C'est le cas que nous avons examiné d'abord.

2° Les mobiles marchent tous deux de gauche à droite, le premier avec une vitesse de 6 mètres par seconde, le second avec une vitesse de 4 mètres. On fera $a = +6$, $b = +4$, ce qui donne

$$t = \frac{120}{-2} = -60 \quad , \quad x = -360 \quad , \quad y = -240.$$

Ainsi la rencontre a eu lieu il y a 60 secondes, à gauche et à 240 mètres du point B. On voit en effet que le premier mobile allant plus vite que le second a dû le dépasser en un certain point situé à gauche du point B.

3° Le premier mobile marche de droite à gauche avec une vitesse de 3 mètres par seconde, le second de gauche à droite avec une vitesse de 5 mètres. On fera $a = -3$, $b = +5$, ce qui donne

$$t = +15 \quad , \quad x = -45 \quad , \quad y = 75.$$

Ainsi la rencontre aura lieu entre les points A et B; ce qui est évident *à priori*, puisque les deux mobiles marchent à la rencontre l'un de l'autre.

106. Remarque I. Les exemples précédents montrent combien il est utile de représenter par les mêmes lettres des quantités tantôt positives, tantôt négatives, suivant les différents cas de la question que l'on traite. Cette extension donnée à la signification des lettres ne change rien au mécanisme des opérations algébriques, ni aux transformations servant à la résolution des équations. Voici comment on peut se convaincre de cette vérité importante.

Nous avons appelé expressions équivalentes deux expressions qui donnent le même résultat, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres qui les composent, et nous avons dit, en terminant le ch. IV du livre I (n° 72), qu'une opération algébrique transforme une expression en une autre équivalente. Mais jusqu'alors nous ne donnions aux lettres que des valeurs positives. Il est aisé de voir que l'égalité subsiste, quand même on donne aux lettres des valeurs négatives. Soit, par exemple, l'égalité

$$(1) \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

qui est vraie, quelles que soient les valeurs positives attribuées à a et à b. Si nous changeons le signe de b, d'après la remarque du n° 55, cette égalité se transforme en cette autre

$$(2) \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

vraie aussi, quelles que soient les valeurs positives attribuées à a et à b. Or, donner à b dans la première égalité une valeur négative -5, c'est la même chose que donner à b la valeur positive $+5$ dans la seconde ; la seconde égalité étant satisfaite pour la valeur positive, la première l'est aussi pour la valeur négative. Ainsi les opérations algébriques transforment les expressions en d'autres équivalentes, quelles que soient les valeurs, positives ou négatives, attribuées aux lettres.

107. Remarque II. Les transformations que nous avons fait subir à une équation ou à un système d'équations, et les méthodes de résolution qui en dépendent, doivent être entendues aussi dans le sens le plus général ; elles sont vraies, que les valeurs des lettres soient positives ou négatives. Soit, par exemple, l'équation

$$3x + 14 = 6 - x.$$

Si l'on ajoute aux deux membres la quantité x et si l'on retranche 14, cette équation devient

$$3x + x = 6 - 14,$$

ou

$$4x = -8.$$

Or, que la valeur de x soit positive ou négative, on a ajouté aux deux membres de l'équation proposée la même quantité et par conséquent on l'a transformée en une équation épuivalente. Cette dernière n'étant satisfaite que si l'on donne à x la valeur négative -2, il en est de même de l'équation proposée. On dit dans ce cas que l'équation admet une *solution négative* $x = -2$.

Considérons encore le système des deux équations

$$5x - 6y = 9,$$
$$8y - 11x = 1.$$

La méthode de substitution le transformera en cet autre

$$y = \frac{5x - 9}{6},$$
$$x = -3,$$

qui lui est équivalent, que les valeurs des inconnues soient positives ou négatives. Mais ce dernier n'est satisfait que par les valeurs négatives $x = -3$, $y = -4$; il en est de même du système proposé.

108. Remarque III. Dans une quantité affectée du signe $+$ ou du signe $-$, il y a lieu de distinguer la valeur *absolue* et la valeur *relative*. La valeur absolue est la quantité, abstraction faite du signe ; la valeur relative, la quantité avec son signe. Ainsi la valeur absolue de la quantité négative -5 est le nombre 5, la valeur relative est le nombre 5 à retrancher.

On s'est occupé naturellement de la comparaison des valeurs relatives des quantités, positives ou négatives, de même espèce. Une quantité positive, étant une quantité à ajouter, donnera un résultat d'autant plus grand que sa valeur absolue sera plus grande. Au contraire, une quantité négative, étant une quantité à retrancher, donnera un résultat d'autant plus petit que sa valeur absolue sera plus grande. Pour fixer les idées, supposons que la lettre x représente le résultat des opérations d'un négociant dans le courant de la journée (n° 33); admettons que le négociant ait en caisse, au commencement de la journée, une somme d'argent suffisamment grande que nous désignerons par m. L'avoir du négociant est devenu $m + x$. Il peut arriver que la somme des dépenses égale celle des recettes, alors la valeur de x est zéro, et l'avoir du négociant n'a pas

changé. Si la valeur de x est positive, l'avoir du négociant augmente d'autant plus que la valeur absolue de x est plus grande. Si la valeur de x est négative, l'avoir du négociant diminue d'autant plus que la valeur absolue de x est plus grande. Pour abréger ce discours, on fait abstraction de l'avoir primitif, et l'on considère une quantité positive comme plus grande que zéro, et d'autant plus grande que sa valeur absolue est plus grande, une quantité négative comme plus petite que zéro, et d'autant plus petite que sa valeur absolue est plus grande. Ainsi on dit que la quantité -1 est plus petite que 0, la quantité -2 plus petite que -1, la quantité -3 plus petite que -2...; cela signifie, je le répète, que la quantité $m-1$ est plus petite que m, la quantité $m-2$ plus petite que $m-1$, la quantité $m-3$ plus petite que $m-2$,...

Cette comparaison des valeurs relatives n'est pas moins évidente dans l'échelle des températures marquées par le thermomètre; les nombres positifs indiquent des températures supérieures à la température zéro; les nombres négatifs des températures inférieures; les températures -1, -2, -3,... vont en s'abaissant de plus en plus.

Il en est de même de toutes les sortes de grandeurs susceptibles d'être comptées dans deux sens opposés. Nous avons déterminé (n° 103) la position d'un mobile M sur une droite par sa distance à un point fixe O, en affectant du signe + les distances portées vers la droite, du signe — les distances portées en sens contraire, et nous avons appelé x cette distance affectée du signe convenable. Que l'on imagine maintenant un point K situé très-loin vers la gauche, à une distance m du point O, et que l'on compte les distances

à partir de ce point; la position du mobile sera déterminée par la quantité $m + x$. Si le mobile, partant du point O, se meut vers la droite, la valeur de x est positive et va en augmentant de même que la distance $m + x$ à l'origine fictive K. Si le mobile marche vers la gauche, la valeur de x sera négative et ira en augmentant en valeur absolue; mais la distance $m + x$ à l'origine fictive K ira en diminuant. Faisant abstraction de la quantité m, on dira que la valeur relative de x augmente dans le premier cas, diminue dans le second.

Des inégalités.

109. Les théorèmes que nous avons démontrés sur les égalités et les transformations qui en résultent (nos 79 à 82) s'appliquent aux inégalités, sauf quelques légères modifications.

1° Une inégalité subsiste si à ses deux membres on ajoute une même quantité, ou si de ses deux membres on retranche une même quantité.

Ce que nous venons de dire sur la comparaison des valeurs relatives des quantités positives ou négatives donne à ce théorème un sens tout à fait général. Soit l'inégalité

$$5 > 3, \quad \text{ou} \quad m + 5 > m + 3;$$

des deux membres retranchons 7, nous aurons

$$m - 2 > m - 4, \quad \text{ou} \quad -2 > -4.$$

Il en résulte que l'on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre en changeant son signe.

Mais il n'est pas permis de changer les signes de tous les termes d'une inégalité, ou du moins, si on le fait, il faut changer en même temps le sens de l'inégalité. Soit l'inégalité

$$5 > 3;$$

si l'on change les signes, on écrira

$$-5 < -3.$$

2° On voit aussi que l'inégalité subsiste si l'on multiplie ou si l'on divise les deux membres par un même nombre positif.

Si l'on multipliait ou si l'on divisait par un nombre négatif, il faudrait avoir soin de changer le sens de l'inégalité. Car ceci reviendrait à multiplier par un nombre positif et à changer les signes.

Ces diverses transformations permettent de résoudre une inégalité comme nous avons résolu une équation. Supposons, par exemple, que la quantité x soit assujettie à satisfaire à la condition

$$\frac{7x}{8} - \frac{3}{4} > \frac{1}{6} + \frac{5x}{12}.$$

Si l'on multiplie les deux membres par le nombre positif 24, pour faire disparaître les dénominateurs, cette inégalité devient

$$21x - 18 > 4 + 10x.$$

Si maintenant on fait passer les termes inconnus dans le premier membre, les termes connus dans le second, on a

$$11x > 22,$$

et, en divisant par le nombre positif 11,

$$x > 2.$$

Tous les nombres plus grands que 2 vérifient l'inégalité proposée.

Soit encore l'inégalité

$$3x + 84 > 8x - 36.$$

En faisant passer les termes connus dans le premier mem-

bre, les termes inconnus dans le second, on a

$$120 > 5x,$$

ou

$$5x < 120,$$

et, en divisant par le nombre positif 5,

$$x < 24.$$

Toutes les quantités plus petites que 24 vérifient l'inégalité proposée.

CHAPITRE III

DES CAS D'IMPOSSIBILITÉ ET D'INDÉTERMINATION.

Des cas d'impossibilité.

110. Une équation du premier degré à une inconnue, par des transformations convenables, peut toujours être mise sous la forme

$$ax = b,$$

les lettres a et b désignant des quantités connues ; d'où l'on déduit

$$x = \frac{b}{a}.$$

Ainsi une équation du premier degré à une inconnue admet en général une solution, positive ou négative, et n'en admet qu'une.

Il en est de même d'un système de n équations du premier degré à n inconnues ; car nous avons vu (n° 94) qu'un pareil système peut être transformé en un système équi-

valent de n équations renfermant, la première les n inconnues, la deuxième $n-1$, la troisième $n-2$....., enfin la dernière une seule inconnue; cette dernière équation donnera en général pour la dernière inconnue une valeur unique et déterminée, et, en remontant ensuite de proche en proche, on trouvera aussi pour chacune des autres inconnues une valeur unique et déterminée.

111. Il peut arriver que dans l'équation à une inconnue

$$ax=b,$$

à laquelle on est conduit en résolvant un système d'équations, le coefficient a de l'inconnue soit nul; alors la question revient à trouver un nombre qui, multiplié par zéro, donne un produit égal à b, ce qui est impossible; car le produit d'une quantité quelconque par zéro est toujours égal à zéro. Ainsi, dans ce cas, il y a impossibilité de satisfaire à l'équation ou au système d'équations proposé.

Exemples.

1° Trouver un nombre qui, augmenté de son sixième et de 10, et diminué de sa moitié, égale deux fois son tiers augmenté de 8.

En désignant par x ce nombre, on a l'équation

$$x+\frac{x}{6}+10-\frac{x}{2}=2\left(\frac{x}{3}+8\right),$$

qui, simplifiée, devient

$$\frac{2x}{3}+10=\frac{2x}{3}+16 \quad , \quad 0\times x=6.$$

L'impossibilité est évidente. Elle se manifeste déjà dans l'équation précédente; car, si l'on retranche $\frac{2x}{3}$ de part et

d'autre, il vient $10 = 16$, ce qui est impossible. Ainsi il n'existe aucun nombre satisfaisant à la question.

2° Trouver deux nombres tels que le tiers du premier égale la moitié du second moins 1, et que le second égale les deux tiers du premier plus 6.

Si l'on appelle x et y ces deux nombres, on a les deux équations

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} - 1,$$
$$y = \frac{2x}{3} + 6.$$

En substituant dans la première la valeur de y donnée par la seconde, on obtient le système équivalent

$$0 = 2,$$
$$y = \frac{2x}{3} + 6.$$

Il n'existe pas de nombres satisfaisant aux conditions énoncées.

3° Résoudre les deux équations

$$3x - 2y = 10,$$
$$6x - 4y = 17.$$

En substituant dans la seconde la valeur de y tirée de la première, on trouve

$$3 = 0.$$

Ainsi il n'existe pas de nombres satisfaisant à la fois aux deux équations proposées.

L'impossibilité se manifeste sur les équations elles-mêmes; en effet, si l'on multiplie tous les termes de la première par 2, on a

$$6x - 4y = 20,$$
$$6x - 4y = 17.$$

On voit que les deux équations sont *incompatibles;* car les premiers membres sont les mêmes et les seconds membres diffèrent.

Du symbole l'infini.

112. Revenons à l'équation

$$ax = b,$$

et supposons que la valeur absolue du coefficient a soit très-petite ; l'inconnue x, donnée par la formule

$$x = \frac{b}{a},$$

sera très-grande en valeur absolue, et, si l'on conçoit que la valeur absolue du coefficient a diminue jusqu'à zéro, la valeur absolue de x augmentera de manière à devenir plus grande que toute quantité donnée. Par exemple, si la valeur de b est positive et si l'on donne au coefficient a successivement les valeurs

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{10000}, \ldots,$$

le quotient x prendra les valeurs de plus en plus grandes

$$10b, \quad 100b, \quad 1000b, \quad 10000b, \ldots$$

Lorsqu'une quantité augmente ainsi de manière à devenir plus grande que toute quantité donnée, on dit qu'elle devient infinie et on la représente par le signe ∞, qui a la forme d'un huit renversé.

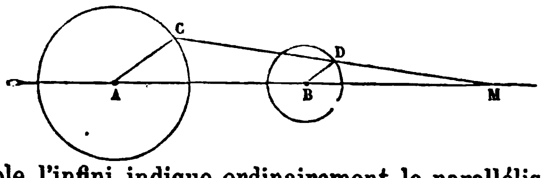
Quand l'une des inconnues d'un problème se présente sous cette forme, il y a évidemment impossibilité; car ce symbole provient de ce que, dans une équation telle que $ax = b$, le coefficient a de l'inconnue est nul.

Reprenons le problème du n° 104, dans le cas où les deux mobiles marchent de gauche à droite, le second allant plus

vite que le premier. Si la différence $b-a$ des vitesses est très-petite, les formules donneront pour les inconnues des valeurs positives très-grandes, ce qui indique que la rencontre aura lieu après un temps très-long, et en un point très-éloigné vers la droite. Et, en effet, le second mobile, marchant avec une vitesse très-peu supérieure à celle du premier, ne l'atteindra qu'après un temps très-long. Plus la différence des vitesses sera petite, plus le point de rencontre sera éloigné. Enfin, quand les vitesses deviennent égales, le point de rencontre s'éloigne à l'infini; il y a impossibilité de satisfaire aux équations du problème, et, en effet, les deux mobiles, marchant également vite, restent toujours à la même distance l'un de l'autre et ne se rencontrent jamais.

Supposons que le second courrier marche un peu moins vite que le premier, les formules donnent pour les inconnues des valeurs négatives très-grandes en valeur absolue; ce qui indique que la rencontre a eu lieu il y a très-longtemps, en un point situé très-loin vers la gauche. Plus la différence $a-b$ des vitesses est petite, plus ce point de rencontre est éloigné. Enfin, quand cette différence devient nulle, le point s'éloigne à l'infini vers la gauche, et il y a impossibilité.

113. Remarque I. Dans les questions de géométrie, le



symbole l'infini indique ordinairement le parallélisme de deux droites. Proposons-nous, par exemple, la question

suivante : Étant donnés deux cercles, on mène deux rayons parallèles AC, BD ; on joint leurs extrémités ; déterminer le point M où la droite CD rencontre la ligne des centres.

Appelons a et b les rayons des deux cercles, d la distance AB des centres, x la distance inconnue AM. Les triangles semblables MAC, MBD donnent la proportion

$$\frac{x}{a}=\frac{x-d}{b};$$

d'où l'on déduit

$$x=\frac{ad}{a-b}.$$

Quand la différence $a-b$ des rayons est très-petite, la valeur de x est très-grande, et le point M très-éloigné. Si cette différence diminue jusqu'à zéro, le point M s'éloigne à l'infini, et la droite CD devient parallèle à la droite AB. On voit en effet que, lorsque les cercles sont égaux, la figure ABDC devient un parallélogramme.

114. Remarque II. Les solutions négatives des équations ne sont pas toujours admissibles dans la résolution des problèmes. Souvent la question est de telle nature que les inconnues doivent nécessairement être positives ; dans ce cas, si l'on trouve pour les inconnues des valeurs négatives, il y a impossibilité. Cette circonstance se présente dans les questions suivantes :

1° Avec deux vins qui coûtent a et b centimes le litre, former d litres d'un mélange coûtant c centimes le litre.

Il est évident *à priori* que le prix c d'un litre du mélange doit être intermédiaire entre les prix a et b d'un litre de chacun des deux vins. Appelons x et y les quantités des deux vins qu'il faut mélanger, nous aurons les équa-

tions (n° 16),

$$x + y = d,$$
$$ax + by = cd;$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{d(c-b)}{a-b} \quad , \quad y = \frac{d(a-c)}{a-b}.$$

La nature de la question exige évidemment que les deux inconnues aient des valeurs positives. Nous pouvons toujours supposer a plus grand que b, c'est-à-dire appeler premier vin le plus cher. Dans les deux formules, le dénominateur étant positif, il est nécessaire que chacun des numérateurs soit positif, ce qui aura lieu si les deux conditions

$$c > b \quad , \quad c < a$$

sont remplies. Ainsi, pour que la question admette une solution, il faut que le prix d'un litre du mélange soit intermédiaire entre les prix des deux vins.

2° On connaît les poids spécifiques de deux métaux et l'on demande dans quelle proportion il faut les mélanger pour obtenir un alliage ayant un poids spécifique donné.

On sait que le poids spécifique d'un corps est le rapport du poids d'un volume quelconque de ce corps au poids d'un égal volume d'eau. En d'autres termes, si l'on prend pour unité de volume le décimètre cube, et pour unité de poids le kilogramme, comme on fait ordinairement dans les arts, on peut dire que le poids spécifique d'un corps est le poids en kilogrammes d'un décimètre cube de ce corps. D'un autre côté, on exprime la composition d'un alliage, en disant quel poids de chaque métal entre dans un kilogramme d'alliage.

Représentons par a et b les poids spécifiques des deux

métaux, par c celui de l'alliage, et désignons par x et y les poids de ces deux métaux qui entrent dans un kilogramme d'alliage. On aura d'abord l'équation

$$x+y=1.$$

Cherchons maintenant le poids spécifique de l'alliage, comme si la composition en était connue, et exprimons qu'il est bien égal à c, nous aurons la seconde équation du problème. Le poids d'un corps est égal à son volume multiplié par le poids spécifique, et réciproquement le volume d'un corps est égal à son poids divisé par le poids spécifique. Dans un kilogramme d'alliage il entre des poids x et y des deux métaux, les volumes occupés par ces deux poids sont exprimés par $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$; le volume d'un kilogramme d'alliage est égal à leur somme $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, en supposant toutefois que dans l'alliage des deux métaux il n'y ait ni contraction ni dilatation. Le poids spécifique de l'alliage, étant égal à son poids divisé par son volume, sera

$$\frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}.$$

Mais ce poids spécifique doit être égal à c; on a donc l'équation

$$\frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}=c.$$

Si l'on multiplie par le dénominateur $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, cette équation devient

$$c\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1,$$

ou

$$\frac{cx}{a}+\frac{cy}{b}=1,$$

$$bcx+acy=ab.$$

Ainsi les deux équations du problème sont

$$x+y=1,$$

$$bcx+acy=ab.$$

On en déduit

$$x=\frac{a(c-b)}{c(a-b)}\quad,\quad y=\frac{b(a-c)}{c(a-b)}.$$

La nature de la question exige que les deux inconnues aient des valeurs positives. Soit $a>b$; il faudra, pour que le problème soit possible, que l'on ait $c>b$ et $c<a$, c'est-à-dire que le poids spécifique de l'alliage soit intermédiaire entre les poids spécifiques des deux métaux, ce qui est évident *à priori*.

Le problème de la couronne de Hiéron (n° 18) est une application des formules précédentes. Le poids spécifique de l'or est 19,26, celui de l'argent 10,47. La couronne perd dans l'eau 467 grammes, c'est le poids d'un égal volume d'eau; donc le poids spécifique de la couronne égale $\frac{7465}{467}=15,98$. On fera

$$a=19,26\quad,\quad b=10,47\quad,\quad c=15,98.$$

Des cas d'indétermination.

115. Nous avons dit que l'équation du premier degré à une inconnue peut toujours se mettre sous la forme

$$ax=b,$$

et nous avons vu que, lorsque le coefficient a de l'inconnue est nul, sans que le second membre le soit, il y a impossi-

bilité. Supposons maintenant que b soit nul en même temps que a, l'équation devient

$$0 \times x = 0.$$

Il s'agit de trouver un nombre qui, multiplié par zéro, donne un produit égal à zéro ; tous les nombres satisfont évidemment à l'équation qui se réduit à une identité $0=0$, et la valeur de l'inconnue est indéterminée. Dans ce cas, la formule donne pour l'inconnue un symbole de la forme $\frac{0}{0}$.

Exemples.

1° Trouver un nombre qui, augmenté de son sixième et de 10, et diminué de sa moitié, égale deux fois son tiers augmenté de 5.

Si l'on appelle x ce nombre, on a l'équation

$$x + \frac{x}{6} + 10 - \frac{x}{2} = 2\left(\frac{x}{3} + 5\right),$$

qui, simplifiée, se réduit à

$$\frac{2x}{3} + 10 = \frac{2x}{3} + 10,$$

ou

$$0 \times x = 0.$$

Tous les nombres satisfont à la question. Il y a indétermination.

2° Trouver deux nombres tels que le tiers du premier égale la moitié du second, moins 1, et que le second égale les deux tiers du premier, plus 2.

Si l'on appelle x et y ces deux nombres, on a les deux équations

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} - 1,$$

$$y = \frac{2x}{3} + 2.$$

En substituant dans la première la valeur de y donnée par la seconde, on obtient le système équivalent

$$y = \frac{2x}{3} + 2,$$

$$0 = 0.$$

L'une des équations se réduisant à une identité, on n'a qu'une équation à deux inconnues. On peut donner à l'une des inconnues, à x par exemple, une valeur arbitraire ; il en résulte pour y une valeur correspondante ; ainsi l'équation admet une infinité de solutions, et il y a encore indétermination.

3° Résoudre les deux équations

$$3x - 2y = 10,$$
$$6x - 4y = 20.$$

Si l'on multiplie la première équation par 2, on voit qu'elle devient exactement la même que la seconde ; ainsi les deux équations n'en font qu'une, et il y a indétermination.

4° Résoudre les trois équations

$$y + 2z - 3x = a,$$
$$z + 2x - 3y = b,$$
$$x + 2y - 3z = c.$$

En ajoutant les trois équations membre à membre, on trouve $0 = a + b + c$. Si la somme $a + b + c$ n'est pas nulle, il y a impossibilité. Mais si cette somme est nulle, les trois équations se réduisent à deux ; car, d'après le principe établi au n° 98, le système des trois équations proposées est équivalent au système que l'on obtient en remplaçant l'une d'elles, par exemple la troisième, par l'équation nouvelle qui est ici une identité $0 = 0$. Il y a donc indétermi-

nation; on pourra attribuer à l'une des inconnues x telle valeur que l'on voudra; des deux premières équations, on déduira les valeurs correspondantes de y et de z.

5° Dans le problème des deux mobiles (n° 105), si l'on a à la fois $a = b$, $d = 0$, les trois formules deviennent $\frac{0}{0}$, et il y a indétermination; et, en effet, les deux mobiles, étant ensemble et marchant avec la même vitesse, ne se quitteront jamais.

6° Dans le problème du mélange (n° 114), si les trois quantités a, b, c sont égales, les deux inconnues se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, et les deux équations du problème n'en font qu'une; il y a indétermination. Et, en effet, les prix des deux vins étant les mêmes, on obtiendra toujours un mélange de ce même prix, quelle que soit la proportion suivant laquelle on mélange les deux vins.

116. Remarque. Le symbole $\frac{0}{0}$ n'indique pas toujours l'indétermination. Il peut arriver qu'une fraction se présente sous cette forme, parce qu'il y a au numérateur et au dénominateur un même facteur algébrique qui devient nul pour certaines valeurs attribuées aux lettres; on supprimera ce facteur commun, afin d'obtenir la valeur de la fraction.

Exemples. 1° La fraction $\frac{2x - 2}{3x - 3}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, quand on y fait $x = 1$. Mais cette fraction peut s'écrire $\frac{2(x - 1)}{3(x - 1)}$, et si l'on supprime le facteur commun $x - 1$, on voit qu'elle est constamment égale à $\frac{2}{3}$.

2° La fraction $\frac{2x^2-2x}{3x-3}$ devient aussi $\frac{0}{0}$, quand on y fait $x=1$. Cette fraction peut s'écrire $\frac{2x(x-1)}{3(x-1)}$, ou $\frac{2x}{3}$, si l'on supprime le facteur commun $x-1$; elle varie quand on donne à x différentes valeurs; pour $x=1$, elle est égale à $\frac{2}{3}$.

3° La fraction $\frac{2(x-1)^2}{3(x-1)}$ prend aussi la forme $\frac{0}{0}$ pour $x=1$. Mais si l'on supprime le facteur commun $x-1$, elle se réduit à $\frac{2(x-1)}{3}$, et devient nulle pour $x=1$.

4° La fraction $\frac{2(x-1)}{3(x-1)^2}$ prend aussi la forme $\frac{0}{0}$ pour $x=1$. Si l'on supprime le facteur commun $x-1$, elle se réduit à $\frac{2}{3(x-1)}$, et devient infinie pour $x=1$.

CHAPITRE IV

FORMULES GÉNÉRALES POUR LA RÉSOLUTION DE DEUX ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES.

117. Deux équations du premier degré à deux inconnues peuvent toujours être mises sous la forme

$$ax+by=c, \tag{1}$$
$$a'x+b'y=c', \tag{2}$$

les lettres a, b, c, a', b', c', désignant des quantités connues, positives ou négatives.

Si l'on ajoute ces équations membre à membre, après avoir multiplié les termes de la première par b' et ceux de la seconde par $-b$, on obtient l'équation

$$(ab'-ba')x=cb'-bc'. \tag{3}$$

Si on les ajoute membre à membre, après avoir multiplié les termes de la première par $-a'$ et ceux de la seconde par a, on obtient de même l'équation

$$(ab'-ba')y=ac'-ca'. \tag{4}$$

Des deux équations (3) et (4) on déduit les formules générales

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, \tag{α}$$

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}, \tag{β}$$

à l'aide desquelles on peut résoudre immédiatement un système quelconque de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Le dénominateur $ab'-ba'$ est le même dans les deux formules. On obtient le premier numérateur en remplaçant dans le dénominateur les coefficients a et a' de l'inconnue x par les seconds membres c et c' des équations proposées, et de même le second numérateur en remplaçant dans le dénominateur les coefficients b et b' de l'inconnue y par les seconds membres c et c'.

118. Remarque I. Si dans les équations proposées on permute a et a', b et b', c et c', sans changer x et y, c'est-à-dire si l'on remplace a par a' et a' par a, de même b par b' et b' par b, et aussi c par c' et c' par c, ces deux équations deviennent

$$a'x+b'y=c',$$
$$ax+by=c;$$

la première se change en la seconde, et la seconde en la première, mais le système des deux équations ne change pas. Concevons que l'on répète sur ce second système les calculs qui ont été faits sur le premier; il suffira d'effectuer dans les résultats les permutations indiquées, et l'on aura

$$x=\frac{c'b-b'c}{a'b-b'a}, \quad y=\frac{a'c-c'a}{a'b-b'a}.$$

Puisque le second système d'équations est identique au premier, les valeurs des inconnues doivent rester les mêmes; c'est ce qui a lieu en effet; car le dénominateur a changé de signe, ainsi que les deux numérateurs.

119. Remarque II. Si dans les équations proposées on permute x et y et en même temps les lettres a et b, sans changer les seconds membres, les équations deviennent

$$\begin{gathered} by+ax=c, \\ b'y+a'x=c'; \end{gathered}$$

elles ne changent pas; l'ordre des termes seul est changé dans chacune d'elles. Concevons que l'on répète sur ces équations les calculs qui ont été faits sur les équations proposées pour arriver à l'équation (3) et par suite à la formule (α); il suffira d'effectuer dans le résultat les permutations indiquées, et l'on aura

$$y=\frac{ca'-ac'}{ba'-ab'}.$$

Les nouvelles équations étant identiques aux premières, la valeur de y ainsi obtenue doit être la même que celle qui est donnée par la formule (β), ce qui a lieu effectivement.

La première considération indique une certaine symétrie dans la composition des formules (α) et (β); la seconde permet de déduire l'une des formules de l'autre.

Discussion.

On appelle discussion, en algèbre, l'examen des différents cas que peut présenter une question. Examinons les principales circonstances que présente la résolution de deux équations (1) et (2) du premier degré à deux inconnues.

120. Premier cas. Supposons que le dénominateur $ab' - ba'$ soit différent de zéro. Il est clair que tout système de valeurs de x et y qui satisfait aux deux équations (1) et (2) satisfait aussi aux deux équations (3) et (4) qui s'en déduisent par le mode indiqué au n° 97; mais, dans le cas actuel, ces dernières ne sont satisfaites que par les valeurs de x et de y données par les formules (α) et (β); donc les équations proposées ne peuvent admettre une autre solution. Vérifions maintenant que ces valeurs satisfont bien aux deux équations proposées. Si l'on remplace x et y par ces valeurs et si l'on ordonne par rapport à c et c', le premier membre $ax + by$ de la première équation devient

$$\frac{c(ab' - ba') + c'(ab - ab)}{ab' - ba'};$$

le coefficient de c' étant nul, et celui de c égal au dénominateur, cette quantité est égale au second membre c et l'équation est satisfaite. Le premier membre $a'x + b'y$ de la seconde équation devient de même

$$\frac{c(a'b' - a'b') + c'(ab' - ba')}{ab' - ba'};$$

le coefficient de c étant nul et celui de c' égal au dénominateur, cette quantité est égale au second membre c' et

l'équation est aussi satisfaite. Ainsi, *lorsque le dénominateur* $ab' - ba'$ *est différent de zéro, les deux équations proposées admettent une solution et une seule ;* cette solution est donnée par les formules (α) et (β).

Soient, par exemple, les deux équations

$$5x - 3y = 9,$$
$$7x + 11y = 43.$$

On fera $a=5$, $b=-3$, $a'=7$, $b'=11$, $c=9$, $c'=43$; le binôme $ab'-ba'$ étant différent de zéro, les deux équations admettent la solution $x=3$, $y=2$ donnée par les formules (α) et (β), et n'en admettent pas d'autre.

121. Second cas. Supposons que le dénominateur $ab'-ba'$ soit égal à zéro, et que l'un des numérateurs, par exemple $cb'-bc'$, soit différent de zéro. Si les deux équations proposées étaient satisfaites par des valeurs de x et y, l'équation (3) le serait également; mais cette dernière est impossible; on en conclut que le système des deux équations proposées n'admet aucune solution ; on dit, d'après cela, qu'elles sont incompatibles.

Il est facile de mettre cette impossibilité en évidence sur les équations proposées elles-mêmes. Le binôme $cb'-bc'$ étant différent de zéro, l'un au moins des coefficients b et b' est différent de zéro ; supposons, par exemple, que b soit différent de zéro ; de la relation $ab'-ba'=0$ on déduit $a'=\frac{ab'}{b}$; si l'on remplace a' par cette valeur et si l'on multiplie tous les termes par b, l'équation (2) devient

$$(5) \qquad b'(ax+by)=bc'.$$

Si le coefficient b' était nul, le second membre bc' étant différent de zéro, puisque le binôme $cb'-bc'$ est diffé-

rent de zéro, cette équation serait impossible. Lorsque le coefficient b' est différent de zéro, on peut mettre l'équation (5) et par suite l'équation (2) sous la forme

$$(6) \qquad ax + by = \frac{bc'}{b'};$$

en la comparant à l'équation (1), on voit que les premiers membres sont les mêmes, tandis que les seconds membres diffèrent; car si l'on avait $c = \frac{bc'}{b'}$, on aurait aussi $cb' - bc' = 0$; l'incompatibilité des deux équations est manifeste.

Dans le cas actuel, le second membre de la formule (α) se présente sous la forme ∞. Le second membre de la formule (β) se présente sous la même forme, ou sous la forme $\frac{0}{0}$. Nous avons supposé le coefficient b différent de zéro; si l'on remplace a' par sa valeur $\frac{ab'}{b}$ déduite de la relation $ab' - ba' = 0$, on a

$$ac' - ca' = -\frac{a(cb' - bc')}{b};$$

lorsque le coefficient a est aussi diffférent de zéro, le binôme $ac' - ca'$ est différent de zéro et la formule (β) se présente sous la forme ∞, comme la formule (α); mais lorsque le coefficient a est nul, le binôme $ac' - ca'$ est nul, et la formule (β) se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

122. Troisième cas. Examinons enfin le cas où le dénominateur $ab' - ba'$ est égal à zéro, ainsi que les deux numérateurs $cb' - bc'$, $ac' - ca'$. Supposons que l'un au moins des quatre coefficients a, b, a', b' des inconnues, par exemple b, soit différent de zéro. Nous avons obtenu l'é-

quation (3) en ajoutant les deux équations proposées membre à membre, après avoir multiplié les termes de la première par b', et ceux de la seconde par $-b$; d'après le théorème établi au n° 98, l'équation (2) dont les termes ont été multipliés par une quantité $-b$ différente de zéro peut être remplacée par l'équation (3), c'est-à-dire que le système des deux équations (1) et (2) est équivalent au système des deux équations (1) et (3); cette dernière étant une identité $0=0$, le système des deux équations proposées se réduit à la seule équation (1), que l'on mettra sous la forme

$$y=\frac{c-ax}{b}.$$

On pourra attribuer à x une valeur quelconque; à chaque valeur de x correspond une valeur de y. Ainsi le système des deux équations proposées se réduit à une seule équation et admet une infinité de solutions.

Il est facile de mettre en évidence l'identité des deux équations. Nous avons vu que la seconde devient

$$b'(ax+by)=bc', \tag{5}$$

et que, lorsque le coefficient b' est différent de zéro, on peut la mettre sous la forme

$$ax+by=\frac{bc'}{b'}; \tag{6}$$

mais de la relation $cb'-bc'=0$, on déduit $c=\frac{bc'}{b'}$; les deux équations sont donc identiques. Si le coefficient b' était égal à zéro, on aurait aussi $c'=0$, à cause de la relation $cb'-bc'=0$, et l'équation (5) se réduirait à une identité $0=0$.

Si les quatre coefficients a, b, a', b' étaient nuls, les deux équations proposées devenant $0=c$, $0=c'$, il y aurait impossibilité, à moins que les deux seconds membres c et c' ne fussent aussi nuls; dans ce cas, les deux équations se réduisant à des identités $0=0$, il y aurait indétermination absolue; on pourrait attribuer des valeurs quelconques à x et à y.

Symétrie des équations.

123. Lorsque les équations proposées présentent une certaine symétrie dans leur composition, cette considération est très-utile; elle sert d'abord à vérifier les calculs; elle permet aussi, quand on a trouvé la valeur de l'une des inconnues, d'en déduire immédiatement celles des autres. Nous en avons déjà fait usage dans ce qui précède: en voici encore quelques exemples.

1° Résoudre les deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} ax+by=c, \\ bx+ay=d. \end{cases}$$

L'application des formules générales (α) et (β) donne

$$(2) \qquad x=\frac{ac-bd}{a^2-b^2}, \quad y=\frac{ad-bc}{a^2-b^2}.$$

Nous remarquons d'abord que, lorsqu'on permute a et b, c et d, sans changer x et y, les deux équations se permutent, et par conséquent le système ne change pas. Chacune des formules (2) doit donc conserver la même valeur.

Nous remarquons ensuite que les équations ne changent pas, lorsqu'on permute a et b, x et y, sans changer les seconds membres. Ceci permet de déduire la valeur de y de celle de x, ou inversement.

2° Résoudre les trois équations

$$(1)\qquad bz + cy = a,$$
$$(2)\qquad cx + az = b,$$
$$(3)\qquad ay + bx = c,$$

dans lesquelles nous supposons les trois nombres a, b, c différents de zéro.

En multipliant les termes de la première par $-a$, ceux de la seconde par b et ceux de la troisième par c, et ajoutant membre à membre, on obtient l'équation

$$(4)\qquad 2bcx = b^2 + c^2 - a^2,$$

et le système des trois équations proposées est équivalent au système des trois équations (2), (3), (4). Cette dernière est satisfaite par une valeur finie de x,

$$(5)\qquad x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

En portant cette valeur dans les équations (2) et (3), on en déduirait pour z et y des valeurs finies, d'où l'on conclut que le système des équations proposées admet une solution et une seule. Mais on peut obtenir immédiatement les valeurs de y et de z. Quand on permute x et y, a et b, les deux premières équations se permutent, et la troisième reste la même; donc le système ne change pas, et, par conséquent, de la valeur de x on déduit

$$(6)\qquad y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

En permutant x et z, a et c, on en déduit de même

$$(7)\qquad z = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba}.$$

3° Résoudre les trois équations

$$(1)\qquad x + y + z = 1,$$

$$(2)\qquad ax + by + cz = k,$$

$$(3)\qquad a^2x + b^2y + c^2z = k^2.$$

En multipliant par c les termes de la première et la retranchant de la seconde membre à membre; et de même, en multipliant par c les termes de la seconde et la retranchant de la troisième membre à membre, on obtient les deux équations

$$(4)\qquad (a-c)x + (b-c)y = k - c,$$

$$(5)\qquad a(a-c)x + b(b-c)y = k(k-c).$$

En multipliant par b les termes de l'équation (4) et la retranchant membre à membre de l'équation (5), on arrive enfin à l'équation

$$(6)\qquad (a-b)(a-c)x = (k-b)(k-c).$$

Comme on peut remplacer l'équation (1) par l'équation (4) et l'équation (2) par l'équation (5), le système des trois équations proposées est équivalent au système des trois équations (3), (4), (5), et par suite au système des trois équations (3), (4), (6). Si les trois nombres a, b, c sont différents, cette dernière est satisfaite par une valeur finie de x,

$$(7)\qquad x = \frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)};$$

de l'équation (4) on en déduirait pour y une valeur finie et de l'équation (3) pour z une valeur finie, d'où l'on conclut que le système des équations proposées admet une solution et une seule. Mais on peut obtenir immédiatement les valeurs de y et de z. Nous remarquons, en effet, que les

équations proposées ne changent pas, lorsqu'on y permute x et y, a et b; si donc on effectue cette permutation sur la formule (7), on obtiendra la valeur de y, savoir

$$y=\frac{(k-a)(k-c)}{(b-a)(b-c)}. \tag{8}$$

De même, les équations ne changent pas, quand on y permute x et z, a et c, et la formule (7) donne

$$z=\frac{(k-b)(k-a)}{(c-b)(c-a)}. \tag{9}$$

CHAPITRE V*

FORMULES GÉNÉRALES POUR LA RÉSOLUTION DE TROIS ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A TROIS INCONNUES.

124. Trois équations du premier degré à trois inconnues peuvent toujours être mises sous la forme

$$a_1x+b_1y+c_1z=k_1, \tag{1}$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=k_2, \tag{2}$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=k_3. \tag{3}$$

En multipliant les termes de la première par A_1, ceux de la seconde par A_2, ceux de la troisième par A_3, et ajoutant membre à membre, on obtient l'équation

$$\begin{aligned}(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)x+(b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3)y+(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)z\\=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3.\end{aligned} \tag{4}$$

* Nous avons marqué d'un astérisque les questions que l'on peut passer à une première lecture.

Nous pouvons choisir les multiplicateurs A_1, A_2, A_3, de manière à annuler deux des coefficients de cette équation, par exemple ceux de y et de z; nous poserons pour cela

$$(5)\qquad \begin{cases} b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0, \\ c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0; \end{cases}$$

l'équation (4) se réduit alors à

$$(6)\quad (a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)x = k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3,$$

et donne

$$(7)\qquad x = \frac{k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3}{a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3}.$$

Les équations (5) peuvent être mises sous la forme

$$b_1A_1 + b_2A_2 = - b_3A_3,$$
$$c_1A_1 + c_2A_2 = - c_3A_3.$$

Si l'on regarde A_3 comme une quantité connue, on a deux équations du premier degré à deux inconnues A_1 et A_2; on en déduit, en appliquant les formules générales établies au n° 117,

$$A_1 = A_3\frac{b_2c_3 - c_2b_3}{b_1c_2 - c_1b_2}, \quad A_2 = A_3\frac{b_3c_1 - c_3b_1}{b_1c_2 - c_1b_2};$$

la quantité A_3 étant arbitraire, nous la prendrons égale au dénominateur $b_1c_2 - c_1b_2$, et nous aurons

$$(8)\ A_1 = b_2c_3 - c_2b_3,\ A_2 = b_3c_1 - c_3b_1,\ A_3 = b_1c_2 - c_1b_2.$$

La formule (7) devient ainsi

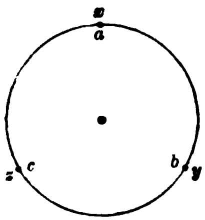
$$(\alpha)\quad x = \frac{k_1(b_2c_3 - c_2b_3) + k_2(b_3c_1 - c_3b_1) + k_3(b_1c_2 - c_1b_2)}{a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + a_2(b_3c_1 - c_3b_1) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)}.$$

Les équations proposées ne changent pas, quand on y permute les lettres a et b, x et y; si donc dans la formule (α) on permutait les lettres a et b, on aurait la valeur de y. On aurait de même la valeur de z, en permutant, dans la for-

male (*a*), les lettres *a* et *c*. Mais nous emploierons un autre mode de permutation, qui est très-utile et d'un usage fréquent en mathématiques.

Permutation circulaire.

125. Sur un cercle, et aux sommets d'un triangle équilatéral inscrit, plaçons les trois lettres x, y, z, ainsi que les trois lettres a, b, c; imaginons ensuite que le cercle tourne autour de son centre, dans un sens convenable, d'un tiers de circonférence, la lettre y prendra la place de x, z celle de y, x celle de z; de même les lettres b, c, a prendront la place des lettres a, b, c. Ce changement dans l'ordre des lettres s'appelle une *permutation circulaire*.



Si l'on effectue une semblable permutation sur les équations proposées, elles deviennent

$$(9)\quad \begin{cases} b_1 y + c_1 z + a_1 x = k_1, \\ b_2 y + c_2 z + a_2 x = k_2, \\ b_3 y + c_3 z + a_3 x = k_3, \end{cases}$$

et ne changent pas. Concevons que l'on répète sur ce système d'équations les calculs que nous venons de faire sur le système primitif; il suffira d'effectuer la permutation circulaire des lettres dans toute la suite des calculs; les quantités A_1, A_2, A_3 seront remplacées par les quantités

$$(10)\quad B_1 = c_2 a_3 - a_2 c_3,\quad B_2 = c_3 a_1 - a_3 c_1,\quad B_3 = c_1 a_2 - a_1 c_2,$$

satisfaisant aux relations

$$(11)\quad \begin{cases} c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3 = 0, \\ a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 = 0; \end{cases}$$

les coefficients de z et de x dans l'équation analogue à l'équation (4) seront nuls, et, au lieu de l'équation (6), on aura

$$(12)\quad (b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3)y=k_1B_1+k_2B_2+k_3B_3,$$

d'où l'on déduit

$$(13)\qquad y=\frac{k_1B_1+k_2B_2+k_3B_3}{b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3},$$

et, en remplaçant B_1, B_2, B_3 par leurs valeurs,

$$(\beta)\quad y=\frac{k_1(c_2a_3-a_2c_3)+k_2(c_3a_1-a_3c_1)+k_3(c_1a_2-a_1c_2)}{b_1(c_2a_3-a_2c_3)+b_2(c_3a_1-a_3c_1)+b_3(c_1a_2-a_1c_2)}.$$

Si l'on effectue sur le système (9) une nouvelle permutation circulaire, les quantités B_1, B_2, B_3 sont remplacées par les quantités

$$(14)\quad C_1=a_2b_3-b_2a_3,\quad C_2=a_3b_1-b_3a_1,\quad C_3=a_1b_2-b_1a_2,$$

satisfaisant aux relations

$$(15)\qquad \begin{cases} a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3=0,\\ b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3=0,\end{cases}$$

et l'on a l'équation

$$(16)\quad (c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3)z=k_1C_1+k_2C_2+k_3C_3,$$

d'où l'on déduit

$$(17)\qquad z=\frac{k_1C_1+k_2C_2+k_3C_3}{c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3},$$

ou

$$(\gamma)\quad z=\frac{k_1(a_2b_3-b_2a_3)+k_2(a_3b_1-b_3a_1)+k_3(a_1b_2-b_1a_2)}{c_1(a_2b_3-b_2a_3)+c_2(a_3b_1-b_3a_1)+c_3(a_1b_2-b_1a_2)}.$$

126. Remarque I. On reconnaît aisément que, dans les trois formules (α), (β), (γ), le dénominateur est le même; ce polynôme, formé avec les neuf coefficients des inconnues dans les équations proposées, s'appelle le *déterminant* de ces neuf quantités, dans l'ordre où elles sont placées;

nous le désignerons par Δ. On a donc

$$(18)\quad \Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3.$$

On forme chaque numérateur en remplaçant dans le dénominateur les coefficients de l'inconnue que l'on considère par les seconds membres des équations proposées.

Remarque II. Lorsqu'on effectue la permutation circulaire des trois indices 1, 2, 3, les trois équations proposées se permutent circulairement, et par conséquent le système ne change pas; chacune des formules (α), (β), (γ) doit donc conserver la même valeur, après cette permutation des indices. C'est ce qui a lieu effectivement; car les trois termes du dénominateur se permutent circulairement, ainsi que ceux du numérateur. Pour écrire les formules générales, il suffit donc de se rappeler le premier terme a_1A_1, ou $a_1(b_2c_3 - c_2b_3)$ du déterminant; par la permutation des indices, on en déduira le second, et de celui-ci le troisième; on obtient ainsi le déterminant sous sa première forme $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$. La seconde forme $b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3$ se déduit de la première par la permutation circulaire des lettres a, b, c et la troisième de la seconde.

On peut encore écrire le déterminant sous les trois formes suivantes :

$$(19)\quad \Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3.$$

Le second terme b_1B_1 se déduit du premier a_1A_1 par la permutation circulaire des lettres et le troisième du second. La seconde forme se déduit de la première par la permutation des indices et la troisième de la seconde.

Les neuf quantités A, B, C satisfont aux six relations

(5), (11), (15). Elles satisfont aussi aux six relations

$$(20)\qquad \begin{cases} a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0, \\ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0; \end{cases}$$

$$(21)\qquad \begin{cases} a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 = 0, \\ a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0; \end{cases}$$

$$(22)\qquad \begin{cases} a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0, \\ a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 = 0. \end{cases}$$

Discussion.

127. Premier cas. Supposons que le déterminant Δ soit différent de zéro. Puisque tout système de valeurs des inconnues qui satisfont aux équations proposées satisfont aux équations (6), (12), (16) que l'on en déduit, et que ces dernières ne sont satisfaites que par les valeurs de x, y, z données par les formules (7), (13), (17), les équations proposées ne peuvent admettre une autre solution. On vérifie aisément que ces valeurs satisfont bien aux équations proposées; car, si l'on remplace x, y, z par ces valeurs, et si l'on ordonne par rapport à k_1, k_2, k_3, le premier membre de l'équation (1) devient

$$\frac{1}{\Delta}[k_1(a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1)+k_2(a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2)+k_3(a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3)];$$

en vertu des relations précédentes, les coefficients de k_2 et de k_3 sont nuls, et celui de k_1 égal à Δ; ainsi l'équation (1) est satisfaite. Il en est de même des deux autres. Ainsi, *lorsque le déterminant est différent de zéro, les trois équations admettent une solution et une seule.*

128. Second cas. Supposons que le déterminant soit égal à zéro, et que l'un des numérateurs, par exemple $k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3$, soit différent de zéro. L'une au moins

des trois quantités binômes A_1, A_2, A_3, par exemple A_3, sera différente de zéro. Dans la première opération, l'équation (3), dont les termes ont été multipliés par une quantité A_3 différente de zéro, peut être remplacée par l'équation (6), c'est-à-dire que le système des trois équations proposées est équivalent au système des trois équations (1), (2), (6); cette dernière étant impossible, on en conclut que les équations proposées sont incompatibles.

129. TROISIÈME CAS. Considérons enfin le cas où le déterminant est nul, ainsi que les trois numérateurs.

1° Supposons que l'une au moins des neuf quantités binômes A, B, C soit différente de zéro, par exemple A_3. Le système des trois équations proposées est équivalent au système des trois équations (1), (2), (6); cette dernière se réduisant à une identité $0=0$, le système des trois équations est équivalent au système des deux équations (1) et (2), que nous mettrons sous la forme

$$b_1y+c_1z=k_1-a_1x,$$
$$b_2y+c_2z=k_2-a_2x;$$

attribuant à x une valeur quelconque, nous les regarderons comme deux équations à deux inconnues y et z; le déterminant $A_3=b_1c_2-c_1b_2$ relatif à ces deux équations étant différent de zéro, à chaque valeur de x correspond un système de valeurs de y et z. Le système proposé admet donc une infinité de solutions; il y a indétermination.

2° Lorsque les neuf quantités binômes A, B, C sont nulles à la fois, on ne peut plus dire que le système des trois équations proposées est équivalent au système des trois équations (1), (2), (6), parce que, pour obtenir cette dernière, on a multiplié les termes des équations propo-

sées par des quantités nulles A_1, A_2, A_3. Supposons que l'un au moins des neuf coefficients a, b, c des inconnues dans les équations proposées, par exemple a_1, soit différent de zéro. Des relations

$$B_2 = c_3a_1 - a_3c_1 = 0 \quad , \quad B_3 = c_1a_2 - a_1c_2 = 0,$$
$$C_2 = a_3b_1 - b_3a_1 = 0 \quad , \quad C_3 = a_1b_2 - b_1a_2 = 0,$$

on déduit

$$c_3 = \frac{a_3c_1}{a_1} \quad , \quad c_2 = \frac{a_2c_1}{a_1} \quad , \quad b_3 = \frac{a_3b_1}{a_1} \quad , \quad b_2 = \frac{a_2b_1}{a_1},$$

et les trois équations proposées sont de la forme

$$a_1x + b_1y + c_1z = k_1,$$
$$a_2(a_1x + b_1y + c_1z) = a_1k_2,$$
$$a_3(a_1x + b_1y + c_1z) = a_1k_3.$$

Pour qu'elles admissent une solution, il faudrait que l'on eût

$$a_2k_1 = a_1k_2 \quad , \quad a_3k_1 = a_1k_3.$$

Si ces deux conditions ne sont pas remplies, il y a impossibilité. Si elles le sont, les trois équations se réduisent à une seule

$$a_1x + b_1y + c_1z = k_1,$$

qui, résolue par rapport à x, donne

$$x = \frac{k_1 - b_1y - c_1z}{a_1};$$

on peut attribuer à y et à z des valeurs arbitraires; à chaque système de valeurs de y et z correspond une valeur déterminée de x. Dans ce cas, le système des équations proposées admet une infinité de solutions, et il y a indétermination ; mais l'indétermination se distingue de celle que nous avons rencontrée précédemment; car les

trois équations se réduisaient à deux; ici elles se réduisent à une seule. Dans le premier cas, une seule inconnue était arbitraire; maintenant deux sont arbitraires.

Si les neuf coefficients a, b, c des inconnues étaient nuls à la fois, il y aurait impossibilité ou indétermination absolue.

Exemples.

1° Résoudre le système des trois équations

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ ax + by + cz &= k, \\ a^2x + b^2y + c^2z &= k^2. \end{aligned}$$

Nous remarquons que ces équations se déduisent des équations générales, quand on remplace dans celles-ci les indices 1, 2, 3 par les exposants 0, 1, 2. Il suffit donc de faire la même hypothèse dans la formule (α), ce qui donne

$$x = \frac{(bc^2 - cb^2) + k(b^2 - c^2) + k^2(c - b)}{(bc^2 - cb^2) + a(b^2 - c^2) + a^2(c - b)}.$$

Le numérateur et le dénominateur contiennent le facteur $c - b$; si l'on supprime ce facteur, il vient

$$x = \frac{bc - k(b + c) + k^2}{bc - a(b + c) + a^2} = \frac{(k - b)(k - c)}{(a - b)(a - c)}.$$

La permutation circulaire des lettres a, b, c donne ensuite

$$y = \frac{(k - c)(k - a)}{(b - c)(b - a)}, \quad z = \frac{(k - a)(k - b)}{(c - a)(c - b)}.$$

Ces résultats sont conformes à ceux que nous avons trouvés dans le chapitre précédent.

2° Résoudre les trois équations

$$x+a(y+z)=\alpha,$$
$$y+b(z+x)=\beta,$$
$$z+c(x+y)=\gamma.$$

En appliquant la formule (α), on trouve

$$x=\frac{\alpha(1-bc)+\beta(ca-a)+\gamma(ab-a)}{(1-bc)+b(ca-a)+c(ab-a)},$$

ou

$$x=\frac{(1-bc)\alpha+a(c-1)\beta+a(b-1)\gamma}{1-bc-ca-ab+2abc}$$

Si dans les équations proposées on permute les lettres x, y, z, les lettres a, b, c et aussi les lettres α, β, γ, les équations se permutent et le système ne change pas. En effectuant ces permutations dans la formule précédente, on obtiendra

$$y=\frac{(1-ca)\beta+b(a-1)\gamma+b(c-1)\alpha}{1-bc-ca-ab+2abc};$$

puis

$$z=\frac{(1-ab)\gamma+c(b-1)\alpha+c(a-1)\beta}{1-bc-ca-ab+2abc}.$$

3° Résoudre les équations

$$a_1x+b_3y+b_2z=k_1,$$
$$b_3x+a_2y+b_1z=k_2,$$
$$b_2x+b_1y+a_3z=k_3.$$

La formule (α) donne

$$x=\frac{k_1(a_2a_3-b_1^2)+k_2(b_1b_2-a_3b_3)+k_3(b_3b_1-a_2b_2)}{a_1(a_2a_3-b_1^2)+b_3(b_1b_2-a_3b_3)+b_2(b_3b_1-a_2b_2)},$$

ou

$$x=\frac{k_1(a_2a_3-b_1^2)+k_2(b_1b_2-a_3b_3)+k_3(b_3b_1-a_2b_2)}{a_1a_2a_3-a_1b_1^2-a_2b_2^2-a_3b_3^2+2b_1b_2b_3}.$$

Le système des équations proposées ne change pas,

quand on permute circulairement les trois lettres x, y, z et les trois indices 1, 2, 3. De la valeur de x on déduit par cette permutation

$$y = \frac{k_2(a_3a_1 - b_2^2) + k_3(b_2b_3 - a_1b_1) + k_1(b_1b_2 - a_3b_3)}{a_1a_2a_3 - a_1b_1^2 - a_2b_2^2 - a_3b_3^2 + 2b_1b_2b_3},$$

$$z = \frac{k_3(a_1a_2 - b_3^2) + k_1(b_3b_1 - a_2b_2) + k_2(b_2b_3 - a_1b_1)}{a_1a_2a_3 - a_1b_1^2 - a_2b_2^2 - a_3b_3^2 + 2b_1b_2b_3}.$$

Exercices sur le Livre II.

QUESTION I. **Résoudre le système des trois équations**

$$2x + 4y - 3z = 22,$$
$$4x - 2y + 5z = 18,$$
$$6x + 7y - z = 63.$$

Réponse : $x = 3$, $y = 7$, $z = 4$.

QUESTION II. Résoudre les trois équations

$$x + \frac{y}{2} = 1,$$
$$y + \frac{z}{3} = 1,$$
$$z + \frac{x}{4} = 1.$$

Réponse : $x = \frac{16}{25}$, $y = \frac{18}{25}$, $z = \frac{21}{25}$.

QUESTION III. Résoudre les trois équations

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 41,$$
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 31,$$
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 25.$$

Réponse : $x = 12$, $y = 60$, $z = 60$.

QUESTION IV. **Résoudre les quatre équations**

$$4x - 3y + 2u = 9,$$
$$2x + 6z = 28,$$
$$4u - 2y = 14,$$
$$3x + 4u = 26.$$

Réponse : $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$, $u = 5$.

Question V. Résoudre les quatre équations

$$\begin{aligned} x - y + z - u &= -2, \\ y - 2z + 3u - 4x &= 4, \\ z - 3u + 6x - 15y &= -33, \\ u - 4x + 10y - 20z &= -40. \end{aligned}$$

Réponse : $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $u = 4$.

Question VI. Résoudre les trois équations

$$\begin{aligned} x + ay + a^2z + a^3 &= 0, \\ x + by + b^2z + b^3 &= 0, \\ x + cy + c^2z + c^3 &= 0. \end{aligned}$$

Réponse :

$$\begin{aligned} z &= -(a + b + c), \\ y &= bc + ca + ab, \\ x &= -abc. \end{aligned}$$

Question VII. Résoudre les quatre équations

$$\begin{aligned} x + ay + a^2z + a^3u + a^4 &= 0, \\ x + by + b^2z + b^3u + b^4 &= 0, \\ x + cy + c^2z + c^3u + c^4 &= 0, \\ x + dy + d^2z + d^3u + d^4 &= 0. \end{aligned}$$

Réponse :

$$\begin{aligned} u &= -(a + b + c + d), \\ z &= ab + ac + ad + bc + bd + cd, \\ y &= -(abc + bcd + cda + dab), \\ x &= abcd. \end{aligned}$$

Question VIII. Résoudre les équations

$$\begin{aligned} x + ay + bz &= \alpha, \\ y + az + bx &= \beta, \\ z + ax + by &= \gamma. \end{aligned}$$

Question IX. Résoudre les équations

$$\begin{aligned} x + ay &= \alpha, \\ y + bz &= \beta, \\ z + ct &= \gamma, \\ t + du &= \delta, \\ u + ex &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Question X. Résoudre les équations n à n inconnues

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n &= \alpha_1, \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + \cdots + nx_1 &= \alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n + 2x_1 + 3x + \cdots + nx_{n-1} &= \alpha_n. \end{aligned}$$

Question XI. En alliant deux lingots d'argent dans des rapports donnés, on a formé deux nouveaux lingots dont les titres sont connus. Quels sont les titres des deux premiers lingots ?

En appelant a et $1 - a$ les poids des deux lingots qui entrent dans un kilogramme du premier alliage, a' et $1 - a'$ les poids des deux lingots qui entrent dans un kilogramme du second alliage, b et b' les titres des deux alliages, x et y les titres des deux lingots, on a les équations

$$ax + (1 - a)y = b,$$
$$a'x + (1 - a')y = b';$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{(1 - a')b - (1 - a)b'}{a - a'}$$
$$y = \frac{ab' - ba'}{a - a'}.$$

Question XII. Connaissant la composition et les prix de trois mélanges formés de trois substances différentes, trouver les prix de ces trois substances.

Question XIII. Trois joueurs conviennent que le perdant doublera l'argent des deux autres. Ils perdent chacun une partie, et à la fin ils ont chacun la même somme a. Combien chacun avait-il au commencement?

Réponse : $\frac{13a}{8}, \quad \frac{7a}{8}, \quad \frac{4a}{8}.$

Question XIV. Même question étendue à un nombre quelconque n de joueurs.

Réponse : $\frac{(1 + n2^{n-1})a}{2^n}, \quad \frac{(1 + n2^{n-2})a}{2^n}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \frac{(1 + n)a}{2^n}.$

Question XV. On partage une certaine somme entre plusieurs personnes de la manière suivante : la première prend une somme a et la n^e partie de ce qui reste ; la deuxième une somme $2a$ et la n^e partie de ce qui reste ; la troisième une somme $3a$ et la n^e partie de ce qui reste, et ainsi de suite. Il se trouve à la fin que la somme d'argent a été partagée exactement et que toutes les parts sont égales. On demande quel est le nombre des personnes et la part de chacune.

Réponse. Le nombre des personnes est $n - 1$; la part de chacune $a(n - 1)$, et la somme totale $a(n - 1)^2$.

Question XVI. Un tonneau contient a litres de vin. On tire un litre que l'on remplace par un litre d'eau ; on tire un second litre

que l'on remplace par un litre d'eau, et ainsi de suite. Quelle quantité de vin contiendra encore le tonneau après n opérations de ce genre?

Réponse : $$\frac{(a-1)^n}{a^{n-1}}.$$

QUESTION XVII. Deux vases de capacités données contiennent chacun un mélange connu d'eau et de vin. Quelle capacité doivent avoir deux vases égaux, pour que, les remplissant à la fois, l'un dans l'un des vases donnés, l'autre dans l'autre, et versant dans chacun d'eux ce qui a été pris dans l'autre, la proportion du mélange devienne la même dans les deux vases?

QUESTION XVIII. Inscrire dans un triangle donné un rectangle semblable à un rectangle donné.

QUESTION XIX. Dans un triangle donné, inscrire un rectangle de périmètre donné.

QUESTION XX. Un groupe de n joueurs jouent de la manière suivante : le premier joue avec le deuxième et perd une fraction a de ce qu'il a, le second joue ensuite avec le troisième et perd la même fraction a de ce qu'il a en ce moment, et ainsi de suite; enfin le dernier joue avec le premier et perd la fraction a de ce qu'il a. A la fin du jeu, les joueurs ont la même somme b. Quelle somme chacun avait-il au commencement?

QUESTION XXI. Résoudre les équations

$$\frac{x}{a-\alpha}+\frac{y}{b-\alpha}+\frac{z}{c-\alpha}=1,$$

$$\frac{x}{a-\beta}+\frac{y}{b-\beta}+\frac{z}{c-\beta}=1,$$

$$\frac{x}{a-\gamma}+\frac{y}{b-\gamma}+\frac{z}{c-\gamma}=1.$$

QUESTION XXII. Couper une sphère donnée par un plan, de manière que la surface de la calotte sphérique soit égale à la surface latérale du cône qui a pour sommet le centre de la sphère et pour base le cercle déterminé par le plan sécant.

LIVRE III

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER

CARRÉ ET RACINE CARRÉE.

Je rappelle d'abord quelques principes qui ont déjà été vus en arithmétique et qui seront utiles par la suite.

130. THÉORÈME I. *Le carré d'un binôme égale le carré du premier terme, plus deux fois le produit du premier par le second, plus le carré du second.*

Si l'on multiplie le binôme $a+b$ par lui-même, on trouve en effet

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ainsi le carré du binôme $x-3$ est

$$x^2 - 6x + 9.$$

Le carré du binôme $x+\frac{p}{2}$ est

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

131. THÉORÈME II. *On élève au carré le produit de plusieurs facteurs en élevant chaque facteur séparément au carré.*

Si l'on multiplie le produit abc par lui-même, d'après la règle de la multiplication des monômes, on trouve en effet

$$(abc)^2 = a^2b^2c^2.$$

COROLLAIRE. *On élève au carré un monôme entier, en élevant le coefficient au carré et doublant tous les exposants.* Soit, par exemple, le monôme $7a^3b^2c$; en le multipliant par lui-même, on a

$$(7a^3b^2c)^2 = 49a^6b^4c^2.$$

132. THÉORÈME III. Réciproquement, *on extrait la racine carrée d'un produit de plusieurs facteurs en extrayant la racine carrée de chaque facteur séparément.*

Soit le produit abc. Je dis que

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}.$$

En effet, si l'on élève le second membre au carré, ce que l'on fait en élevant chaque facteur séparément au carré, on reproduit la quantité abc.

133. COROLLAIRE I. *On extrait la racine carrée d'un monôme entier en extrayant la racine carrée du coefficient et divisant par deux tous les exposants.* Je dis, par exemple, que

$$\sqrt{49a^6b^4c^2} = 7a^3b^2c.$$

Car, si l'on élève le second membre au carré, on reproduit $49a^6b^4c^2$.

Pour qu'un monôme entier soit carré parfait, c'est-à-dire pour qu'il existe un monôme entier, qui, élevé au carré, reproduise le nombre proposé, il est nécessaire que son coefficient soit un nombre carré parfait et que tous ses exposants soient pairs.

134. COROLLAIRE II. *On fait sortir du signe radical un*

facteur carré parfait, en en prenant la racine carrée. Soit l'expression

$$\sqrt{a^2b}.$$

En extrayant la racine de chaque facteur séparément, on a

$$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}.$$

Ceci permet de simplifier les expressions irrationnelles. Soit l'expression irrationnelle

$$\sqrt{12a^7b^4c^3}.$$

On remarque que la quantité placée sous le signe radical peut être décomposée en deux facteurs

$$12a^7b^4c^3=4a^6b^4c^2\times 3ac,$$

dont le premier est carré parfait. Si l'on extrait la racine de chacun des deux facteurs séparément, on a

$$\sqrt{12a^7b^4c^3}=2a^3b^2c\sqrt{3ac}.$$

Réciproquement, *on introduit un facteur sous le signe radical en l'élevant au carré.* Ainsi

$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}.$$

135. Théorème IV. *On élève une fraction au carré, en élevant séparément au carré le numérateur et le dénominateur.*

Car, si l'on multiplie la fraction $\frac{a}{b}$ par elle-même, on a

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}.$$

136. Théorème V. Réciproquement, *on extrait la racine carrée d'une fraction en extrayant séparément la racine du numérateur et celle du dénominateur.*

Ainsi $$\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Car, si l'on élève le second membre au carré, on reproduit la fraction $\frac{a}{b}$.

Transformation des expressions irrationnelles.

137. On simplifie le calcul des expressions irrationnelles en transformant ces expressions de manière à rendre le dénominateur rationnel. Voici quelques exemples de semblables transformations qui sont fréquemment usitées en algèbre :

1° En multipliant les deux termes de la fraction $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ par $\sqrt{5}$, on a

$$\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

2° Soit l'expression

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, le dénominateur, étant le produit de la somme de deux quantités par leur différence, est égal à la différence $a-b$ de leurs carrés, et devient rationnel. On a donc

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}.$$

On a de même

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b},$$

en multipliant le numérateur et le dénominateur par la somme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Exemple :

$$\frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{7}(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{2}=2\sqrt{35}+3\sqrt{14}.$$

On a multiplié le numérateur et le dénominateur par la somme $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}$, ce qui rend le dénominateur égal à la différence des carrés, $4\times 5-9\times 2=20-18=2$. On a supprimé le facteur 2 commun au numérateur et au dénominateur, puis on a multiplié $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}$ par $\sqrt{7}$, ce qui donne $2\sqrt{35}+3\sqrt{14}$; car $\sqrt{5}\times\sqrt{7}=\sqrt{5\times 7}=\sqrt{35}$, et de même $\sqrt{2}\times\sqrt{7}=\sqrt{2\times 7}=\sqrt{14}$.

3° Soit l'expression

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}.$$

Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur par la différence $(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}$, en considérant $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ comme ne formant qu'un seul terme, on a

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c}=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{a+b-c+2\sqrt{ab}}.$$

Cette dernière expression ne renferme plus qu'un seul terme irrationnel à son dénominateur. On considérera $a+b-c$ comme ne formant qu'un terme et l'on multipliera par la différence $(a+b-c)-2\sqrt{ab}$; l'expression devient ainsi

$$\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab};$$

le dénominateur est rationnel.

CHAPITRE II

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

Résolution de l'équation $x^2 = \text{A}$.

138. Toute équation du second degré à une inconnue peut être mise sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dans laquelle x désigne l'inconnue, et les lettres a, b, c des quantités connues. Elle contient trois termes, un du second degré ax^2, un du premier degré bx, et un terme connu c.

Considérons d'abord le cas où l'équation ne renferme pas de terme du premier degré. Soit, par exemple, l'équation

$$x^2 = 25.$$

Il faut trouver une quantité qui, élevée au carré, donne 25. Or le nombre 5, élevé au carré, donne 25; que l'on affecte ce nombre 5 du signe + ou du signe —, son carré sera toujours égal à 25; car on sait que le carré d'une quantité négative est positif. Ainsi l'équation admet les deux solutions $+5$ et -5, ce qu'on écrit

$$x = \pm 5,$$

(*lisez* x égale plus ou moins 5). L'équation n'admet aucune autre solution; car le nombre 5 est le seul nombre dont le carré égale 25.

En général, soit l'équation

$$x^2 = \text{A},$$

dans laquelle A représente une quantité positive donnée. Désignons par $\sqrt{A}$ le nombre, commensurable ou incommensurable, dont le carré est A; ce nombre, affecté du signe + ou du signe —, aura toujours son carré égal à A; ainsi l'équation proposée admet deux solutions égales et de signes contraires $+\sqrt{A}$ et $-\sqrt{A}$, ce qu'on écrit

$$x = \pm\sqrt{A}.$$

Ces solutions s'appellent aussi les *racines* de l'équation, parce qu'on les obtient au moyen de l'extraction d'une racine carrée. Mais cette dénomination a été étendue aux solutions des équations de tous les degrés.

Résolution de l'équation $x^2 + px + q = 0$.

139. Considérons maintenant l'équation générale du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Si nous divisons tous les termes par le coefficient a, cette équation devient

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

ou

$$x^2 + px + q = 0,$$

en représentant pour abréger par les lettres p et q les quantités connues $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$.

Afin de mieux faire comprendre la méthode, nous l'expliquerons d'abord sur un exemple. Soit l'équation

$$x^2 - 14x + 40 = 0.$$

Si l'on fait passer dans le second membre le terme connu, cette équation devient

$$x^2 - 14x = -40.$$

Les deux termes x^2-14x peuvent être considérés comme les deux premiers termes du carré du binôme $x-7$; et, en effet, le carré de ce binôme est $x^2-14x+49$; pour compléter le carré, ajoutons 49 aux deux membres de l'équation, nous aurons

$$x^2-14x+49=49-40=9,$$

ou

$$(x-7)^2=9,$$

en remplaçant le premier membre par l'expression équivalente $(x-7)^2$. Cette dernière équation est évidemment équivalente à l'équation proposée.

La quantité inconnue $x-7$ doit avoir une valeur telle que son carré soit égal à 9; or le nombre 3, affecté du signe + ou du signe —, a son carré égal à 9, et c'est le seul nombre dont le carré soit égal à 9; on doit donc avoir

$$x-7=\pm 3,$$

d'où

$$x=7\pm 3.$$

Ainsi l'équation proposée admet les deux solutions

$$x=7+3=10,$$
$$x=7-3=4.$$

On peut vérifier que chacun des nombres 10 et 4, mis à la place de x, satisfait à l'équation

$$x^2-14x+40=0,$$

c'est-à-dire annule le premier membre.

140. La méthode précédente s'applique sans difficulté à l'équation générale

$$(1)\qquad x^2+px+q=0.$$

Si l'on fait passer le terme connu dans le second membre, cette équation devient

$$x^2+px=-q.$$

Les deux termes x^2+px sont les deux premiers termes du carré du binôme $x+\frac{p}{2}$; et en effet, si l'on forme le carré de ce binôme d'après la loi connue, on a

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$$

Si, pour compléter le carré, on ajoute $\frac{p^2}{4}$ aux deux membres, l'équation devient

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q,$$

et peut être mise sous la forme

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Nous supposons que la quantité connue $\frac{p^2}{4}-q$ est positive. L'équation étant mise sous cette dernière forme, on voit que la quantité inconnue $x+\frac{p}{2}$ doit avoir une valeur telle que son carré soit égal à la quantité connue $\frac{p^2}{4}-q$; or, si nous désignons par $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ la racine carrée arithmétique du nombre positif $\frac{p^2}{4}-q$, c'est-à-dire le nombre positif, commensurable ou incommensurable, dont le carré est $\frac{p^2}{4}-q$, la quantité inconnue $x+\frac{p}{2}$ doit être égale au nombre $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, affecté du signe $+$ ou du signe $-$. On aura donc

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

d'où l'on déduit

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \qquad (2)$$

Telle est la formule générale dont on se sert pour résoudre les équations du second degré ; elle donne deux solutions, l'une fournie par le signe $+$ placé devant le radical, l'autre par le signe $-$. Il est bon de se la rappeler par cœur ; on l'énonce ainsi : *les deux racines d'une équation du second degré, mise sous la forme*

$$x^2 + px + q = 0,$$

égalent la moitié du coefficient du terme du premier degré changé de signe, plus ou moins la racine carrée du résultat que l'on obtient en retranchant du carré de cette moitié le terme connu.

141. Appliquons cette formule à quelques exemples :

1° Résoudre l'équation

$$x^2 + 6x + 8 = 0.$$

La formule donne

$$x = -3 \pm \sqrt{9-8} = -3 \pm \sqrt{1} = -3 \pm 1.$$

L'équation admet les deux solutions

$$x = -2 \quad , \quad x = -4.$$

2° Résoudre l'équation

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

La formule donne

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

L'équation admet les deux solutions

$$x = 5 \quad , \quad x = 2.$$

3° Résoudre l'équation

$$x^2+4x-12=0.$$

La formule donne

$$x=-2\pm\sqrt{4+12}=-2\pm\sqrt{16}=-2\pm4.$$

L'équation admet les deux solutions

$$x=+2 \quad , \quad x=-6.$$

4° Résoudre l'équation

$$x^2-3x-4=0.$$

La formule donne

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}.$$

L'équation admet les deux solutions

$$x=4 \quad , \quad x=-1.$$

Racines égales.

142. Dans ce qui précède, après avoir mis l'équation du second degré sous la forme

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q,$$

nous avons supposé que le second membre est une quantité positive, et nous en avons déduit la formule

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

qui nous donne les *deux* racines, ou les deux solutions de l'équation.

Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ est nulle, l'équation devient

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0.$$

Le premier membre est un carré parfait. La quantité inconnue $x+\frac{p}{2}$, devant avoir son carré nul, doit être nulle elle-même ; ainsi l'on a

$$x+\frac{p}{2}=0,$$

d'où

$$x=-\frac{p}{2}.$$

L'équation n'admet plus qu'une seule solution $x=-\frac{p}{2}$.

Cependant on a coutume de dire que, dans ce cas, l'équation admet *deux racines égales*. En voici la raison : supposons que la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ soit positive et très-petite ; les deux racines, données par la formule générale, différeront très-peu de $-\frac{p}{2}$, l'une en plus, l'autre en moins, et par conséquent différeront très-peu l'une de l'autre. Plus la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ sera petite, plus les deux racines se rapprocheront l'une de l'autre ; et enfin, à la limite, quand la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ sera nulle, les deux racines deviendront égales entre elles.

Racines imaginaires.

143. Les carrés des quantités, soit positives, soit négatives, étant toujours positifs, il s'ensuit que les quantités négatives n'ont pas de racines carrées. Ainsi, lorsqu'en résolvant une équation du second degré, on est amené à extraire la racine carrée d'une quantité négative, il y a évidemment impossibilité de satisfaire à l'équation ; dans ce

cas, les formules donnent des valeurs fictives qui ont été introduites dans l'analyse mathématique sous le nom de quantités *imaginaires*.

Considérons d'abord l'équation

$$x^2 = A.$$

Quand la quantité A est positive, l'équation admet les deux solutions

$$x = \pm\sqrt{A}.$$

Mais quand la quantité A est négative, comme il n'existe aucun nombre, soit positif, soit négatif, dont le carré égale A, il y a impossibilité de satisfaire à l'équation. Cependant la formule donne des valeurs imaginaires qui satisfont à l'équation, si l'on convient de regarder le symbole $\sqrt{A}$ comme ayant toujours son carré égal à A, quelle que soit la valeur de A, positive ou négative.

Ainsi on dira que l'équation

$$x^2 = -1$$

admet les deux solutions imaginaires

$$x = \pm\sqrt{-1}.$$

On représente ordinairement par la lettre i le symbole $\sqrt{-1}$, et l'on introduit la lettre i dans les calculs, comme si elle représentait une quantité réelle, en convenant que son carré i^2 égale -1.

Toutes les valeurs imaginaires peuvent être exprimées au moyen du symbole $\sqrt{-1}$, ou de la lettre i. Par exemple, l'équation

$$x^2 = -9$$

admet les deux solutions imaginaires

$$x = \pm\sqrt{-9}.$$

Si l'on observe que $-9=9\times(-1)$ et si l'on applique le théorème ordinaire sur la racine d'un produit (n° 132), on écrira

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9}\times\sqrt{-1}=3i,$$

d'où

$$x=\pm 3i.$$

Considérons maintenant l'équation

$$x^2-6x+13=0,$$

qui se met sous la forme

$$(x-3)^2=-4.$$

Un carré ne pouvant être égal à la quantité négative -4, il est impossible de satisfaire à l'équation par des valeurs réelles. Mais, en extrayant la racine, on est conduit aux valeurs imaginaires

$$x-3=\pm\sqrt{-4},$$

d'où

$$x=3\pm\sqrt{-4};$$

en observant que $\sqrt{-4}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=2i$, on les écrira

$$x=3\pm 2i.$$

144. Il en est de même de l'équation générale

$$x^2+px+q=0,$$

toutes les fois que la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ est négative. Car, cette équation étant mise sous la forme

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q,$$

on voit qu'il y a impossibilité d'y satisfaire par des valeurs réelles; mais on obtient les valeurs imaginaires

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

qui satisfont à l'équation, en convenant, comme nous l'a-

vons dit déjà, que le carré du symbole $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ égale $\frac{p^2}{4}-q$ dans tous les cas. Il en résulte pour x les deux valeurs imaginaires

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

ou

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\times\sqrt{-1}.$$

On ramène ainsi ces deux valeurs à la forme $a\pm bi$, en représentant par a et b les deux quantités réelles $-\frac{p}{2}$ et $\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$.

Ainsi les quantités *imaginaires* sont des expressions de la forme

$$a+bi,$$

dans laquelle les lettres a et b représentent des quantités réelles quelconques (par opposition, on dit que les quantités ordinaires, positives ou négatives, sont *réelles*). On a étendu aux quantités imaginaires les règles ordinaires du calcul algébrique, comme si la lettre i désignait une quantité réelle, en convenant de remplacer dans les résultats i^2 par -1.

En résumant ce qui précède, on voit que l'équation du second degré $x^2+px+q=0$, présente trois cas principaux :

1° Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ est *positive*, l'équation a ses deux racines *réelles* et *inégales*.

2° Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est *nulle*, l'équation a ses deux racines *égales*. Ces deux racines égales sont toujours réelles; car, dans ce cas, le radical est nul.

3° Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est *négative*, l'équation a ses deux racines *imaginaires*.

Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

145. Nous avons ramené l'équation générale du second degré

$$(3) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

à la forme

$$(1) \qquad x^2 + px + q = 0,$$

en divisant tous ses termes par le premier coefficient a, et posant

$$p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}.$$

Résolvant cette dernière, nous avons trouvé la formule

$$(2) \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Si, dans cette formule, nous remplaçons les lettres p et q par leurs valeurs $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$, elle devient

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Nous avons réduit au même dénominateur $4a^2$ les deux termes placés sous le radical, et nous avons extrait la racine de ce dénominateur, carré parfait. Nous obtenons ainsi la formule

$$(4) \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

qui est souvent usitée dans la pratique.

Elle présente les mêmes cas principaux que la formule primitive : 1° quand $b^2 - 4ac > 0$, les deux racines sont réelles et inégales ; 2° quand $b^2 - 4ac = 0$, les deux racines sont égales ; 3° quand $b^2 - 4ac < 0$, les racines sont imaginaires.

146. REMARQUE. Il arrive souvent que le coefficient b contient le facteur 2. Dans ce cas, la formule peut être un peu simplifiée, ce qui la rend plus commode dans les applications. Posons $b = 2b'$, la formule devient

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a},$$

et si l'on divise par 2 le numérateur et le dénominateur,

$$(5) \qquad x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Soit, par exemple, l'équation

$$3x^2 - 14x + 13 = 0.$$

Le second coefficient étant un nombre pair, on emploiera la dernière formule, et l'on écrira

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 39}}{3} = \frac{7 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Décomposition du trinôme du second degré en facteurs du premier degré.

147. Soit le trinôme

$$x^2 + px + q,$$

dans lequel nous supposerons que la lettre x désigne une grandeur quelconque et tout à fait arbitraire. Si nous ajoutons et si nous retranchons $\frac{p^2}{4}$, la valeur du trinôme ne

change pas, et l'égalité

$$x^2+px+q=\left(x^2+px+\frac{p^2}{4}\right)-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$$

est vraie, quelle que soit la valeur de x. La première parenthèse est le carré du binôme $x+\frac{p}{2}$; la seconde peut être considérée comme le carré de $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. On a donc

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2.$$

Le second membre, qui est la différence des carrés de deux quantités, est égal au produit de la somme de ces deux quantités par leur différence, et se décompose ainsi en deux facteurs du premier degré,

$$\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-p}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right).$$

Si l'on pose

$$x'=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$x''=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

les deux parenthèses deviennent $x-x'$, $x-x''$, et le trinôme se met sous la forme

$$(x-x')(x-x'').$$

On peut annuler ce produit de deux manières, soit en donnant à x la valeur x', qui annule le premier facteur, soit en donnant à x la valeur x'', qui annule le second facteur; on retrouve ainsi par une autre méthode les deux racines x' et x'' de l'équation du second degré

$$x^2+px+q=0.$$

Cette décomposition du trinôme en deux facteurs du premier degré subsiste dans tous les cas, que les racines soient réelles ou imaginaires.

Applications. Considérons, par exemple, le trinôme

$$x^2 - 7x + 10.$$

Les deux racines du trinôme, c'est-à-dire de l'équation que l'on obtient en égalant ce trinôme à zéro, sont $x' = 2$, $x'' = 5$; on a donc

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5).$$

Cette égalité est vraie, quelle que soit la valeur de x.

Soit encore le trinôme

$$x^2 + 4x - 12.$$

Les deux racines du trinôme sont $x' = -6$, $x'' = 2$. On a donc identiquement, c'est-à-dire quelle que soit la valeur de x,

$$x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2).$$

148. La forme la plus générale du polynôme entier du second degré est

$$ax^2 + bx + c.$$

Si l'on met le coefficient a en facteur, et si l'on appelle p et q les quotients $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$, ce polynôme s'écrit

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + px + q).$$

Le polynôme entre parenthèses se décomposant en deux facteurs $x - x'$ et $x - x''$, on a l'égalité

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x''),$$

quelle que soit la valeur de x.

Les lettres x' et x'' désignent les deux racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Relations entre les coefficients et les racines de l'équation du second degré.

149. En appelant x' et x'' les deux racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

nous avons vu que le trinôme

$$x^2 + px + q$$

peut être décomposé en deux facteurs du premier degré

$$(x - x')(x - x'').$$

Si l'on effectue la multiplication indiquée par les parenthèses, on reproduira évidemment le polynôme proposé. Le produit des deux facteurs est

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x''.$$

Pour que ce polynôme soit le même que le polynôme

$$x^2 + px + q,$$

il faut que les coefficients soient les mêmes de part et d'autre. On a donc

$$x' + x'' = -p,$$
$$x'x'' = q.$$

Telles sont les deux relations fondamentales qui existent entre les racines de l'équation du second degré et les coefficients de l'équation; nous nous en servirons fréquemment. On les énonce ainsi : *L'équation du second degré étant ramenée à la forme*

$$x^2 + px + q = 0,$$

1° *la somme algébrique des deux racines est égale au coefficient de x changé de signe ;* 2° *leur produit est égal au terme connu.*

150. Il résulte de ce qui précède que deux quantités x'

et x'', dont on connaît la somme a et le produit b, sont les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - ax + b = 0.$$

Par exemple, si la somme est 8 et le produit 15, les deux nombres cherchés sont les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - 8x + 15 = 0,$$

savoir $$x' = 3 \quad , \quad x'' = 5.$$

On peut trouver de la même manière deux quantités, connaissant leur différence a et leur produit b. Si l'on désigne par x' et $-x''$ ces deux quantités, on a, en effet,

$$x' + x'' = a \quad , \quad x'x'' = -b,$$

et la question est ramenée à la précédente; les deux quantités x' et x'' sont les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Par exemple, si la différence est 2 et le produit 15, on a à résoudre l'équation du second degré

$$x^2 - 2x - 15 = 0,$$

dont les racines sont $x' = 5$, $x'' = -3$; les deux nombres cherchés sont 5 et 3.

151. REMARQUES. 1° Lorsque, dans l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0,$$

le terme connu q est négatif, les racines sont toujours réelles et inégales; car, dans ce cas, la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est essentiellement positive. En outre, ces deux racines sont de signes contraires, puisque leur produit est négatif.

Ainsi on peut dire *à priori* que l'équation

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

a ses deux racines réelles et de signes contraires. La somme

des deux racines étant égale à -4, la plus grande en valeur absolue est la racine négative. Ces deux racines sont -6 et $+2$, dont la somme est bien égale à -4 et le produit à -12.

2° Lorsque le terme connu est positif, pour savoir si les racines sont réelles, il est nécessaire d'examiner le signe de la quantité $\frac{p^2}{4} - q$. Quand cette quantité est positive, les deux racines sont réelles et de même signe, puisque leur produit est positif. La somme des deux racines étant égale à $-p$, ce signe commun est contraire à celui de p.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

La quantité $\frac{49}{4} - 10$ étant positive, les racines sont réelles. Leur produit étant positif, elles ont même signe. Leur somme étant égale à $+7$, elles sont positives. Ces deux racines sont $+2$ et $+5$, dont la somme est $+7$ et le produit $+10$.

Soit encore l'équation

$$x^2 + 6x + 8 = 0.$$

La quantité $9 - 8$ étant positive, les racines sont réelles. Le produit étant positif, elles ont même signe. Leur somme étant égale à -6, elles sont toutes deux négatives. Ces deux racines sont -4 et -2.

3° Lorsque le terme connu est très-petit en valeur absolue, le produit des deux racines étant très-petit, l'une d'elles a nécessairement une valeur numérique très-petite. Si le terme connu tend vers zéro, cette racine très-petite tendra aussi vers zéro. La somme des deux racines étant égale à $-p$ et

l'une d'elles étant nulle, l'autre est égale à $-p$. Au reste, dans ce cas, la résolution est facile, car l'équation se réduit à

$$x^2+px=0,$$

et se met sous la forme

$$x(x+p)=0.$$

On peut annuler ce produit de deux manières, en faisant, soit $x=0$, soit $x=-p$.

Exemples.

152. QUESTION I. Résoudre les deux équations

$$(1)\qquad y+2x=5,$$

$$(2)\qquad 2y^2-3x^2+10x=25.$$

Si de la première équation on tire la valeur de y,

$$(3)\qquad y=5-2x,$$

et qu'on la substitue dans la seconde, on arrive à l'équation du second degré

$$(4)\qquad x^2-6x+5=0.$$

Le système des deux équations proposées est équivalent au système des deux équations (3) et (4) (n°88). De cette dernière on déduit les deux valeurs $x=1$, $x=5$. En portant successivement chacune de ces deux valeurs dans l'équation (3), on obtient les deux valeurs correspondantes de y, savoir : $y=3$ et $y=5$. Ainsi les deux équations proposées admettent les deux solutions

1re *solution* : $x=1$, $y=3$,

2e *solution* : $x=5$, $y=-5$.

En général, la résolution de deux équations à deux inconnues, l'une du premier degré, l'autre du second degré

se ramène à la résolution d'une équation du second degré à une inconnue.

153. Question II. **Trouver deux nombres, sachant que la somme de leurs carrés est égale à 65, et leur produit à 28.**

On a les deux équations

$$x^2 + y^2 = 65, \tag{1}$$
$$xy = 28. \tag{2}$$

Si on les ajoute ou si on les retranche membre à membre, après avoir multiplié par 2 les deux membres de la seconde, on obtient les deux équations

$$x^2 + y^2 + 2xy = 121, \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 - 2xy = \quad 9. \tag{4}$$

En ajoutant ou retranchant membre à membre ces deux dernières équations, on retrouve les premières ; on en conclut que le système des équations proposées est équivalent au système des équations (3) et (4). Mais ces équations peuvent être mises sous la forme

$$(x + y)^2 = 121,$$
$$(x - y)^2 = \quad 9,$$

ou

$$x + y = \pm 11, \tag{5}$$
$$x - y = \pm \ 3. \tag{6}$$

On connaît ainsi la somme et la différence des deux inconnues ; on en déduit

$$x = \frac{\pm 11 \pm 3}{2}, \quad y = \frac{\pm 11 \mp 3}{2}. \tag{7}$$

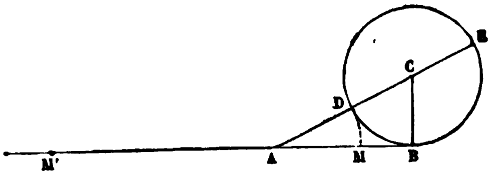
Les deux équations proposées admettent donc les quatre solutions

$$(8) \begin{cases} x = 7, & y = 4, \\ x = 4, & y = 7, \end{cases} \qquad (9) \begin{cases} x = -7, & y = -4, \\ x = -4, & y = -7. \end{cases}$$

Les deux équations proposées sont *symétriques* par rapport aux deux inconnues, c'est-à-dire ne changent pas quand on permute les lettres x et y; ainsi à toute solution $x=a$, $y=b$ doit correspondre la solution $y=a$, $x=b$; mais ces deux solutions des équations ne constituent en réalité qu'une solution du problème. D'après cela, nous dirons que le problème admet deux solutions; les nombres cherchés sont 7 et 4, ou -7 et -4.

184. QUESTION III. *Partager une droite donnée en moyenne et extrême raison.*

On sait que partager une droite AB en moyenne et extrême raison, c'est partager cette droite en deux parties AM et BM, telles que la plus grande AM soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière AB et la plus petite BM.



Si donc on appelle a la longueur de la droite AB, et x celle de la plus grande partie AM, la longueur de l'autre partie sera $a-x$, et l'on aura l'équation du second degré

$$(1)\qquad x^2=a(a-x),$$

ou

$$(2)\qquad x^2+ax-a^2=0.$$

On en déduit

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}.$$

L'une des racines

$$(3)\qquad x' = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

est positive et moindre que a (car $\sqrt{5}$ étant plus petit que 3, $\sqrt{5} - 1$ est plus petit que 2). Elle répond directement à la question proposée et donne la plus grande partie AM de la droite AB partagée en moyenne et extrême raison. Il est aisé de déduire de cette formule la construction géométrique connue. Si au point B on élève une perpendiculaire BC égale à la moitié de AB, l'hypoténuse AC sera égale à $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$. Si, du point C comme centre, avec CB pour rayon, on décrit un cercle, la longueur AD sera égale à AC — CD, c'est-à-dire à $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$; ce sera précisément la racine x'. Il suffit maintenant de prendre sur AB une longueur AM égale à AD.

L'autre racine

$$(4)\qquad x'' = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

est négative et ne répond pas à la question. Cependant il est facile de lui donner une interprétation géométrique. Il suffit pour cela de généraliser l'énoncé du problème de la manière suivante : *Sur la droite indéfinie* AB *trouver un point* M *tel que sa distance au point* A *soit moyenne proportionnelle entre la longueur* AB *et sa distance au point* B. La question ainsi posée admet deux solutions (*); car, outre le

(*) *Géométrie*, livre III.

point M que nous venons de déterminer, il existe à gauche de A un point M′ tel que la distance M′A est moyenne proportionnelle entre AB et M′B. Si l'on désigne par x la quantité $+AM$ ou $-AM'$, la distance MB ou M′B étant dans les deux cas représentée par $a-x$, l'équation (1) convient aux deux cas de la question. La racine positive x' donne le point M, la racine négative x'' le point M′.

On construira cette seconde solution comme la première; la longueur AE, étant égale à $AC+CE$, c'est-à-dire à $\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}+\frac{a}{2}$, est précisément la valeur absolue de x''; on prendra donc $AM'=AE$.

155. Question IV. *Trouver la profondeur d'un puits, en y laissant tomber une pierre, et notant le temps qui s'écoule entre le moment où on lâche la pierre et celui où l'on entend le bruit que fait la pierre en arrivant au fond du puits.*

Appelons x la profondeur du puits et t le temps que la pierre met à arriver au fond du puits. On sait que les corps en tombant parcourent des espaces proportionnels aux carrés des temps, de sorte que l'espace x parcouru par la pierre en t secondes sera $x=\frac{gt^2}{2}$, $\frac{g}{2}$ représentant l'espace parcouru dans la première seconde; on en déduit $t=\sqrt{\frac{2x}{g}}$. D'autre part, on sait que le son se propage uniformément avec une vitesse de 340 mètres par seconde, vitesse que nous appellerons v; ainsi le temps que met le son à remonter du fond du puits pour arriver à l'oreille est $\frac{x}{v}$. Mais le temps observé a est égal au temps que met la pierre à ar-

river au fond du puits, plus celui que le son emploie à revenir jusqu'en haut. On a donc l'équation

$$(1) \qquad \sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v} = a.$$

Si l'on fait passer le terme $\frac{x}{v}$ dans le second membre, l'équation devient

$$(2) \qquad \sqrt{\frac{2x}{g}} = a - \frac{x}{v}.$$

Si l'on élève les deux membres au carré, le radical disparaît et l'on obtient l'équation du second degré

$$(3) \qquad \frac{2x}{g} = \left(a - \frac{x}{v}\right)^2,$$

ou, en développant, et multipliant par v^2,

$$(4) \qquad x^2 - 2v\left(a + \frac{v}{g}\right)x + a^2v^2 = 0.$$

On en déduit

$$(5) \qquad x = v\left(a + \frac{v}{g}\right) \pm v\sqrt{\left(a + \frac{v}{g}\right)^2 - a^2},$$

ou, en simplifiant,

$$(6) \qquad x = v\left[a + \frac{v}{g} \pm \sqrt{\frac{v}{g}\left(\frac{v}{g} + 2a\right)}\right].$$

On voit que les racines sont réelles ; elles sont positives, puisque leur somme et leur produit sont positifs.

Il est évident *à priori* que la question proposée admet toujours une solution et n'en admet qu'une ; voici d'où proviennent les deux racines positives. L'équation du problème est l'équation (1), ou l'équation (2) ; or nous remarquons que l'équation (3), obtenue par l'élévation au carré, n'est pas équivalente à l'équation (2) ; car, si l'on élève au carré

les deux membres de l'équation

$$(7) \qquad -\sqrt{\frac{2x}{g}} = a - \frac{x}{v},$$

on obtient la même équation (3). Ainsi l'équation (3) admet, non-seulement les solutions de l'équation (2), mais encore celles de l'équation (7). Il faut donc examiner quelle est celle des racines trouvées qui convient à la question. La première, celle qui est donnée par le signe + placé devant le radical, ayant une valeur plus grande que av, rend négative l'expression $a - \frac{x}{v}$, et satisfait, par conséquent, non à l'équation (2), mais à l'équation (7) ; elle doit être rejetée.

L'autre racine

$$(8) \qquad x = v\left[a + \frac{v}{g} - \sqrt{\frac{v}{g}\left(\frac{v}{g} + 2a\right)}\right]$$

a une valeur moindre que av ; car la valeur du radical étant plus grande que $\frac{v}{g}$, la parenthèse est moindre que a ; elle satisfait donc à l'équation (2), c'est-à-dire à l'équation du problème. Ainsi la profondeur du puits est donnée par la formule (8).

156. Remarque I. Pour résoudre la question précédente, nous avons élevé au carré les deux membres d'une équation irrationnelle, ce qui nous a conduit à une équation entière du second degré, qui n'est pas équivalente à l'équation proposée.

Représentons d'une manière générale par

$$(1) \qquad A = B$$

une équation quelconque. Si l'on élève les deux membres

au carré, on obtient une équation

$$(2) \qquad A^2 = B^2,$$

qui, outre les solutions de l'équation (1), admet celle de l'équation

$$(3) \qquad A = -B.$$

Il est clair que, si l'une ou l'autre des équations (1) et (3) est vérifiée, l'équation (2) l'est également, et que, réciproquement, si l'équation (2) est vérifiée, l'une ou l'autre des équations (1) et (3) est satisfaite.

Considérons, par exemple, l'équation

$$(4) \qquad x - 1 = \sqrt{3x - 5}.$$

Si l'on élève les deux membres au carré, on obtient l'équation du second degré

$$(5) \qquad x^2 - 5x + 6 = 0,$$

qui admet, non-seulement les racines de l'équation (4), mais encore celles de l'équation conjuguée

$$(6) \qquad x - 1 = -\sqrt{3x - 5}.$$

Les deux racines de l'équation (5) sont $x = 2$ et $x = 3$; chacune d'elles rend positif le premier membre de l'équation (4); elles conviennent donc toutes les deux à l'équation (4) et aucune d'elles ne vérifie l'équation (6). Ici l'équation (5) est équivalente à l'équation (4).

De même, si l'on voulait résoudre l'équation

$$(7) \qquad 1 - x = \sqrt{3x - 5},$$

qui est la même que l'équation (6), on serait encore amené à l'équation (5); les deux racines, rendant négatif le premier membre de l'équation (7), conviennent à l'équation conjuguée (4); on en conclut que l'équation proposée (7) n'admet aucune solution.

Considérons encore l'équation irrationnelle

$$(8) \qquad x-1=\sqrt{x^2-3},$$

qui, par l'élévation au carré, conduit à l'équation du premier degré

$$x=2.$$

Cette valeur $x=2$, rendant positif le premier membre, convient à l'équation proposée. L'équation conjuguée

$$(9) \qquad 1-x=\sqrt{x^2-3}$$

n'admet aucune solution.

157. Remarque II. Considérons deux équations

$$(1) \qquad A=B,$$

$$(2) \qquad C=D,$$

à deux ou à un plus grand nombre d'inconnues; si l'on ajoute ou si l'on retranche ces deux équations membre à membre, après avoir élevé au carré les deux membres de la première, on forme une nouvelle équation

$$A^2 \pm C = B^2 \pm D,$$

qui peut remplacer la seconde, c'est-à-dire que le système des deux équations proposées est équivalent au système des deux équations

$$(1) \qquad A=B,$$

$$(3) \qquad A^2 \pm C = B^2 \pm D.$$

En effet, si pour certaines valeurs des inconnues les équations (1) et (2) sont satisfaites, l'équation (3) le sera aussi. Réciproquement, si les deux équations (1) et (3) sont satisfaites, l'équation (2) le sera aussi; car, si des quantités égales $A^2 \pm C$, $B^2 \pm D$ on retranche les quantités égales A^2 et B^2, on a des restes égaux C et D.

On peut généraliser ce principe et l'étendre à un nombre

quelconque d'équations. Soient, par exemple, trois équations

$$A=B \quad , \quad C=D \quad , \quad E=F,$$

à trois ou à un plus grand nombre d'inconnues ; on démontrera comme précédemment que ce système est équivalent au système des trois équations

$$A=B \;,\; C=D \;,\; mA^2+nC^2+pE=mB^2+nD^2+pF,$$

m, n, p étant des quantités finies et la quantité p ne contenant pas d'inconnue et étant différente de zéro. L'équation nouvelle remplace celle dont les deux membres n'ont pas été élevés au carré ; autrement, le nouveau système pourrait n'être pas équivalent au premier.

158. QUESTION V. Trouver deux nombres, connaissant leur somme 8 et celle de leurs carrés 34.

On a les deux équations

$$(1) \qquad x+y=8,$$

$$(2) \qquad x^2+y^2=34.$$

Si, après avoir élevé au carré les deux membres de la première, on en retranche la seconde membre à membre, on obtient l'équation

$$(3) \qquad 2xy=30, \quad \text{ou} \quad xy=15.$$

En vertu du théorème démontré dans le numéro précédent, le système des deux équations (1) et (2) est équivalent au système des deux équations (1) et (3). On connaît maintenant la somme et le produit des deux inconnues ; elles sont les racines de l'équation du second degré

$$(4) \qquad u^2-8u+15=0.$$

Les nombres cherchés sont 3 et 5.

159. QUESTION VI. Trouver les quatre termes d'une

proportion, connaissant la somme des extrêmes 21, celle des moyens 19, et la somme des carrés des quatre termes 442.

En appelant x, y, z, t ces quatre nombres, on a les quatre équations

$$x+t=21, \tag{1}$$
$$y+z=19, \tag{2}$$
$$x^2+y^2+z^2+t^2=442, \tag{3}$$
$$xt-yz=0. \tag{4}$$

Si l'on élève au carré les deux membres des équations (1) et (2), qu'on les ajoute et qu'on retranche l'équation (3), on obtient l'équation

$$2xt+2yz=360,$$

ou

$$xt+yz=180, \tag{5}$$

qui pourra remplacer l'équation (3). D'autre part, les deux équations (4) et (5) peuvent être remplacées par les deux équations

$$xt=90 \quad , \quad yz=90,$$

que l'on en déduit en les ajoutant ou en les retranchant membre à membre. Ainsi le système des quatre équations proposées est équivalent au système des quatre équations

$$(6)\quad \begin{cases} x+t=21, \\ xt=90; \end{cases} \qquad (7)\quad \begin{cases} y+z=19, \\ yz=90. \end{cases}$$

Les deux inconnues x et t sont données par l'équation du second degré

$$u^2-21u+90=0,$$

dont les racines sont 6 et 15; les deux autres y et z par l'équation du second degré

$$u^2-19u+90=0,$$

dont les racines sont 9 et 10.

160. Question VII. Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant la hauteur h et la différence a des côtés de l'angle droit.

En appelant x et y les côtés de l'angle droit et z l'hypoténuse, on a les trois équations

$$(1)\qquad x-y=a,$$
$$(2)\qquad xy=hz,$$
$$(3)\qquad x^2+y^2=z^2.$$

On obtient la seconde en remarquant que le double de l'aire du triangle est égal à xy ou à zh. Si l'on élève les deux membres de la première au carré, qu'on y ajoute la seconde après avoir multiplié ses deux membres par 2, et qu'on en retranche la troisième membre à membre, on obtient l'équation du second degré à une seule inconnue

$$0=a^2+2hz-z^2,$$

ou

$$(4)\qquad z^2-2hz-a^2=0.$$

Le système des trois équations proposées est équivalent au système des trois équations (1), (2), (4). L'équation (4) a ses racines réelles et de signes contraires; mais, comme les côtés du triangle sont des nombres essentiellement positifs, on ne prendra que la racine positive

$$(5)\qquad z=h+\sqrt{h^2+a^2}.$$

L'hypoténuse une fois connue, les deux équations (1) et (2) donneront les deux côtés de l'angle droit. Les deux quantités x et $-y$ sont les racines de l'équation du second degré

$$u^2-au-hz=0;$$

on en déduit

$$(6)\qquad x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+hz}, \quad y=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+hz}.$$

Changements de signes du trinôme du second degré.

161. Reprenons l'étude du trinôme du second degré ax^2+bx+c, dans lequel la lettre x a une valeur quelconque. On mettra d'abord ce trinôme sous la forme $a(x^2+px+q)$. Si, dans la parenthèse, on ajoute et on retranche $\frac{p^2}{4}$, afin de compléter le carré dont x^2+px sont les deux premiers termes (comme nous l'avons fait au n° 147), on a

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right].$$

Il y a trois cas principaux à considérer :

1° Supposons que la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ soit négative, ou la quantité $q-\frac{p^2}{4}$ positive, c'est-à-dire que les racines du trinôme soient imaginaires. La parenthèse, étant la somme de deux quantités positives, reste toujours positive, et par conséquent le trinôme conserve le signe de son premier coefficient a, quelle que soit la valeur attribuée à x.

2° Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ est nulle, c'est-à-dire quand les racines sont égales, la parenthèse est un carré parfait, et l'on a

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{p}{2}\right)^2.$$

Le trinôme conserve encore le signe de son premier coefficient a, quelle que soit la valeur de x; cependant le trinôme s'annule pour $x=-\frac{p}{2}$.

3° Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ est positive, c'est-à-dire

lorsque les racines sont réelles et inégales, le trinôme se décompose en facteurs réels du premier degré, et l'on a (n° 148)

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'');$$

nous appelons x' la plus petite racine, x'' la plus grande. Quand la valeur de x est comprise entre x' et x'', le facteur $x - x'$ étant positif, le facteur $x - x''$ négatif, leur produit est négatif et le trinôme a un signe contraire à celui de a. Quand la valeur de x est plus grande que x'', les deux facteurs $x - x'$, $x - x''$ étant positifs, leur produit est lui-même positif et le trinôme a le même signe que a. Quand la valeur de x est plus petite que x', les deux facteurs étant négatifs, leur produit est positif et le trinôme a encore le signe de a. En résumé, le trinôme a un signe contraire à celui de a pour toutes les valeurs de x comprises entre les deux racines x' et x'', et il a le même signe que a pour toutes les valeurs de x non comprises entre les racines, c'est-à-dire plus grandes que la plus grande ou plus petites que la plus petite. Il change donc deux fois de signe ; une première fois quand x passe par la racine x', une seconde fois quand x passe par la racine x'', et ces changements de signe s'opèrent quand le trinôme s'annule.

Ainsi, *lorsque les racines sont égales ou imaginaires, le trinôme du second degré conserve toujours le signe de son premier coefficient a, quelle que soit la valeur attribuée à la variable x ; mais quand les racines sont réelles et inégales, le trinôme, ayant un signe contraire à celui de a pour les valeurs de x comprises entre les deux racines, et le même signe que a pour toutes les valeurs de x non comprises entre les racines, éprouve deux changements de signe.*

162. Remarque. D'après cela, si pour deux valeurs par-

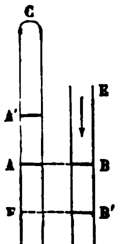
ticulières attribuées à x le trinôme acquiert des valeurs de signes contraires, on peut affirmer que les racines sont réelles et que l'une d'elles est comprise entre les deux valeurs attribuées à x. Soit, par exemple, le trinôme

$$x^2 - 4x + 3.$$

Si l'on donne à x les valeurs 0 et 2, le trinôme acquiert les valeurs de signes contraires $+3$ et -1; on en conclut d'abord que les racines du trinôme sont réelles et inégales; car, si elles étaient égales ou imaginaires, le trinôme n'éprouverait pas de changement de signe; en outre, la valeur 2 attribuée à x, donnant un résultat négatif, et par conséquent de signe contraire au premier coefficient qui est ici égal à $+1$, est comprise entre les deux racines x' et x''; la valeur 0 qui donne un résultat positif est inférieure à la plus petite racine x'; il en résulte que la plus petite racine x' est comprise entre 0 et 2, et la plus grande x'' supérieure à 2. Effectivement ces deux racines sont 1 et 3.

Cette remarque facilite beaucoup la discussion d'un grand nombre de problèmes. En voici un exemple.

163. Question VIII. Le manomètre à air, servant à indiquer la tension de la vapeur dans les machines à vapeur, se compose d'un tube recourbé, fermé à une de ses extrémités C, et ouvert à l'autre extrémité E; le fond du tube ADB est rempli de mercure jusqu'à une certaine hauteur; la capacité fermée AC est remplie d'air, et la vapeur, s'introduisant par la branche ouverte E, exerce sa pression sur le sommet B de la colonne de mercure. On suppose que les deux sommets A et B de la colonne de mercure sont au même niveau, quand



la tension de la vapeur est égale à une atmosphère. Si la tension de la vapeur augmente, il est clair que le sommet A de la colonne de mercure s'élève en A′, tandis que le sommet B s'abaisse en B′. Il s'agit de déterminer le déplacement de la colonne de mercure pour une tension donnée de la vapeur.

Nous supposons que le tube a partout même section. Appelons a la longueur AC, x le déplacement AA′ ou BB′ de la colonne de mercure. Si nous évaluons les tensions par des colonnes de mercure, la pression atmosphérique sera représentée par la hauteur h de la colonne barométrique ($h = 0^m,760$). Quand la tension de la vapeur devient égale à n atmosphères, elle exerce une pression marquée par nh au sommet B′ de la colonne de mercure; la pression est la même dans l'autre branche, en F, au même niveau. Mais la pression en F est égale au poids de la colonne de mercure FA′ ou $2x$, augmenté de la tension de l'air qui occupe alors l'espace A′C. Quand l'air occupait le volume AC, sa tension était égale à la pression atmosphérique h; sous le volume A′C, cette tension devient, d'après la loi de Mariotte, $h\dfrac{a}{a-x}$. On a donc l'équation

$$2x + \frac{ah}{a-x} = nh,$$

ou

$$(1) \qquad 2x^2 - (2a + nh)x + (n-1)ah = 0.$$

Il est évident, d'après la nature de la question, que si la tension de la vapeur est plus grande qu'une atmosphère, c'est-à-dire si $n > 1$, la colonne de mercure s'élèvera dans la branche fermée d'une quantité AA′ plus petite que AC; l'inconnue x doit donc admettre une valeur positive plus

petite que a. On peut aisément le vérifier sur l'equation (1); car si l'on donne à x successivement les valeurs 0 et a, le premier membre de l'équation, ou le trinôme du second degré, prend des valeurs de signes contraires $+(n-1)ah$ et $-ah$; d'après ce que nous avons dit, on en conclut que les deux racines de l'équation sont réelles, et que l'une d'elles est comprise entre 0 et a; c'est la plus petite, puisque la valeur a, qui donne un résultat négatif, est comprise entre les deux racines; l'autre racine, étant positive et plus grande que a, ne convient pas à la question. On a donc

$$x=\frac{2a+nh-\sqrt{(2a+nh)^2-8(n-1)ah}}{4},$$

ou, en simplifiant la quantité placée sous le radical,

$$(2)\qquad x=\frac{2a+nh-\sqrt{(2a-nh)^2+8ah}}{4}.$$

Lorsque la tension de la vapeur est moindre qu'une atmosphère, c'est-à-dire lorsque $n<1$, le sommet A de la colonne de mercure s'abaisse, tandis que le sommet B s'élève; l'inconnue x a dans ce cas une valeur négative. On voit en effet que l'équation admet deux racines réelles de signes contraires, puisque le dernier terme est négatif; la somme algébrique des racines étant égale à $a+\frac{nh}{2}$, la racine positive est plus grande que a et ne convient pas à la question. La formule (2) donne donc la solution de la question dans tous les cas.

Cas où, dans l'équation du second degré, l'un des coefficients c ou a a une valeur très-petite.

164. Supposons que dans l'équation du second degré

$$(1)\qquad ax^2+bx+c=0$$

la valeur absolue du terme connu c soit très-petite, et considérons les deux racines

$$(2)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \\ x'' = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{cases}$$

Si le coefficient b est positif, la quantité b^2-4ac différant très-peu de b^2, le radical $\sqrt{b^2-4ac}$ diffère très-peu de la quantité positive b; le second numérateur différera très-peu de zéro et le premier de $-2b$; la racine x'' sera donc très-petite en valeur absolue, et la racine x' peu différente de $-\frac{b}{a}$. Si le coefficient b était négatif, le radical différerait très-peu de la quantité positive $-b$; la racine x' serait très-petite en valeur absolue et la racine x'' peu différente de $-\frac{b}{a}$.

Concevons que la valeur absolue du terme c devienne de plus en plus petite et tende vers zéro; la racine très-petite en valeur absolue tendra vers zéro, et l'autre vers $-\frac{b}{a}$. Lorsque $c=0$, l'équation se réduit à

$$ax^2+bx=0, \quad \text{ou} \quad x(ax+b)=0;$$

on obtient les deux racines en égalant à zéro chacun des facteurs; l'une est $x=0$, l'autre $x=-\frac{b}{a}$.

165. Le cas où le coefficient a est très-petit en valeur absolue, par rapport à chacun des deux autres coefficients b et c, se ramène au précédent; car si l'on pose $x=\frac{1}{y}$, pre-

nant y pour nouvelle inconnue, l'équation devient

$$(3) \qquad cy^2 + by + a = 0.$$

D'après ce que nous venons de dire, l'une des valeurs de y est très-petite en valeur absolue, l'autre peu différente de $-\frac{b}{c}$; l'une des valeurs de x est donc très-grande en valeur absolue, l'autre peu différente de $-\frac{c}{b}$.

C'est aussi ce qu'on peut reconnaître sur les formules (2); le coefficient a étant très-petit en valeur absolue, la quantité $b^2 - 4ac$ diffère très-peu de b^2 et le radical de la quantité b, que nous supposons positive; le premier numérateur est à peu près égal à $-2b$; le dénominateur $2a$ étant très-petit, la racine x' est très-grande en valeur absolue. Quant à la racine x'', on ne voit pas immédiatement sa valeur, parce qu'elle est le quotient de deux quantités très-petites. Pour éviter cet inconvénient, nous transformerons l'expression en multipliant son numérateur et son dénominateur par $-b-\sqrt{b^2-4ac}$, ce qui donne

$$x'' = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}.$$

Au numérateur, la première parenthèse étant la somme des deux quantités $-b$ et $\sqrt{b^2-4ac}$, la seconde la différence de ces deux mêmes quantités, le produit des deux parenthèses est égal à la différence de leurs carrés, et l'on a

$$x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} = \frac{4ac}{2a\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}.$$

Si l'on supprime maintenant le facteur commun $2a$, qui

rend très-petits les deux termes de la fraction, il vient

$$(4) \qquad x'' = -\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

L'expression étant mise sous cette forme, le dénominateur diffère très-peu de $2b$, et la valeur de x'' est à peu près égale à $-\frac{c}{b}$.

Lorsque a tend vers zéro, l'une des racines de l'équation (3) tend vers zéro, et l'autre vers la quantité $-\frac{b}{c}$; l'une des racines de l'équation (1) augmente donc à l'infini en valeur absolue, tandis que l'autre tend vers $-\frac{c}{b}$. Dans ce cas, l'équation (1) du second degré se réduit à une équation du premier degré

$$bx + c = 0.$$

La racine $x'' = -\frac{c}{b}$ est précisément la solution de cette équation du premier degré. L'autre racine x', qui devient infinie, disparaît de l'équation.

Il peut arriver que les deux coefficients a et c soient à la fois très-petits par rapport à b; dans ce cas, la formule (4) donne pour x'' une valeur très-petite numériquement, et la première des formules (2) pour x' une valeur très-grande. Quand a et c tendent simultanément vers zéro, la racine x'' devient nulle et la racine x' infinie.

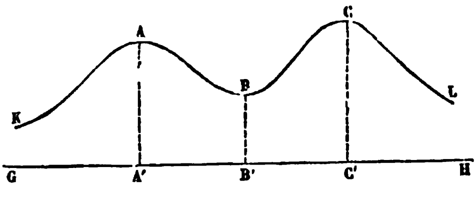
CHAPITRE III

DES QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM QUI PEUVENT SE RÉSOUDRE PAR LES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

166. Lorsqu'une grandeur variable, après avoir augmenté pendant un certain temps, diminue ensuite, elle passe par une valeur plus grande que les valeurs voisines, celles qui précèdent et celles qui suivent immédiatement; on dit qu'elle passe par un *maximum*.

Au contraire, lorsqu'une grandeur variable, après avoir diminué pendant un certain temps, augmente ensuite, elle passe par une valeur plus petite que les valeurs voisines, celles qui précèdent et celles qui suivent immédiatement; on dit, dans ce cas, qu'elle passe par un *minimum*.

Considérons, par exemple, la section par un plan vertical d'un terrain accidenté, et supposons que l'on mesure



les hauteurs des différents points de cette courbe au-dessus du plan horizontal GH. Le sommet A d'une colline sera un maximum, le fond B d'une vallée un minimum. Si l'on parcourt cette ligne dans le sens KL, après s'être élevé jusqu'au point A, on descendra ensuite de A vers B; la hau-

teur AA′ du point A est plus grande que celle des points voisins, d'un côté ou de l'autre ; c'est un maximum. En continuant le mouvement, on descendra jusqu'au point B pour monter ensuite de B vers C ; la hauteur BB′ du point B est plus petite que celle des points voisins, d'un côté ou de l'autre ; c'est un minimum. On trouve ensuite un nouveau maximum CC′, etc.

Nous étudierons quelques questions simples qui peuvent être résolues par des polynômes ou des équations du second degré.

167. QUESTION I. *Étudier la variation du produit de deux nombres dont la somme est constante.*

Première méthode. Appelons a la somme donnée, x l'un des nombres variables ; l'autre sera $a-x$ et le produit y aura pour valeur

$$y=x(a-x).$$

Faisons varier x de o à a ; quand $x=0$, le produit y est nul ; quand x atteint la valeur a, le produit redevient nul. Ainsi la quantité y est partie de zéro pour revenir à zéro ; dans l'intervalle, elle a pris une série de valeurs positives et finies ; elle a augmenté d'abord pour diminuer ensuite ; elle a donc passé par un *maximum*.

Pour étudier la variation de ce produit, nous l'écrirons sous la forme suivante

$$y=ax-x^2=\frac{a^2}{4}-\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}\right)=\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2.$$

La quantité y est la différence de deux quantités positives, l'une fixe, l'autre variable ; elle atteint sa plus grande valeur ou son maximum $\frac{a^2}{4}$, quand le terme à retrancher $\left(\frac{a}{2}-x\right)^2$

est nul, c'est-à-dire lorsque $x = \frac{a}{2}$, et alors l'autre partie $a - x$ est aussi égale à $\frac{a}{2}$. Ainsi, *le produit de deux facteurs dont la somme est constante est maximum, quand ces deux facteurs sont égaux entre eux.*

Il est facile de suivre les variations qu'éprouve le produit y quand x varie de o à a. Quand x croît d'une manière continue de o à $\frac{a}{2}$, le terme à retrancher $\left(\frac{a}{2} - x\right)^2$ diminuant de plus en plus, la quantité y augmente d'une manière continue de zéro à la valeur maximum $\frac{a^2}{4}$; quand x dépasse $\frac{a}{2}$ et varie de $\frac{a}{2}$ à a, le terme à retrancher $\left(\frac{a}{2} - x\right)^2$ ou $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$ augmentant de plus en plus, y diminue au contraire de $\frac{a^2}{4}$ à zéro. Si l'on fait croître x au delà de a, l'autre facteur $a - x$ devient négatif et croît en valeur absolue, leur produit $x(a - x)$ devient négatif et croît aussi en valeur absolue; donc la valeur relative de y diminue indéfiniment. Il en est de même si l'on donne à x des valeurs négatives.

168. A cette question abstraite correspond la question géométrique suivante : *Étudier la variation de la surface d'un rectangle dont le périmètre est donné.* Car si l'on appelle $2a$ le périmètre donné, x la base, $a - x$ étant la hauteur, la surface sera représentée par le produit $x(a - x)$ de deux facteurs dont la somme est constante. Nous avons vu que ce produit acquiert sa valeur maximum quand les deux

facteurs sont égaux entre eux; ainsi, de tous les rectangles de même périmètre, le plus grand est le carré.

Il est aisé de suivre la variation du rectangle : quand $x=0$, la hauteur est égale à a et le rectangle se réduit à une ligne droite de longueur a; l'aire est nulle. Si l'on fait croître la base x de 0 à $\frac{a}{2}$, l'aire augmente progressivement de 0 à la valeur maximum $\frac{a^2}{4}$. La base x continuant à croître de $\frac{a}{2}$ à a, l'aire diminue de cette valeur maximum à 0; à la fin, quand $x=a$, la hauteur étant nulle, le rectangle se réduit de nouveau à une ligne droite, et l'aire redevient nulle. Dans cette question géométrique, la variable x ne peut ni dépasser a, ni prendre des valeurs négatives.

169. A la même question se rattache encore cet autre problème de géométrie : *Étudier la variation de la surface d'un triangle de base et de périmètre constants.* Si l'on appelle $2p$ le périmètre donné, a le côté constant, b et c les deux côtés variables, on sait que la surface du triangle est exprimée par la formule

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Nous pouvons faire abstraction des deux facteurs constants $p, p-a$ et considérer seulement les deux facteurs variables $p-b$, $p-c$, dont la somme $2p-b-c$ ou a est constante. Si l'on représente par x le premier facteur, le second étant $a-x$, on a à considérer le produit $x(a-x)$; d'ailleurs x varie de 0 à a; le produit acquiert sa valeur maximum quand les deux facteurs sont égaux entre eux; il s'ensuit

que le triangle maximum est le triangle *isocèle.* Plus les deux côtés variables diffèrent entre eux, plus la surface du triangle est petite.

170. *Deuxième méthode.* On peut traiter la question précédente par une autre méthode dont nous nous servirons par la suite ; proposons-nous d'abord la question suivante : *Partager le nombre a en deux parties dont le produit soit égal à une quantité donnée m.* Si l'on désigne ces deux parties par x et y, on a les deux équations

$$x+y=a,$$
$$xy=m.$$

On connaît la somme et le produit des deux inconnues x et y ; par conséquent ces deux inconnues sont les deux racines de l'équation du second degré

$$u^2-au+m=0.$$

Ainsi les valeurs de x et de y sont données par la formule

$$u=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-m};$$

l'une des racines est la valeur de x, l'autre celle de y.

La question n'est possible que si les racines sont réelles ; il faut donc que la quantité placée sous le radical soit positive, c'est-à-dire que le produit m soit moindre que $\frac{a^2}{4}$. D'autre part, on peut donner à m une valeur quelconque moindre que $\frac{a^2}{4}$; car à une telle valeur correspondent deux racines réelles, c'est-à-dire un mode de partage qui la fournit. Ainsi le produit m prend toutes les valeurs plus petites que $\frac{a^2}{4}$, et n'en prend aucune plus grande ; sa valeur la plus

grande, ou son maximum, est $\frac{a^2}{4}$. Mais, lorsque $m=\frac{a^2}{4}$, le radical est nul et les deux racines sont égales ; le produit acquiert donc sa valeur maximum, quand on partage le nombre a en deux parties égales.

171. Question II. *Étudier la variation de la somme des carrés de deux nombres dont la somme est constante*

Première méthode. Appelons a la somme donnée, x l'un des nombres variables, l'autre sera $a-x$ et la somme y de leurs carrés sera représentée par

$$y=x^2+(a-x)^2.$$

Cette expression peut être mise sous la forme

$$y=2x^2-2ax+a^2=2\left(x^2-ax+\frac{a^2}{2}\right)=2\left[\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}\right)+\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\right]$$

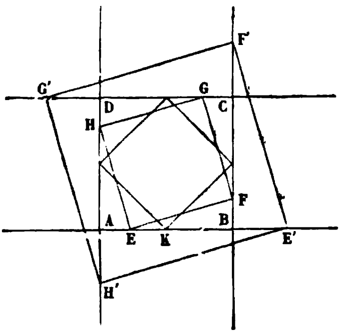
ou

$$y=\frac{a^2}{2}+2\left(\frac{a}{2}-x\right)^2.$$

La quantité y est la somme de deux quantités positives, l'une fixe, l'autre variable. Si l'on fait croître x de o à $\frac{a}{2}$, le terme variable diminuant, y diminue de a^2 à $\frac{a^2}{2}$; x continuant à croître de $\frac{a}{2}$ à a, le terme variable $2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$ augmentant, y augmente de $\frac{a^2}{2}$ à a^2. Ainsi, la quantité y diminue d'abord pour augmenter ensuite ; elle passe donc par un minimum. Ce minimum $\frac{a^2}{2}$ a lieu pour $x=\frac{a}{2}$, c'est-à-dire quand on partage le nombre donné a en deux parties égales.

Si l'on fait croître x au delà de a, l'autre partie $a-x$ devient négative, mais son carré reste positif, et la somme augmente indéfiniment. Il en est de même si l'on donne à x des valeurs négatives.

172. A cette question algébrique se rattache l'*étude de la variation du carré inscrit dans un carré donné.* Si sur les côtés du carré donné ABCD, à partir des sommets et en tournant dans le même sens, on porte quatre longueurs égales AE, BF, CG, DH, et si l'on joint les points ainsi obtenus, on forme un carré inscrit EFGH. Appelons a le côté du carré donné, x la longueur variable AE, l'aire y du carré inscrit est représentée par



l'expression

$$\overline{EH}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AH}^2 = x^2 + (a-x)^2,$$

que nous avons mise sous la forme

$$y = \frac{a^2}{2} + 2\left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

Faisons varier x de o à a; quand $x = 0$, le carré inscrit coïncide avec le carré donné ABCD, l'aire est égale à a^2; x croissant de o à $\frac{a}{2}$, l'aire du carré inscrit diminue de a^2 à $\frac{a^2}{2}$; x continuant à croître de $\frac{a}{2}$ à a, l'aire croît de $\frac{a^2}{2}$ à a^2; enfin, quand x devient égal à a, le carré inscrit

coïncide de nouveau avec le carré donné. Ainsi, l'aire du carré inscrit diminue d'abord de a^2 à $\frac{a^2}{2}$, pour augmenter ensuite de $\frac{a^2}{2}$ à a^2; elle passe donc par une valeur minimum $\frac{a^2}{2}$, et l'on obtient ce carré minimum en joignant les milieux des côtés du carré donné.

Si l'on prolonge indéfiniment les côtés du carré donné, toute restriction disparaîtra, et l'on pourra donner à x des valeurs positives plus grandes que a et aussi des valeurs négatives (le carré inscrit E'F'G'H' correspond à une valeur AE' plus grande que a). De cette manière le carré inscrit augmente indéfiniment.

173. A cette même question se rattache encore l'*étude de la variation de la diagonale d'un rectangle dont le périmètre est constant.* Car si l'on appelle $2a$ le périmètre donné, x la base, $a-x$ la hauteur, la diagonale y sera

$$y=\sqrt{x^2+(a-x)^2}.$$

Quand $x=0$, le rectangle se réduit à une ligne droite de longueur a et la diagonale est égale à a. Si l'on fait croître x de 0 à $\frac{a}{2}$, la diagonale diminue de a à $\frac{a}{\sqrt{2}}$; x continuant à croître de $\frac{a}{2}$ à a, la diagonale augmente de $\frac{a}{\sqrt{2}}$ à a; à la fin, quand $x=a$, le rectangle est réduit de nouveau à une ligne droite et la diagonale redevient égale à a. Ainsi la diagonale acquiert sa valeur minimum pour $x=\frac{a}{2}$, c'est-à-dire quand le rectangle est un carré.

Les deux côtés du rectangle ayant des valeurs essentiellement positives, on ne peut pas faire croître x au delà de a, ni lui donner des valeurs négatives; la diagonale a donc sa plus grande valeur a pour $x=0$ ou $x=a$, c'est-à-dire quand le rectangle se réduit à une ligne droite.

174. *Deuxième méthode.* Proposons-nous d'abord la question suivante : partager le nombre a en deux parties telles que la somme de leurs carrés soit égale à m. En appelant x et y les deux parties, on a les deux équations

$$x+y=a,$$
$$x^2+y^2=m.$$

En répétant le raisonnement du n° 158, on trouve que les inconnues x et y sont les deux racines de l'équation du second degré

$$u^2-au+\frac{a^2-m}{2}=0;$$

elles sont données par la formule

$$u=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{a^2-m}{2}}=\frac{a\pm\sqrt{2m-a^2}}{2};$$

l'une des racines est la valeur de x, l'autre celle de y.

Pour que la question soit possible, il faut que la quantité placée sous le radical soit positive, c'est-à-dire que la valeur de m soit plus grande que $\frac{a^2}{2}$. D'autre part, on peut donner à m une valeur quelconque plus grande que $\frac{a^2}{2}$; car à une telle valeur correspondent des valeurs réelles de x et de y. Ainsi la quantité m prend toutes les valeurs plus grandes que $\frac{a^2}{2}$ et n'en prend aucune plus petite; sa va-

leur la plus petite, ou son minimum, est $\frac{a^2}{2}$. Lorsque $m=\frac{a^2}{2}$, les deux racines sont égales; la somme des carrés acquiert donc sa valeur minimum, quand le nombre a est partagé en deux parties égales.

175. QUESTION III. Les questions que nous avons traitées jusqu'à présent rentrent dans cette question générale : *étudier la variation du trinôme du second degré* ax^2+bx+c.

Nous avons vu (161) que le trinôme du second degré, dont nous désignons la valeur par y, peut être mis sous la forme

$$y=a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right].$$

Si, pour simplifier, on représente par A la quantité constante $a\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$, et que l'on pose $x=-\frac{p}{2}+z$, on a

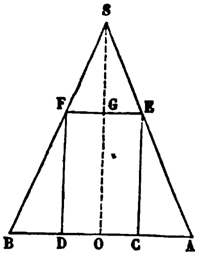
$$y=\mathrm{A}+az^2.$$

Le trinôme, mis sous cette forme, se compose de deux parties, l'une A constante, l'autre az^2 variable et de même signe que a. Lorsque le coefficient a est positif, la valeur de y reste constamment supérieure à la quantité A; elle acquiert sa plus petite valeur A, ou son minimum, quand $z=0$ ou $x=-\frac{p}{2}$. Si l'on fait croître z de $-\infty$ à 0 et ensuite de 0 à $+\infty$, la valeur de y décroît de $+\infty$ à A, pour croître ensuite de A à $+\infty$.

Lorsque le coefficient a est négatif, la valeur de y reste constamment inférieure à A; elle acquiert sa plus grande valeur A, ou son maximum, quand $z=0$ ou $x=-\frac{p}{2}$.

Si l'on fait croître z de $-\infty$ à o et ensuite de o à $+\infty$, la valeur de y croît de $-\infty$ à A, pour décroître ensuite de A à $-\infty$.

176. QUESTION IV. *Étudier la variation de la surface totale du cylindre inscrit dans un cône donné.*



Désignons par r le rayon OA de la base du cône, et par h sa hauteur SO ; appelons x le rayon OC de la base du cylindre inscrit, y la hauteur OG. Les triangles semblables ECA, SOA donnent la proportion

$$\frac{y}{h}=\frac{r-x}{r}; \quad \text{d'où} \quad (1) \quad y=\frac{h(r-x)}{r}.$$

La surface totale S du cylindre a pour expression

$$S=2\pi x^2+2\pi xy,$$

et, en remplaçant y par sa valeur

$$(2) \qquad S=2\pi x\left[h+\frac{r-h}{r}x\right].$$

Il y a plusieurs cas à considérer, suivant que le cône donné a une forme plus ou moins allongée. 1° Supposons d'abord la hauteur h du cône moindre que le rayon de la base, c'est-à-dire le cône très-aplati. La quantité $\frac{r-h}{r}$ étant positive, on voit que la surface augmente à mesure que x augmente ; si donc on fait croître x de o à r, la surface ira constamment en augmentant de o à $2\pi r^2$. Au commencement, quand $x=0$, le cylindre se réduit à la ligne

droite OS et la surface est nulle ; à la fin, quand $x = r$, la hauteur étant nulle, le cylindre coïncide avec la base du cône et la surface devient égale à $2\pi r^2$. Entre ces deux limites, la surface va continuellement en augmentant, sans alternative de décroissance.

2° Supposons maintenant $h > r$, l'expression de la surface deviendra

$$S = 2\pi x \left[h - \frac{h-r}{r} x\right],$$

ou

$$(3) \qquad S = 2\pi \frac{h-r}{r} \times x \left[\frac{hr}{h-r} - x\right].$$

Négligeant le facteur constant positif $2\pi \frac{h-r}{r}$, nous pouvons nous borner à considérer le produit

$$(4) \qquad x \left[\frac{hr}{h-r} - x\right]$$

des deux facteurs variables. La somme de ces deux facteurs est constante ; mais il ne faut pas en conclure immédiatement que le produit acquiert sa valeur maximum quand les deux facteurs sont égaux entre eux ; il faut pour cela que ces deux facteurs puissent effectivement devenir égaux entre eux, ce qui n'a pas toujours lieu, comme nous allons le voir. Par une transformation que nous avons déjà faite plusieurs fois, mettons le produit sous la forme

$$\frac{h^2 r^2}{4(h-r)^2} - \left(\frac{hr}{2(h-r)} - x\right)^2$$

Le rayon x de la base du cylindre n'est susceptible de varier que de o à r. Si l'on a

$$\frac{hr}{2(h-r)} > r,$$

c'est-à-dire $h < 2r$, quand x croît de o à r, la quantité

$$\frac{hr}{2(h-r)} - x$$

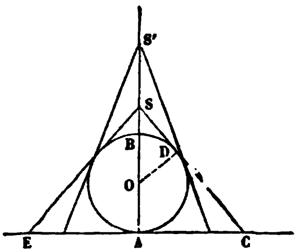
reste positive et diminue sans devenir égale à zéro ; la surface du cylindre va en augmentant continuellement depuis le commencement jusqu'à la fin, comme précédemment. Dans ce cas, les deux facteurs du produit ne deviennent pas égaux entre eux, ce qui exigerait que l'on eût $x = \frac{hr}{2(h-r)}$; la surface arrive à sa plus grande valeur quand $x = r$, c'est-à-dire quand les facteurs diffèrent le moins possible l'un de l'autre.

Supposons maintenant $\frac{hr}{2(h-r)} < r$, ou $h > 2r$; x variant de o à $\frac{hr}{2(h-r)}$, la surface augmente de o à $\frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}$; x continuant à croître de $\frac{hr}{2(h-r)}$ à r, la surface diminue de cette valeur $\frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}$ jusqu'à la valeur extrême $2\pi r^2$. Ainsi la surface passe par un maximum pour $x = \frac{hr}{2(h-r)}$; dans ce cas, les deux facteurs du produit, dont nous avons parlé, deviennent égaux entre eux.

En résumé, si l'on fait croître x de o à r : 1° quand $h < 2r$, la surface du cylindre inscrit va en augmentant continuellement depuis le commencement jusqu'à la fin ; 2° quand $h > 2r$, la surface augmente de zéro jusqu'à une certaine valeur maximum, puis diminue de ce maximum jusqu'à $2\pi r^2$.

177. QUESTION V. *Étudier la variation du volume d'un cône circonscrit à une sphère donnée.*

Soit AB un diamètre fixe de la sphère; menons par le point A un plan tangent à la sphère et, sur le prolongement du diamètre AB, prenons un point quelconque S pour sommet du cône circonscrit. Si le sommet S se rapproche du point B, le cône, s'évasant de plus en plus, augmente indéfiniment; si, au contraire, le sommet S s'éloigne du point B, le cône, s'allongeant de plus en plus, et ayant toujours une base plus grande qu'un grand cercle de la sphère, augmente aussi indéfiniment. Ainsi, lorsqu'on fait glisser le sommet S sur le prolongement du diamètre à partir du point B, on voit que le cône circonscrit, d'abord infiniment grand, commence par diminuer, pour augmenter ensuite et devenir indéfiniment grand; il passe donc par une valeur plus petite que toutes les autres, c'est-à-dire par un minimum.



Le volume du cône a pour mesure

$$\tfrac{1}{3}\pi\overline{AC}^2 \times SA.$$

Appelons r le rayon de la sphère et x la distance BS. On a

$$SA = 2r + x.$$

Les triangles semblables SAC, SOD donnent la proportion

$$\frac{AC}{OD} = \frac{SA}{SD};$$

d'où l'on déduit, en remarquant que la tangente SD, moyenne proportionnelle entre SA et SB, est égale à $\sqrt{x(2r+x)}$,

$$AC = \frac{r(2r+x)}{\sqrt{x(2r+x)}}, \quad \overline{AC}^2 = \frac{r^2(2r+x)}{x}.$$

Si l'on remplace les quantités AC et SA par leurs valeurs, le volume du cône aura pour expression

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \frac{(2r+x)^2}{x}.$$

Proposons-nous d'abord cette question : circonscrire à la sphère un cône de volume donné. Si, pour simplifier, nous représentons le volume donné par $\frac{4}{3}\pi r^2 m$, nous aurons l'équation

$$\frac{(2r+x)^2}{x} = 4m,$$

qui, mise sous forme entière, devient

$$(1) \qquad x^2 - 4(m-r)x + 4r^2 = 0.$$

On en déduit

$$x = 2(m-r) \pm 2\sqrt{(m-r)^2 - r^2},$$

et, en simplifiant la quantité placée sous le radical,

$$x = 2(m-r) \pm 2\sqrt{m(m-2r)}.$$

Pour que x soit réelle, il est nécessaire et il suffit que la quantité positive m soit plus grande que $2r$; donc m a un minimum $2r$, et, quand on donne à m cette valeur, on trouve $x = 2r$. Ainsi le plus petit cône circonscrit à la sphère a une hauteur S'A double du diamètre de la sphère ; le volume de ce cône minimum est $\frac{8}{3}\pi r^2$; c'est le double du volume de la sphère.

A toute valeur de m plus grande que $2r$ correspondent deux valeurs de x réelles et positives ; il existe donc deux cônes ayant un même volume quelconque plus grand que le minimum; la hauteur de l'un est plus grande que la hauteur S'A du cône minimum, celle de l'autre est plus petite.

En effet, si dans le premier membre de l'équation (1) on remplace x par $2r$, on a un résultat négatif $8r(2r-m)$; donc l'une des racines est plus petite, l'autre plus grande que $2r$.

Ce qui précède montre bien que, lorsque x croît de o à $2r$, le volume du cône diminue de l'infini à sa valeur minimum $\frac{8}{3}\pi r^2$, et que, lorsque x continue à croître au delà de $2r$, le volume augmente ensuite indéfiniment.

178. QUESTION VI. *Étudier la variation de la fraction*

$$\frac{2x^2+6}{x^2-6x+11},$$

dans laquelle x désigne une variable réelle arbitraire.

Proposons-nous d'abord de trouver les valeurs de x qui rendent cette fraction égale à une quantité y. Nous aurons l'équation

$$\frac{2x^2+6}{x^2-6x+11}=y,$$

$$(y-2)x^2-6yx+11y-6=0,$$

d'où l'on déduit

$$x=\frac{3y\pm\sqrt{9y^2-(y-2)(11y-6)}}{y-2},$$

et, en simplifiant,

$$x=\frac{3y\pm\sqrt{-2y^2+28y-12}}{y-2}.$$

Pour que x soit réelle, il est nécessaire et il suffit que la quantité placée sous le radical soit positive. Ainsi la quantité y prendra toutes les valeurs qui rendent positif le trinôme

$$-2y^2+28y-12,$$

et n'en prendra pas d'autres. Le trinôme, ayant ses racines réelles, se décompose en facteurs du premier degré

$$-2(y-y')(y-y''),$$

ou

$$2(y-y')(y''-y).$$

Nous appelons y' la plus petite racine, y'' la plus grande. Le trinôme est positif pour toutes les valeurs de y comprises entre y' et y'', et il est négatif pour toutes les autres valeurs. Ainsi, quand la variable x parcourt toute l'échelle des grandeurs, la fraction proposée y varie entre y' et y'', sans jamais sortir de ces limites. La limite inférieure y' est un minimum, la limite supérieure y'' un maximum.

Comme $\sqrt{43}=6,557$ à 0,001 près, le minimum de la fraction est $y'=0,443$, le maximum $y''=13,557$. La valeur de x qui rend la fraction minimum est $x'=\frac{3y'}{y'-2}=-0,854$; celle qui la rend maximum est $x''=\frac{3y''}{y''-2}=3,519$. A toute valeur de y comprise entre y' et y'' correspondent deux valeurs différentes de x.

Nous pouvons maintenant nous rendre compte de la variation de la fraction proposée, quand x varie d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$. Examinons d'abord ce que devient cette fraction, quand on donne à x une valeur numérique très-grande, positive ou négative. Pour cela, nous diviserons par x^2 le numérateur et le dénominateur, ce qui donne

$$y=\frac{2+\frac{6}{x^2}}{1-\frac{6}{x}+\frac{11}{x^2}};$$

quand x est très-grand numériquement, les quantités $\frac{6}{x^2}$, $\frac{6}{x}$, $\frac{11}{x^2}$ sont très-petites, et la fraction diffère très-peu de la valeur 2; ceci nous apprend que la fraction tend vers la valeur 2, quand x augmente indéfiniment en valeur absolue. Si donc on fait croître x d'une manière continue de $-\infty$ à $-0,854$, la fraction proposée ira en diminuant de la valeur 2 à la valeur minimum 0,443; x croissant ensuite de $-0,854$ à 3,519, la fraction ira en croissant du minimum 0,443 au maximum 13,557; x dépassant enfin 3,519 et croissant indéfiniment, la fraction ira en diminuant du maximum 13,557 à la valeur 2. Il est à remarquer que la fraction passe deux fois par chaque valeur intermédiaire entre le minimum et le maximum; il faut en excepter toutefois la valeur 2; la fraction ne passe à proprement parler qu'une fois par cette valeur, et cela pour $x=\frac{4}{3}=1,333$; mais cette valeur doit être considérée en outre comme la valeur limite vers laquelle tend la fraction, quand x s'éloigne vers l'infini positif ou vers l'infini négatif.

179. QUESTION VII. *Étudier la variation de la fraction*

$$\frac{x^2+5}{6x-7}.$$

Si nous cherchons les valeurs de x qui rendent la fraction égale à y, nous avons l'équation

$$\frac{x^2+5}{6x-7}=y,$$

$$x^2-6yx+7y+5=0,$$

d'où

$$x=3y\pm\sqrt{9y^2-7y-5}.$$

La fraction y prendra toutes les valeurs qui rendent positif le trinôme

$$9y^2 - 7y - 5.$$

Ce trinôme, ayant ses racines réelles $y' = -0,452$, $y'' = 1,230$, se décompose en facteurs réels et se met sous la forme

$$9(y - y')(y - y'').$$

Il est négatif pour les valeurs de y comprises entre y' et y''; mais il est positif pour toutes les valeurs de y plus grandes que y'' ou plus petites que y'. Ainsi la fraction y admet deux séries de valeurs : l'une, commençant à y'' et s'élevant à $+\infty$; l'autre commençant à y' et descendant vers $-\infty$. La valeur y'' est le minimum de la première série, elle est donnée par $x = 3y'' = 3,690$; la valeur y' est le maximum de la seconde série, elle est donnée par $x = 3y' = -1,356$.

Remarquons que les mots maximum et minimum n'ont pas ici un sens absolu, mais seulement un sens relatif. La valeur y'' est la plus petite de toutes celles de la première série; mais elle est plus grande que les valeurs de la seconde série. De même, la valeur y' est la plus grande de toutes celles de la seconde série; c'est un maximum relativement à cette seconde série.

Ainsi, la fraction proposée varie de y'' à $+\infty$ et de y' à $-\infty$; elle parcourt toute l'échelle des grandeurs, sauf la portion comprise entre y' et y''. Il faut remarquer que la fraction saute brusquement de $-\infty$ à $+\infty$, quand x passe par la valeur $\frac{7}{6}$. En effet, quand x est un peu plus petite que $\frac{7}{6}$, la fraction est négative et très-grande en va-

leur absolue; dès que x dépasse un peu $\frac{7}{6}$, la fraction devient positive et très-grande.

Si l'on divise le numérateur et le dénominateur par x, ce qui met la fraction sous la forme

$$\frac{x+\frac{5}{x}}{6-\frac{7}{x}},$$

on voit que, pour de très-grandes valeurs de x, le numérateur différant très-peu de x, et le dénominateur de 6, la fraction est à peu près égale à $\frac{x}{6}$. Elle a des valeurs très-grandes et de même signe que x.

Il résulte de tout ce qui précède que si l'on fait croître x de $-\infty$ à $-1,356$, la fraction va en croissant de $-\infty$ au maximum $-0,452$; x continuant à croître de $-1,356$ à $\frac{7}{6}$, la fraction va en décroissant de $-0,452$ à $-\infty$. Quand x passe par la valeur $\frac{7}{6}$, la fraction saute brusquement de $-\infty$ à $+\infty$; x croissant ensuite de $\frac{7}{6}$ à 3,690, la fraction décroît de $+\infty$ au minimum 1,230; x dépassant 3,690 et croissant jusqu'à $+\infty$, la fraction va en croissant de 1,230 à $+\infty$.

180. QUESTION VIII. *Étudier la variation de la fraction*

$$\frac{x^2-5}{2x-4}.$$

En égalant cette fraction à y et résolvant l'équation, on trouve

$$x=y\pm\sqrt{y^2-4y+5}.$$

Le trinôme placé sous le radical, ayant ses racines imaginaires, peut se mettre sous la forme d'une somme de deux carrés

$$(y-2)^2+1;$$

il reste constamment positif, quelle que soit la valeur de y. Ainsi la quantité y peut recevoir toutes les valeurs possibles, et la fraction proposée parcourt toute l'échelle des grandeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

La fraction saute brusquement de $+\infty$ à $-\infty$, quand x passe par la valeur 2. D'autre part, si l'on divise le numérateur et le dénominateur par x, elle s'écrit

$$\frac{x-\frac{5}{x}}{2-\frac{4}{x}},$$

et devient à peu près égale à $\frac{x}{2}$ pour de très-grandes valeurs de x, positives ou négatives. On conclut de là que, quand x varie de $-\infty$ à $+2$, la fraction va en augmentant de $-\infty$ à $+\infty$; x passant par la valeur 2, la fraction saute brusquement de $+\infty$ à $-\infty$; x variant ensuite de 2 à $+\infty$, la fraction croît de nouveau de $-\infty$ à $+\infty$, parcourant une seconde fois toute l'échelle des grandeurs.

D'après ce que nous avons dit, la fraction parcourt deux fois toute l'échelle des grandeurs; dans chacun de ces mouvements, elle va en augmentant continuellement sans éprouver d'alternative de décroissance; autrement elle passerait plus de deux fois par la même valeur; ce qui ne peut pas être, puisqu'à une même valeur de y ne correspondent que deux valeurs de x.

181. QUESTION IX. Les trois dernières questions rentrent dans l'étude de la variation de la fraction rationnelle

$$(1)\qquad \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}.$$

Les exemples précédents montrent les circonstances principales qui peuvent se présenter; cependant il est bon de traiter la question d'une manière générale.

Les coefficients a, b, c, a', b', c' étant supposés réels, à toute valeur réelle de la variable x correspond une valeur réelle de la fraction. Cherchons les valeurs de x qui correspondent à une valeur donnée y de la fraction; nous avons à résoudre l'équation du second degré

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=y,$$

ou

$$(2)\qquad (a'y-a)x^2+(b'y-b)x+(c'y-c)=0;$$

d'où l'on déduit

$$(3)\qquad x=\frac{-(b'y-b)\pm\sqrt{(b'y-b)^2-4(a'y-a)(c'y-c)}}{2(a'y-a)}.$$

La quantité placée sous le radical est un polynôme du second degré en y, que nous représenterons par

$$(4)\qquad Ay^2+By+C,$$

en posant, pour abréger,

$$A=b'^2-4a'c' \ ,\ C=b^2-4ac \ ,\ B=4(ac'+ca')-2bb'.$$

La variable x étant réelle, on pourra attribuer à y toutes les valeurs qui rendent le trinôme (4) supérieur ou égal à zéro, et aucune autre. Il y a plusieurs cas à considérer :

1° Supposons que le coefficient A ait une valeur négative. La quantité B^2-4AC ne pourra être négative; car, si cela

avait lieu, le trinôme (4), ayant ses racines imaginaires, conserverait le signe de son premier coefficient A (n° 161), et par conséquent serait négatif pour toutes les valeurs réelles de y : à aucune valeur réelle de y ne correspondrait une valeur réelle de x, ce qui est impossible, puisqu'à toute valeur réelle de x correspond une valeur réelle de y. La quantité B^2-4AC sera donc supérieure ou égale à zéro. Si cette quantité est positive, le trinôme (4), ayant ses deux racines y' et y'' réelles et inégales, sera positif pour toutes les valeurs de y comprise entre y' et y'', et négatif pour toutes les autres valeurs de y. Ainsi, dans ce cas, la fraction y variera de y' à y''; la plus petite racine y' sera un minimum, la plus grande y'' un maximum.

Il est facile de le reconnaître *à priori* : la quantité A ou $b'^2-4a'c'$ étant négative, le trinôme $a'x^2+b'x+c'$ ne s'annule pas, et par conséquent la fraction conserve une valeur finie pour toutes les valeurs finies de x. Comme elle diffère très-peu de la quantité finie $\frac{a}{a'}$ pour les valeurs de x très-grandes numériquement, on en conclut que cette fraction reste comprise entre deux limites finies.

Si la quantité B^2-4AC était nulle, le trinôme (4), ayant ses racines égales, se mettrait sous la forme $A(y-y')^2$; il serait négatif pour toutes les valeurs de y, excepté pour $y=y'$; on ne pourrait attribuer que cette seule valeur à la fraction, qui alors serait constante. Dans ce cas, les coefficients des termes correspondants des deux trinômes qui composent la fraction sont proportionnels. En effet, y ayant une valeur constante, quelle que soit la valeur de x, l'équation du second degré (2), dont les coeffi-

cients ont des valeurs constantes, est vérifiée par une infinité de valeurs de x; il faut donc que les trois coefficients soient nuls séparément, c'est-à-dire que l'on ait

$$a'y-a=0\ ,\ b'y-b=0\ ,\ c'y-c=0,$$

et par suite

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

Réciproquement, quand les coefficients des trinômes ax^2+bx+c, $a'x^2+b'x+c'$ sont proportionnels, la fraction a une valeur constante; car, si l'on a $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k$, k étant la valeur de ces rapports égaux, on en déduit $a=ka'$, $b=kb'$, $c=kc'$, et la fraction proposée devient

$$\frac{k(a'x^2+b'x+c')}{a'x^2+b'x+c'}.$$

On peut supprimer le facteur commun $a'x^2+b'x+c'$; alors la fraction ne contient plus la variable x et se réduit à une constante k.

2° Supposons maintenant que le coefficient A ait une valeur positive. Si la quantité B^2-4AC est positive, le trinôme (4), ayant ses racines y' et y'' réelles et inégales, est positif pour toutes les valeurs de y inférieures à la plus petite racine y', ou supérieures à la plus grande y'', et négatif pour toutes les valeurs comprises entre les racines. La fraction y prendra donc deux séries de valeurs, allant, l'une de y' à $-\infty$, l'autre de y'' à $+\infty$; y' est le maximum de la première série, y'' le minimum de la seconde série. Le dénominateur $a'x^2+b'x+c'$ a ses racines réelles et y devient infinie quand x passe par l'une de ces racines.

Si la quantité $B^2 - 4AC$ est inférieure ou égale à zéro, le trinôme conserve une valeur positive pour toutes les valeurs de y. Ainsi, dans ce cas, la fraction parcourt toute l'échelle des grandeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

3° Considérons enfin le cas où le coefficient A est nul. La quantité placée sous le radical se réduit à un polynôme du premier degré $By + C$, que l'on peut mettre sous la forme $B(y - y')$. Si le coefficient B est positif, la fraction y prend toutes les valeurs supérieures à la valeur y', qui est un minimum. Si le coefficient B est négatif, y prend au contraire toutes les valeurs inférieures à la valeur y', qui est un maximum.

Le coefficient B pourrait être nul en même temps que A; le coefficient C étant supérieur ou égal à zéro, y prend toutes les valeurs possibles. Dans ce cas, l'équation (3) devient

$$x = \frac{-(b'y - b) \pm \sqrt{C}}{2(a'y - a)};$$

d'où l'on déduit

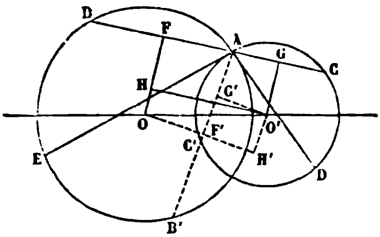
$$y = \frac{2ax + b \pm \sqrt{C}}{2a'x + b'},$$

et l'on voit que la fraction proposée se réduit au premier degré; cette réduction a lieu par la suppression d'un facteur commun du premier degré.

182. Question X. *Étant donnés deux cercles qui se coupent au point* A, *par ce point on mène une sécante quelconque* BC; *étudier la variation du produit des deux portions* AB *et* AC *de cette sécante.*

Étudions d'abord sur la figure la variation du produit $AB \times AC$. Faisons tourner la sécante autour du point A de

droite à gauche; si nous partons de la position AD, où elle



est tangente au grand cercle, le segment AB est nul, ainsi que le produit; quand nous arrivons à la position AE, où elle est tangente au petit cercle, le segment AC s'annulant, le produit redevient nul; dans l'intervalle le produit a donc passé par un maximum. Si nous continuons le mouvement dans le même sens pour aller de la position AE à la position AD, le produit, partant de zéro pour revenir à zéro, passe par un second maximum.

Cherchons quelle doit être la position de la sécante pour que le produit des deux segments ait une valeur donnée. Supposons que la sécante occupe la position BC; des centres O et O', abaissons sur cette sécante les perpendiculaire OF, O'G, et du centre O' menons une parallèle O'H à la sécante. Appelons a et b les rayons OA, O'A des deux cercles, d la distance OO' des centres, x et y les moitiés AF, AG des deux segments de la sécante, $4m$ le produit de ces deux segments, on a la première équation

$$(1) \qquad xy = m.$$

Le triangle rectangle OO'H donne

$$d^2 = \overline{O'H}^2 + \overline{OH}^2 = (x+y)^2 + (OF - O'G)^2;$$

si l'on développe les carrés, et si l'on observe que

$$\overline{OF}^2 = a^2 - x^2 \quad , \quad \overline{O'G}^2 = b^2 - y^2,$$

il vient

$$d^2 = a^2 + b^2 + 2m - 2\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)},$$

d'où

$$\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-y^2)}=\frac{a+b^2-d^2}{2}+m=\mathrm{A}+m,$$

en désignant, pour abréger, par A la quantité connue $\frac{a^2+b^2-d^2}{2}$. En élevant au carré, et développant, on a

$$a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2+x^2y^2=(\mathrm{A}+m)^2,$$

ou

$$(2)\qquad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2+m^2-(\mathrm{A}+m)^2.$$

Les deux équations (1 et 2) conviennent aussi au cas où la sécante occupe la position AB′ ; seulement, dans ce cas, le segment AC′ étant porté en sens contraire, sera regardé comme négatif, ainsi que le produit m. Dans le triangle rectangle OO′H′, le côté O′H′ est égal à la différence AF′ — AG′, ou à la somme algébrique $x+y$; le côté OH′ est une somme OF′ + O′G′, au lieu d'être une différence comme précédemment; le signe placé devant le radical est donc changé, mais l'élévation au carré donne la même équation (2). Puisque, dans cette nouvelle position de la sécante, le produit m est regardé comme négatif, le second maximum géométrique correspond à un minimum algébrique. Ainsi le produit m variera entre un minimum négatif et un maximum positif.

Afin de rendre l'équation (2) symétrique par rapport aux deux inconnues, nous poserons

$$bx=x' \quad , \quad ay=y',$$

prenant pour inconnues nouvelles x' et y'; les équations (1) et (2) deviennent ainsi

$$(3)\qquad x'y'=abm,$$

$$(4)\qquad x'^2+y'^2=a^2b^2+m^2-(\mathrm{A}+m)^2.$$

En opérant comme au n° 153, on en déduit le système équivalent

$$(x'+y')^2=(ab+m)^2-(A+m)^2,$$
$$(x'-y')^2=(ab-m)^2-(A+m)^2,$$

d'où

$$x'+y'=\pm\sqrt{(ab-A)(ab+A+2m)},$$
$$x'-y'=\pm\sqrt{(ab+A)(ab-A-2m)}.$$

Si l'on remplace A par sa valeur, les deux expressions précédentes deviennent

$$(5)\quad x'+y'=\pm\frac{1}{2}\sqrt{[d^2-(a-b)^2][(a+b)^2-d^2+4m]}.$$

$$(6)\quad x'-y'=\pm\frac{1}{2}\sqrt{[(a+b)^2-d^2][d^2-(a-b)^2-4m]}.$$

Pour que la question soit possible, il est nécessaire et il suffit que les deux radicaux soient réels. Nous remarquons d'abord que, puisque la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence, les deux quantités

$$(a+b)^2-d^2 \quad , \quad d^2-(a-b)^2$$

sont positives; en représentant, pour abréger, par p et q ces deux quantités positives, on a

$$x'+y'=\pm\frac{1}{2}\sqrt{q(p+4m)},$$

$$x'-y'=\pm\frac{1}{2}\sqrt{p(q-4m)}.$$

Le premier radical est réel, si $4m$ est plus grand que $-p$, le second, si $4m$ est plus petit que q. Donc le produit des deux segments de la sécante varie du minimum $-p$ au maximum $+q$.

Si l'on fait $4m=q$, on a $x'-y'=0$, et par suite $bx=ay$, ou $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$; les deux segments AB et AC étant proportionnels aux rayons, les deux triangles OAB, O'AC sont semblables, les rayons OA, O'C sont parallèles, et par conséquent la sécante passe par le centre de similitude externe des deux cercles. De même, si l'on fait $4m=-p$, on a $x'+y'=0$; la sécante AB' passe par le centre de similitude interne. Ainsi le produit acquiert son premier maximum, quand la sécante passe par le centre de similitude externe; il acquiert son second maximum numérique, quand la sécante passe par le centre de similitude interne.

183. Question XI. *Alvéole des abeilles.* Étant donné un prisme droit ayant pour base un hexagone régulier, prenons sur le prolongement de l'axe O'O du prisme un point arbitraire S; par ce point et les trois côtés du triangle équilatéral ACE, que l'on obtient en joignant deux à deux les sommets de la base supérieure, menons trois plans; ces plans détachent du prisme hexagonal trois tétraèdres BACG, DCEH, FAEK, et les remplacent par le tétraèdre SACE placé au-dessus du prisme; nous formons ainsi le solide représenté par la figure 2, qui se termine à sa partie supérieure par une sorte d'hexagone gauche, réunion des trois losanges qui aboutissent au sommet S.

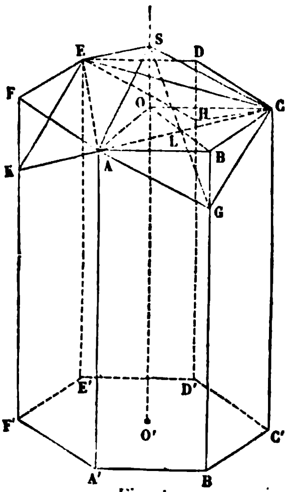


Fig. 1.

Il est aisé de voir que le volume du solide ainsi formé est constant, quelle que soit la position du point S sur le prolongement de l'axe du prisme. En effet, les deux losanges SAGC, OABC (*fig.* 1) ayant une diagonale commune AC, les deux autres diagonales SG et OB passent par le même point L, milieu de AC; les triangles rectangles LBG, LOS sont égaux, et l'on a BG=OS. Il en résulte que le tétraèdre GABC détaché du prisme, et le tétraèdre ajouté SAOC, sont égaux, comme ayant leurs bases égales ABC, AOC, et aussi leurs hauteurs égales BG et OS. Ainsi la somme des trois parties détachées du prisme est égale à la pyramide ajoutée SACE.

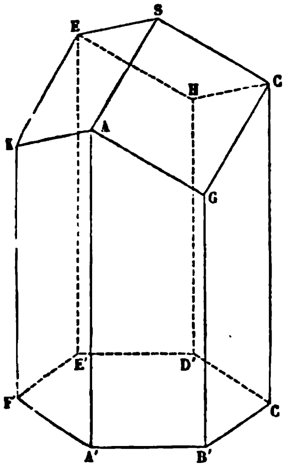


Fig. 2.

Considérons maintenant la surface du solide. Appelons a le côté A'B' de l'hexagone régulier, l la longueur de l'arête AA' du prisme primitif, x la distance arbitraire OS. La surface latérale du solide que nous étudions, se composant de six trapèzes tels que AA'B'G, a pour mesure

$$3(\mathrm{AA'}+\mathrm{GB'})\times \mathrm{A'B'}=3a(2l-x).$$

Les trois losanges qui terminent le solide ont pour mesure

$$\frac{3\mathrm{AC}\times \mathrm{SG}}{2}=3\mathrm{AC}\times \mathrm{SL}=3a\sqrt{3}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Ainsi la surface totale du solide, abstraction faite de la base

inférieure, a pour expression

$$3a(2l-x)+3a\sqrt{3}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Cherchons la valeur de x pour laquelle cette surface est égale à une surface donnée que, pour simplifier, nous représenterons par $3am$; nous avons l'équation

$$2l-x+\sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}=m,$$

ou

$$\sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}=m-2l+x.$$

A l'inspection de cette équation, on voit que le premier membre étant plus grand que x, la quantité $m-2l$ est positive ; si on la représente par m', l'équation devient

$$(1) \qquad \sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}=m'+x.$$

En élevant au carré, on obtient l'équation du second degré

$$(2) \qquad 2x^2-2m'x+\frac{3a^2}{4}-m'^2=0.$$

Les racines seront réelles si la quantité positive m' satisfait à la condition

$$m'^2>\frac{a^2}{2},$$

ou plus simplement

$$m'>\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Tant que l'on a $m'<\frac{a\sqrt{3}}{2}$, le produit étant positif, les deux racines de l'équation (2) sont positives et conviennent

à l'équation (1); on a deux solutions du problème. Quand on a $m' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, l'une des racines est nulle, l'autre positive; on a encore deux solutions, l'une d'elles est le prisme non modifié. Enfin, quand on a $m' > \frac{a\sqrt{3}}{2}$, l'une des racines est positive, l'autre négative : la racine positive convient évidemment à l'équation (1); la racine négative y convient aussi; car elle est comprise entre les deux quantités o et $-m'$ qui, mises à la place de x dans le premier membre de l'équation (2), donnent des résultats de signes contraires. Si l'on attribue à m' sa valeur minimum $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, on a $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. On conclut de là que, si l'on fait varier x de $-l$ à $+\frac{a\sqrt{2}}{4}$, la surface va en diminuant continuellement, et qu'elle augmente ensuite, quand x croît de $+\frac{a\sqrt{2}}{4}$ à $+l$; elle passe donc par un minimum pour $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Les abeilles construisent leurs cellules sur ce plan. L'entrée de l'alvéole est un hexagone régulier A'B'C'D'E'F' (fig. 2); le fond est formé de la réunion de trois facettes planes inclinées de manière que la surface soit minimum. Il y a ainsi économie de cire. Les alvéoles sont placées les unes à côté des autres en doubles rayons, les ouvertures tournées en dehors, et les fonds se touchant exactement,

de manière qu'il n'y ait pas d'intervalle vide entre elles et que chaque cloison serve à deux cellules voisines.

184. QUESTION XII. *Partager un nombre donné en plusieurs parties de manière que le produit de ces parties soit maximum.*

Pour fixer les idées, supposons que l'on partage le nombre donné positif a en trois parties positives x, y, z, dont chacune peut varier de o à a. Le produit, devenant nul quand l'un des facteurs est nul et conservant une valeur finie positive dans cette étendue, admet évidemment un maximum; il est aisé de reconnaître que ce maximum a lieu quand les trois facteurs sont égaux entre eux, c'est-à-dire quand $x=y=z=\frac{a}{3}$. En effet, supposons que deux des facteurs, par exemple x et y, diffèrent; fixons le troisième facteur z, et faisons varier les deux premiers facteurs x et y, dont la somme $a-z$ est alors constante, de manière à les rendre égaux entre eux; il est clair que nous augmenterons le produit xy (n° 167) et par suite le produit xyz; ainsi, tant que deux facteurs diffèrent, on peut les modifier de manière à augmenter la valeur du produit; le produit n'arrive donc à sa valeur maximum que lorsque les trois facteurs sont égaux entre eux.

QUESTION XIII. L'aire d'un triangle est exprimée par la formule

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

dans laquelle a, b, c désignent les trois côtés et $2p$ le périmètre. Si l'on fait varier les côtés de manière que le périmètre reste constant, la somme des trois facteurs variables $p-a$, $p-b$, $p-c$ restant constamment égale à p, leur

produit sera maximum quand ces trois facteurs seront égaux entre eux, c'est-à-dire quand $a=b=c$. Ainsi, ***de tous les triangles ayant même périmètre, le plus grand est le triangle équilatéral.***

185. QUESTION XIV. Étant données n quantités a, b, c,....., toute quantité plus grande que la plus petite et plus petite que la plus grande des quantités données est dite une *moyenne* entre ces quantités. Il est clair que la quantité

$$\frac{a+b+c+\cdots\cdot\cdot}{n}$$

est une moyenne entre les quantités données; on l'appelle *moyenne arithmétique*. Supposons que les quantités données soient toutes positives, l'expression

$$\sqrt[n]{abc\cdots\cdot\cdot}$$

sera aussi une moyenne entre ces quantités; on lui a donné le nom de *moyenne géométrique*. Il est aisé de démontrer que la moyenne arithmétique est plus grande que la moyenne géométrique. Nous voulons faire voir que l'on a

$$\frac{a+b+c+\cdots\cdot\cdot}{n}>\sqrt[n]{abc\cdots\cdot\cdot}$$

ou, en élevant les deux membres à la puissance n,

$$\left(\frac{a+b+c+\cdots\cdot\cdot}{n}\right)^n>abc\cdots\cdot\cdot$$

Le premier membre est le produit de n facteurs égaux à $\frac{a+b+c+\cdots\cdot\cdot}{n}$; la somme de ces facteurs est

$$a+b+c+\cdots\cdot\cdot;$$

le second membre est un produit de n facteurs inégaux dont la somme est aussi $a+b+c+\ldots$; la somme des facteurs

étant la même de part et d'autre, le premier produit, dont tous les facteurs sont égaux, est plus grand que le second.

186. Remarque. Dans la question traitée au n° 184, nous avons supposé que les facteurs variables et positifs ne sont assujettis qu'à la condition d'avoir une somme constante; chacun des facteurs varie de o à a, et on peut les prendre tous arbitrairement, excepté un. Dans ce cas, nous avons vu que le produit est maximum, quand tous les facteurs sont égaux. La même propriété subsiste quand, outre la condition d'avoir une somme constante, les facteurs variables sont assujettis à vérifier d'autres relations, pourvu, toutefois, que les nouvelles relations permettent de rendre tous les facteurs égaux entre eux. Pour fixer les idées, bornons-nous au cas de trois facteurs, et supposons que ces trois facteurs positifs soient assujettis à vérifier les deux conditions

$$x + y + z = a, \tag{1}$$

$$x + 2y + 3z = b. \tag{2}$$

Imaginons d'abord que l'on fasse abstraction de la relation (2) et que l'on donne aux trois facteurs x, y, z tous les systèmes de valeurs positives qui vérifient la relation (1); la plus grande valeur du produit xyz sera la valeur $\frac{a^3}{27}$, qui a lieu quand on fait $x = y = z = \frac{a}{3}$. Si, maintenant, on tient compte de la relation (2), il faudra, parmi les systèmes de valeurs de x, y, z qui vérifient la relation (1), prendre seulement ceux qui vérifient en même temps la relation (2); le produit xyz ne passera plus par toute la

série des valeurs qu'il avait précédemment, mais seulement par une partie d'entre elles ; il est évident que le maximum de la série partielle ne pourra, dans aucun cas, surpasser le maximum de la série totale considérée précédemment ; le plus souvent même il sera moindre. Si les trois facteurs peuvent devenir égaux entre eux, ce qui a lieu quand $b=2a$, le produit acquerra la valeur maximum $\frac{a^3}{27}$; mais si b diffère de $2a$, les trois facteurs ne pouvant être rendus égaux entre eux, le produit n'atteindra pas la valeur $\frac{a^3}{27}$; son maximum sera plus petit que $\frac{a^3}{27}$; dans ce cas, pour déterminer le maximum, il faut recourir à une autre méthode qui sera exposée dans le Cours de mathématiques spéciales.

187. QUESTION XV. *Partager le nombre a en deux parties x et y telles que le produit $x^m y^n$ soit maximum.*

Nous pouvons écrire ce produit sous la forme

$$x^m y^n = m^m n^n \frac{x^m}{m^m} \times \frac{y^n}{n^n}.$$

Faisons abstraction du facteur constant $m^m n^n$, et considérons seulement l'expression variable

$$\frac{x^m}{m^m} \times \frac{y^n}{n^n},$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$\frac{x}{m} \cdot \frac{x}{m} \cdots\cdots \times \frac{y}{n} \cdot \frac{y}{n} \cdots\cdots$$

C'est le produit de $m+n$ facteurs, dont m sont égaux à $\frac{x}{m}$, et n égaux à $\frac{y}{n}$; la somme de tous ces facteurs

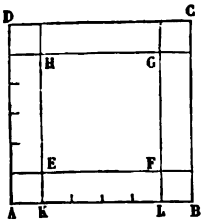
$$m\frac{x}{m} + n\frac{y}{n}$$

est constante, puisque $x+y=a$; d'ailleurs tous ces facteurs peuvent être rendus égaux entre eux; donc le produit acquerra sa valeur maximum, quand tous les facteurs seront égaux entre eux, c'est-à-dire quand on aura

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}.$$

Ainsi il faut partager le nombre a en deux parties proportionnelles aux deux exposants m et n.

188. Question XVI. Étant donnée une feuille de carton carrée ABCD, si après avoir mené des parallèles aux quatre côtés à la même distance on enlève les petits carrés dans les angles et qu'on relève les portions rectangulaires telles que EKLF, on forme une boîte à fond carré EFGH. Appelons $2a$ le côté AB de la feuille de carton et x la distance AK à laquelle on trace les parallèles; la boîte a pour base un carré dont le côté EF est $2a-2x$ ou $2(a-x)$; sa hauteur est x; le volume a pour expression



$$4(a-x)^2x.$$

Quand x varie de 0 à a, le volume, qui est nul pour $x=0$, augmente d'abord, pour diminuer ensuite et redevenir nul; il passe donc par un maximum; la somme des deux facteurs variables $a-x$ et x étant constante, ce maximum aura lieu quand ces deux facteurs seront proportionnels aux exposants 2 et 1, c'est-à-dire quand on aura

$$\frac{a-x}{2}=\frac{x}{1};$$

d'où
$$x = \frac{a}{3}.$$

Ainsi, pour obtenir la boîte la plus grande, il faut partager le côté AB en six parties égales et mener les parallèles par les premiers points de division.

189. Question XVII. *Quel est le plus grand des cylindres circulaires droits qui ont une surface donnée?*

Appelons x le rayon de la base du cylindre et y la hauteur; désignons par $2\pi a^2$ la surface totale et par V le volume ; on a

$$(1) \qquad x^2 + xy = a^2,$$
$$(2) \qquad V = \pi x^2 y.$$

Si, dans l'expression du volume, on remplace y par sa valeur

$$(3) \qquad y = \frac{a^2 - x^2}{x},$$

tirée de l'équation (1), il vient

$$(4) \qquad V = \pi x(a^2 - x^2).$$

L'équation (3) fait voir que x peut varier de 0 à a; le volume, partant de zéro pour revenir à zéro et conservant une valeur finie, passe nécessairement par un maximum. Le volume aura sa plus grande valeur, quand le produit $x(a^2 - x^2)$, ou son carré $x^2(a^2 - x^2)^2$, sera maximum. En regardant x^2 comme la variable, nous avons deux facteurs variables x^2 et $a^2 - x^2$, dont la somme est constante; le maximum a lieu quand ces facteurs sont proportionnels aux exposants 1 et 2, c'est-à-dire quand on a

$$\frac{x^2}{1} = \frac{a^2 - x^2}{2} = \frac{a^2}{3};$$

d'où
$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi, de tous les cylindres de même surface totale, le plus grand est celui dont la hauteur égale le diamètre de la base.

190. Remarque*. Un grand nombre de questions de maximum et de minimum se correspondent deux à deux, de telle sorte qu'à un maximum dans l'une se rapporte un minimum dans l'autre. Soient u et v deux quantités variables, telles qu'à chaque valeur de u correspondent une série de valeurs de v et à chaque valeur de v une série de valeurs de u. Appelons b la plus grande des valeurs de v qui correspondent à une même valeur a de u, et b' la plus grande des valeurs de v qui correspondent à une autre valeur a' de u; nous supposons que, si la seconde valeur a' attribuée à u est plus petite que a, le second maximum b' est plus petit que le premier b. Inversement, je dis que a est la plus petite des valeurs de u qui correspondent à la valeur b attribuée à v. On remarque d'abord que a est l'une de ces valeurs; d'autre part, il est impossible que u prenne une valeur a' plus petite que a; car les valeurs de v qui correspondent à cette valeur a' de u étant toutes égales ou inférieures à la quantité b' qui est plus petite que b, aucune d'elles n'est égale à b.

De même, appelons b la plus petite des valeurs de v qui correspondent à une valeur a de u, et b' la plus petite des valeurs de v qui correspondent à une autre valeur a' de u; nous supposons que, si a' est plus grand que a, le second minimum b' est plus grand que le premier b. On démontrera de la même manière que, inversement, a est la plus grande des valeurs de u qui correspondent à la valeur b de v.

Ainsi, quand les deux quantités variables u et v ont des

valeurs a et b, telles que b soit *la plus petite* ou *la plus grande* des valeurs de v qui correspondent à la valeur a de u, si b augmente ou diminue avec a, inversement a est *la plus grande* ou *la plus petite* des valeurs de u qui correspondent à la valeur b de v.

Supposons, par exemple, que u et v désignent le périmètre et la surface d'un rectangle. Comme il existe une infinité de rectangles ayant même périmètre, à une même valeur du périmètre u correspondent une infinité de valeurs de la surface v. De même, comme il existe une infinité de rectangles ayant la même surface, à une même valeur de v correspondent une infinité de valeurs de u. Nous avons vu (n° 168) que, de tous les rectangles ayant même périmètre a, le plus grand est le carré; appelons b l'aire de ce carré; il est évident, d'ailleurs, que l'aire b du carré diminue avec son périmètre a. On en conclut que, inversement, de tous les rectangles qui ont même surface b, ce carré est celui qui a le plus petit périmètre a.

Nous avons vu aussi (n° 184) que, de tous les triangles de même périmètre, le triangle équilatéral est le plus grand. D'ailleurs l'aire du triangle équilatéral diminue avec son périmètre. On en conclut que, de tous les triangles de même surface, le triangle équilatéral est celui qui a le plus petit périmètre.

Nous avons supposé, dans la démonstration du théorème précédent, que b augmente ou diminue avec a; si b augmentait quand a diminue, on considérerait les quantités variables v et $\frac{1}{u}$. A un maximum de v correspondrait un minimum de $\frac{1}{u}$, et par suite un maximum de u.

CHAPITRE IV

ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES AU SECOND DEGRÉ.

Équations bicarrées.

191. On nomme équations bicarrées des équations du quatrième degré qui ne renferment que les puissances paires de l'inconnue. La forme générale de l'équation bicarrée est

$$(1) \qquad ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Si l'on pose $x^2 = y$, prenant pour inconnue nouvelle y, l'équation se ramène à l'équation du second degré

$$(2) \qquad ay^2 + by + c = 0.$$

On en déduit

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Mais comme $x = \pm\sqrt{y}$, on a finalement

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Chacune des deux valeurs de y donne pour x deux valeurs égales et de signes contraires. Ainsi l'équation bicarrée admet quatre racines, égales deux à deux et de signes contraires.

Si l'équation (2) a ses deux racines réelles et positives, l'équation (1) a ses quatre racines réelles. Si l'une des

racines de l'équation (2) est positive, l'autre négative, l'équation (1) admet deux racines réelles et deux imaginaires. Si les deux racines de l'équation (2) sont négatives ou imaginaires, les quatre racines de l'équation (1) sont imaginaires.

Exemples.

192. QUESTION I. Résoudre les deux équations

$$(1) \qquad xy = 6,$$

$$(2) \qquad y^2 - x^2 = 5.$$

En tirant de la première

$$(3) \qquad y = \frac{6}{x},$$

et substituant dans la seconde, on arrive à l'équation du quatrième degré bicarrée

$$(4) \qquad x^4 + 5x^2 - 36 = 0.$$

Le système des deux équations proposées est équivalent au système des deux équations (3) et (4).

Les deux valeurs de x^2, déduites de l'équation (4), sont réelles, l'une positive 4, l'autre négative -9; la valeur positive donne pour x deux racines réelles

$$x = \pm 2; \quad \text{d'où} \quad y = \pm 3;$$

la valeur négative donne deux racines imaginaires

$$x = \pm 3i, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{6}{\pm 3i} = \mp 2i.$$

193. QUESTION II. *Déterminer un cône circulaire droit, connaissant sa surface totale et son volume.*

Désignons par x le rayon de la base, par y le côté, et représentons par $4\pi a^2$ la surface et par $\frac{4}{3}\pi b^3$ le volume du

cône, nous avons les deux équations

$$(1) \qquad x^2 + xy = 4a^2,$$

$$(2) \qquad x^2\sqrt{y^2 - x^2} = 4b^3.$$

Si, dans la seconde équation, on remplace y par sa valeur

$$(3) \qquad y = \frac{4a^2 - x^2}{x},$$

tirée de la première, on obtient l'équation

$$(4) \qquad ax\sqrt{4a^2 - 2x^2} = 2b^3.$$

Le système des deux équations (1) et (2) est équivalent au système des deux équations (3) et (4). En élevant au carré les deux membres de cette dernière, on arrive à l'équation bicarrée

$$(5) \qquad a^2x^4 - 2a^4x^2 + 2b^6 = 0.$$

Les deux valeurs de x^2 seront réelles et positives, si la condition $b^6 < \frac{a^6}{2}$ est remplie; on en déduit pour x quatre valeurs réelles, deux positives, deux négatives; nous ne prendrons que les deux valeurs positives. Chacune d'elles vérifiant l'équation (4) et rendant le radical réel, est moindre que $a\sqrt{2}$, et par suite donne pour y une valeur positive plus grande que x; on a ainsi deux solutions du problème. Quand $b^6 = \frac{a^6}{2}$, les deux racines deviennent égales et l'on a $x = a$, $y = 3a$.

Si l'on suppose que la surface totale du cône soit constante et que l'on fasse varier le volume, on voit que le volume acquiert sa valeur maximum, quand le côté du cône est égal à trois fois le rayon de la base.

Au reste, l'étude de la variation du volume se ramène à

celle d'un polynôme du second degré. On a, en effet,

$$2b^6 = a^2(2a^2x^2 - x^4) = a^2[a^4 - (a^2 - x^2)^2].$$

Quand x croît de 0 à a, et de a à $a\sqrt{2}$, le volume augmente de zéro à sa valeur maximum pour diminuer ensuite jusqu'à zéro.

194. QUESTION III. *Dans une sphère donnée, inscrire un cylindre ayant une surface totale donnée.*

Appelons r le rayon de la sphère, x le rayon de la base du cylindre, $2y$ sa hauteur, et représentons la surface totale par $4\pi a^2$. Nous aurons les deux équations

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

$$(2) \qquad 2\pi x^2 + 4\pi xy = 4\pi a^2.$$

Si, dans la première équation, on substitue la valeur

$$(3) \qquad y = \frac{2a^2 - x^2}{2x},$$

tirée de la seconde, on arrive à l'équation bicarrée

$$(4) \qquad 5x^4 - 4(a^2 + r^2)x^2 + 4a^4 = 0.$$

Le système des deux équations (1) et (2) est équivalent au système des deux équations (3) et (4). De la dernière on déduit

$$(5) \qquad x = \sqrt{\frac{2(a^2 + r^2) \pm 2\sqrt{(a^2 + r^2)^2 - 5a^4}}{5}}.$$

La valeur de x devant être positive, il est inutile d'écrire le signe $\pm$ devant le grand radical.

Pour que l'équation (4), du second degré en x^2, ait ses racines réelles, il est nécessaire que l'on ait

$$(a^2 + r^2)^2 > 5a^4,$$

ou

$$a^2 + r^2 > a^2\sqrt{5}.$$

Il en résulte la condition

$$a^2 < \frac{r^2}{\sqrt{5}-1},$$

ou

$$a^2 < \frac{r^2(\sqrt{5}+1)}{4}.$$

Si cette condition est remplie, les deux valeurs de x^2 sont réelles et positives. Appelons x'^2 la plus petite, x''^2 la plus grande.

Si l'on substitue chacune de ces valeurs dans l'équation (3), on a pour y deux valeurs correspondantes y' et y''. Mais la valeur de y doit aussi être positive; il faut donc que l'on ait

$$x^2 < 2a^2.$$

Quand on remplace x^2 par $2a^2$, le premier membre de l'équation (4) devient égal à $8a^2(2a^2-r^2)$. Si $a^2 < \frac{r^2}{2}$, le résultat étant négatif, la plus petite racine x'^2 est inférieure à $2a^2$ et donne une solution du problème; la plus grande, étant supérieure à $2a^2$, ne convient pas à la question. Si $a^2 > \frac{r^2}{2}$, les deux racines sont toutes deux ou inférieures, ou supérieures à $2a^2$; mais elles ne peuvent être supérieures à $2a^2$, puisque leur produit est égal à $\frac{4a^4}{5}$; donc elles sont inférieures à $2a^2$, et donnent deux solutions de la question.

En résumé, pour que le problème soit possible, il faut que la surface totale du cylindre soit plus petite que $\pi r^2(\sqrt{5}+1)$. Si cette surface est plus petite que $2\pi r^2$, le problème admet une solution; si la surface est plus grande

que $2\pi r^2$, tout en étant moindre que le maximum, le problème admet deux solutions.

On voit par là que, lorsqu'on fait varier le rayon x du cylindre de o à r, la surface augmente de o au maximum $\pi r^2(\sqrt{5}+1)$, pour diminuer ensuite de ce maximum à $2\pi r^2$.

Transformation des expressions de la forme $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$*.

195. Les quantités irrationnelles de cette forme proviennent, comme nous l'avons vu, des équations bicarrées; il est possible quelquefois de les transformer en une somme ou en une différence de deux radicaux simples, et ceci offre un certain avantage en rendant le calcul plus simple et plus facile. Nous allons d'abord établir un principe qui nous servira.

Lorsque deux quantités INCOMMENSURABLES *de la forme* $a \pm \sqrt{b}$, *les lettres a et b désignant deux quantités commensurables, sont égales, les parties commensurables sont égales, ainsi que les parties incommensurables.* Je dis, par exemple, que l'égalité

$$a+\sqrt{b}=a'+\sqrt{b'},$$

dans laquelle les lettres a et a' désignent des quantités commensurables positives ou négatives, b et b' des quantités commensurables positives non carrés parfaits, ne peut avoir lieu que si l'on a séparément $a=a'$, $b=b'$. En effet, de l'égalité précédente, on déduit

$$\sqrt{b}=(a'-a)+\sqrt{b'},$$

et, en élevant au carré les deux membres,

$$b=(a'-a)^2+b'+2(a'-a)\sqrt{b'}.$$

Si a était différente de a', on aurait

$$\sqrt{b'}=\frac{b-b'-(a'-a)^2}{2(a'-a)},$$

et la quantité incommensurable $\sqrt{b'}$ serait égale à une quantité commensurable, ce qui est impossible. Il faut donc que l'on ait $a=a'$; mais alors on a aussi $b=b'$.

196. Proposons-nous maintenant de transformer l'expression $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, dans laquelle a et b désignent des nombres positifs commensurables, en une somme de deux radicaux simples. Posons

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Nous voulons que les deux nombres positifs cherchés x et y soient commensurables. En élevant les deux membres au carré, on a

$$a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}.$$

En vertu du principe que nous venons d'établir, cette égalité ne peut avoir lieu que si l'on a séparément

$$x+y=a,$$
$$4xy=b.$$

Nous connaissons la somme et le produit des deux inconnues; ces deux inconnues sont donc les racines de l'équation du second degré

$$u^2-au+\frac{b}{4}=0,$$

d'où

$$u=\frac{a\pm\sqrt{a^2-b}}{2}.$$

Les nombres cherchés sont commensurables lorsque la quantité a^2-b est un carré parfait. En désignant par k^2

ce carré, on a ainsi

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+k}{2}}+\sqrt{\frac{a-k}{2}}.$$

La transformation de l'expression $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ s'effectuera de la même manière. On posera

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y};$$

d'où l'on déduit

$$a-\sqrt{b}=x+y-2\sqrt{xy},$$

et par suite

$$x+y=a,$$
$$4xy=b.$$

Les valeurs de x et de y sont les mêmes que précédemment. La transformation sera possible si la quantité a^2-b est un carré parfait. En désignant par k^2 ce carré, on a

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+k}{2}}-\sqrt{\frac{a-k}{2}}.$$

Applications. 1° Transformer l'expression $\sqrt{7+\sqrt{13}}$. La quantité 7^2-13 ou 36 étant égale au carré de 6, la transformation est possible et l'on a

$$\sqrt{7+\sqrt{13}}=\sqrt{\frac{7+6}{2}}+\sqrt{\frac{7-6}{2}}=\sqrt{\frac{13}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{26}+\sqrt{2}}{2}.$$

2° Transformer l'expression $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$. On la mettra sous la forme $\sqrt{6-\sqrt{20}}$, en faisant passer le facteur 2 sous le radical. La quantité 6^2-20 ou 16 étant égale au carré de 4, la transformation est possible et l'on a

$$\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{\frac{6+4}{2}}-\sqrt{\frac{6-4}{2}}=\sqrt{5}-1.$$

Équations trinômes.

197. Considérons une équation de la forme

$$(1) \qquad ax^{2m} + bx^m + c = 0.$$

En posant $x^m = y$, on est ramené à l'équation du second degré

$$(2) \qquad ay^2 + by + c = 0.$$

Une fois les valeurs de y connues, on obtient celle de x par la formule

$$(3) \qquad x = \sqrt[m]{y}.$$

Il y a plusieurs cas à examiner:

1° Si l'indice m est pair, toute valeur positive de y donne pour x deux valeurs réelles, égales et de signes contraires. Mais une valeur négative de y ne donne pour x que des valeurs imaginaires; car les puissances paires des quantités réelles, positives ou négatives, sont toujours positives. C'est ce que nous avons vu dans la résolution des équations bicarrées.

2° Si m est impair, toute valeur réelle de y donne pour x une valeur réelle de même signe et une seule. Soit, par exemple, l'équation

$$x^6 - 19x^3 - 216 = 0;$$

l'équation du second degré

$$y^2 - 19y - 216 = 0,$$

que l'on obtient en posant $x^3 = y$, a pour racines -8 et $+27$; l'équation proposée admet les deux racines réelles -2 et $+3$.

Outre les racines réelles dont nous venons de parler, l'équation admet encore des racines imaginaires, dont il sera question dans le cours de mathématiques spéciales.

Exercices sur le Livre III.

Question I. Trouver le point également éclairé par deux lumières sur la droite qui les joint.

Question II. Partager un trapèze en deux parties équivalentes par une droite parallèle aux deux bases.

Question III. Dans un cercle, inscrire un rectangle ayant une aire donnée. — Maximum de ce rectangle.

Réponse : Le rectangle maximum est le carré.

Question IV. Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant le périmètre et la surface.

Question V. Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et la somme que l'on obtient en ajoutant la hauteur aux deux côtés de l'angle droit.

Question VI. Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant la hauteur et la somme des côtés de l'angle droit.

Question VII. Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant le périmètre et la somme de l'hypoténuse et de la hauteur.

Question VIII. Couper une sphère par un plan, de telle sorte que le segment détaché ait un volume égal à celui du cône qui a pour sommet le centre de la sphère et pour base la section faite dans la sphère par le plan.

Réponse : On mènera le plan sécant à une distance du centre égal au plus grand segment du rayon partagé en moyenne et extrême raison.

Question IX. Dans un cône droit, inscrire un cylindre ayant une surface latérale donnée. — Maximum de cette surface.

Réponse : La surface latérale est maximum quand la hauteur du cylindre est moitié de celle du cône.

Question X. Dans un triangle isocèle, inscrire un rectangle ayant une surface donnée.

Question XI. Circonscrire à un rectangle un triangle isocèle ayant une surface donnée.

Question XII. Déterminer un triangle isocèle, connaissant les deux côtés égaux et la surface.

Question XIII. Un hexagone est formé par des triangles isocèles égaux, placés sur les côtés d'un triangle équilatéral. Déterminer cet hexagone, connaissant le périmètre et la surface.

Question XIV. On forme un octogone en enlevant sur les angles d'un carré quatre triangles rectangles isocèles égaux ; déterminer cet octogone, connaissant le périmètre et la surface.

Question XV. Déterminer un secteur circulaire, connaissant le périmètre et la surface.

Question XVI. Étant donné un prisme droit à base carrée, on joint deux à deux les milieux des côtés de la base supérieure; par un point pris sur le prolongement de l'axe du prisme et les quatre côtés du carré inscrit, on mène des plans qui détachent du prisme quatre tétraèdres, et qui les remplacent par une pyramide à base carrée placée au-dessus du prisme. Démontrer que le volume du solide ainsi formé est constant, et déterminer la position du sommet sur l'axe, de manière que la surface ait une valeur donnée.

Question XVII. Étant donnés un cercle, un point A sur la circonférence, un point B sur le diamètre qui passe en A, on joint les deux points fixes A et B à un point quelconque M de la circonférence; déterminer la position du point M de manière que la ligne brisée AM+MB ait une longueur donnée.

Question XVIII. Étant donné un vase cylindrique plein d'air, dans lequel pénètre un tube vertical, par le tube on verse une certaine quantité d'eau; déterminer la hauteur à laquelle s'élèvera le niveau de l'eau dans le vase et dans le tube.

Question XIX. Déterminer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant le périmètre et la somme des surfaces engendrées par les deux côtés de l'angle droit tournant autour de l'hypoténuse.

Question XX. Dans un demi-cercle, inscrire un trapèze de périmètre donné. — Maximum de ce périmètre.

Question XXI. Circonscrire à une sphère un cône dont la base repose sur un plan diamétral et qui ait une surface donnée. — Minimum de cette surface.

Réponse : Le cône dont la surface totale est minimum est celui qui a pour section un triangle équilatéral. Cette surface minimum égale celle de la sphère.

Question XXII. Un cercle étant inscrit dans un angle droit, mener à ce cercle une tangente telle que le triangle ainsi formé ait une surface donnée. — Minimum et maximum de cette surface.

Question XXIII. Par un point donné dans l'intérieur d'un cercle, mener deux cordes rectangulaires telles qu'en joignant leurs extrémités on forme un quadrilatère ayant une aire donnée.

Question XXIV. Avec un levier pesant de seconde espèce, on veut soulever un poids donné appliqué à un point donné. Quelle longueur faut-il donner au levier pour que la puissance soit minimum, en tenant compte du poids du levier?

Question XXV. Cône maximum inscrit dans une sphère.

Question XXVI. Triangle isocèle maximum inscrit dans un cercle.

Question XXVII. On commence à faire mouvoir le piston d'une pompe aspirante. Trouver à quelle hauteur s'élèvera l'eau dans le tuyau d'aspiration, après le premier, le second, le troisième... coup de piston.

Application numérique. La section du corps de pompe est de 0,01 mètre carré, celle du tuyau d'aspiration de 0,002; la course du piston de $0^m,4$, la longueur du tuyau d'aspiration de 8 mètres. On représentera la pression atmosphérique par une colonne de $1^m,330$.

On trouvera pour l'élévation de l'eau, après chaque coup de piston :

	mètres.	mètres.
1er coup	1,07	1,07
2e —	1,08	2,16
3e —	1,09	5,25
4e —	1,11	4,30
5e —	1,14	5,50
6e —	1,18	6,68
7e —	1,29	7,97

La pompe fonctionnera après le huitième coup de piston.

Question XXVIII. Dans une sphère, mener un plan BC tel que le volume du cône circonscrit ABC soit divisé en deux parties égales par la calotte BDC. Plus généralement dans un rapport donné.

LIVRE IV

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES

CHAPITRE PREMIER

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

Définition.

198. On appelle *progression arithmétique* une suite de quantités telles que la différence entre deux quantités consécutives est constante. Ces diverses quantités sont les *termes* de la progression. L'excès d'un terme quelconque sur le précédent se nomme *raison* de la progression.

La progression est *croissante*, lorsque les termes vont en augmentant. Dans ce cas, la raison est positive. Ainsi la progression croissante

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20$$

a pour raison $+3$.

Au contraire, la progression est *décroissante*, lorsque les termes vont en diminuant. Dans ce cas, la raison est négative. Ainsi la progression décroissante

$$\div 20 . 17 . 14 . 11 . 8 . 5 . 2$$

a pour raison -3.

199. THÉORÈME I. *Dans une progression arithmétique, un terme de rang quelconque est égal au premier plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

Appelons $a, b, c, d, \ldots\ldots$ les différents termes de la progression, r la raison. D'après la définition même de la progression, le second terme est égal au premier, plus la raison,

$$b = a + r.$$

Le troisième terme est égal au second plus la raison, et, par conséquent, au premier plus deux fois la raison,

$$c = b + r = a + r + r = a + 2r.$$

Le quatrième terme est égal au troisième plus la raison, et, par conséquent, au premier plus trois fois la raison,

$$d = c + r = a + 2r + r = a + 3r,$$

et ainsi de suite. En général, le terme qui occupe le n^e rang, et qui par conséquent en a $n-1$ avant lui, est

$$(1) \qquad a + (n-1)r.$$

Ainsi la progression arithmétique peut être mise sous la forme

$$\div a \,.\, a+r \,.\, a+2r \,.\, a+3r \ldots\ldots$$

200. REMARQUE. Les termes d'une progression arithmétique croissante augmentent indéfiniment, de manière à devenir plus grands que toute quantité donnée. En effet, le terme de rang n sera plus grand que la quantité donnée A, si l'on a

$$a + (n-1)r > \mathrm{A},$$

ou

$$(n-1)r > \mathrm{A} - a,$$

et, en divisant par le nombre positif r,

$$n - 1 > \frac{\mathrm{A} - a}{r},$$

$$n > \frac{\mathrm{A} - a}{r} + 1.$$

Ainsi, dès que le rang surpasse la quantité $\frac{A-a}{r}+1$, le terme surpasse la quantité A, si grande qu'elle soit.

Considérons, par exemple, la progression croissante indéfinie

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 \ldots\ldots$$

Pour avoir un terme plus grand que 1000, on prendra

$$n > \frac{1000-2}{3}+1,$$

c'est-à-dire

$$n > 333+\frac{2}{3}.$$

Le 334e terme est plus grand que 1000.

201. *Insérer entre deux quantités données un certain nombre de moyens arithmétiques.* On appelle moyens arithmétiques, insérés entre deux quantités données, des quantités qui forment une progression arithmétique dont les deux quantités données sont les deux extrêmes. La question revient à trouver la raison de la progression.

Soit à insérer n moyens arithmétiques entre les deux quantités a et b. Le terme b de la progression est égal au premier terme a, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui, c'est-à-dire plus $n+1$ fois la raison. On a donc

$$b = a + (n+1)r,$$

d'où l'on déduit

$$r = \frac{b-a}{n+1}. \qquad (2)$$

Ainsi *on obtient la raison de la progression en divisant la différence des deux quantités données par le nombre des moyens à insérer plus un.*

Si, par exemple, on veut insérer 5 moyens entre les deux nombres 2 et 20, on prendra

$$r = \frac{20 - 2}{5 + 1} = 3,$$

et l'on formera la progression

$$\div 2.5.8.11.14.17.20.$$

202. THÉORÈME II. *Si, entre deux termes consécutifs d'une progression arithmétique, on insère le même nombre de moyens, les progressions partielles ainsi obtenues forment une seule et même progression.*

En effet, puisqu'on insère le même nombre de moyens entre deux termes consécutifs, et que la différence de ces deux termes est constante, la raison est la même dans toutes les progressions partielles ; et comme le dernier terme de chacune d'elles est le premier de la suivante, ces progressions partielles se continuent, de manière à ne former qu'une seule et même progression.

203. THÉORÈME III. *Dans toute progression arithmétique, la somme de deux termes également distants des extrêmes est constante.*

Soit la progression

$$\div a.b.c........h.k.l.$$

Je considère le second terme et l'avant-dernier ; le second terme est égal au premier plus la raison,

$$b = a + r;$$

l'avant-dernier est égal au dernier, moins la raison,

$$k = l - r.$$

En ajoutant ces deux égalités membre à membre, on a

$$b + k = a + l.$$

On a de même, en considérant les termes c et h,

$$c = b + r \quad , \quad h = k - r;$$

d'où l'on déduit

$$c + h = b + k,$$

et ainsi de suite.

Lorsque la progression contient un nombre impair de termes, il y a au milieu un terme également distant des deux extrêmes. Deux fois ce terme est égal à la somme des extrêmes. Ainsi, dans la progression

$$\div 2.5.8.11.14.17.20.$$

les termes 2 et 20, 5 et 17, 8 et 14, donnent la même somme 22, qui est égale à deux fois le terme du milieu 11.

204. Théorème IV. *La somme des termes d'une progression arithmétique est égale à la moitié du produit que l'on obtient en multipliant la somme des extrêmes par le nombre des termes.*

Soit toujours la progression

$$\div a.b.c.........h.k.l.$$

Appelons n le nombre des termes, s leur somme, et écrivons-la au-dessous d'elle-même en ordre inverse,

$$s = a + b + c.....+ h + k + l,$$
$$s = l + k + h.....+ c + b + a.$$

Les deux termes placés l'un au-dessous de l'autre sont également distants des extrêmes dans la progression et, par conséquent, leur somme est constante et égale à la somme des extrêmes $a + l$. Si donc on ajoute les deux sommes terme à terme, la somme totale $2s$ se composera de la somme des extrêmes répétée autant de fois qu'il y a de

termes dans la progression. On aura ainsi

$$2s=(a+l)n;$$

d'où

$$s=\frac{(a+l)n}{2}. \tag{3}$$

Par exemple, la somme des termes de la progression

$$\div 2.5.8.11.14.17.20$$

est 77.

Si l'on remplace le dernier terme par sa valeur (n° 199)

$$l=a+(n-1)r,$$

on obtient cette autre formule

$$s=na+\frac{n(n-1)}{2}r. \tag{4}$$

Applications. 1° La somme des n premiers nombres entiers

$$1+2+3.....+n$$

est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

2° La somme des n premiers nombres impairs

$$1+3+5.....+(2n-1)$$

est égale à n^2. Ainsi

$$1+3=2^2\ ,\ 1+3+5=3^2\ ,\ 1+3+5+7=4^2, \text{ etc.}$$

3° Trouver le nombre des termes d'une progression arithmétique, connaissant le premier terme, la raison, et la somme des termes.

La formule (4) donne, pour déterminer n, une équation du second degré

$$rn^2+(2a-r)n-2s=0.$$

Le dernier terme étant négatif, les deux racines sont toujours réelles et de signes contraires. On prendra la racine positive; pour qu'elle soit admissible, il faut qu'elle soit entière.

4° Trouver cinq nombres en progression arithmétique, connaissant la somme des termes et celle de leurs carrés.

Appelons a et b^2 les deux sommes données; désignons par x le terme du milieu et par y la raison. Les différents termes de la progression s'écriront

$$\div x - 2y . x - y . x . x + y . x + 2y,$$

et l'on aura les deux équations

$$5x = a,$$
$$5x^2 + 10y^2 = b^2.$$

CHAPITRE II

PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.

Définition.

205. On appelle *progression géométrique* une suite de quantités telles que le rapport de deux consécutives est constant. Le rapport de chaque terme au précédent se nomme *raison*.

La progression est croissante, lorsque la raison est plus

grande que l'unité en valeur absolue. Ainsi la progression géométrique croissante

$$\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458$$

a pour raison 3.

La progression est décroissante, lorsque la raison est plus petite que l'unité en valeur absolue. Ainsi la progression géométrique décroissante

$$\div 1458 : 486 : 162 : 54 : 18 : 6 : 2$$

a pour raison $\frac{1}{3}$.

206. Théorème I. *Dans une progression géométrique, un terme de rang quelconque est égal au premier terme multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent.*

Appelons a, b, c, d,...... les différents termes de la progression, r la raison. D'après la définition même de la progression géométrique, le second terme est égal au premier multiplié par la raison,

$$b = ar.$$

Le troisième terme est égal au second multiplié par la raison, et, par conséquent, au premier multiplié par la seconde puissance de la raison,

$$c = br = arr = ar^2.$$

Le quatrième terme est égal au troisième multiplié par la raison, et, par conséquent, au premier multiplié par la troisième puissance de la raison,

$$d = cr = ar^2r = ar^3,$$

et ainsi de suite. En général, le terme qui occupe le n^e rang, et par conséquent en a $n-1$ avant lui, est

$$ar^{n-1}. \tag{1}$$

Ainsi la progression géométrique peut être mise sous la forme

$$\div\!\div a : ar : ar^2 : ar^3 \ldots\ldots;$$

les différents termes sont égaux au premier multiplié par les puissances successives de la raison.

207. Remarque I. *Les termes d'une progression géométrique croissante augmentent à l'infini.*

Nous supposerons la raison positive. Puisque la progression est croissante, la raison r est plus grande que l'unité, et nous pouvons la représenter par $1 + \alpha$ (α étant une quantité positive, aussi petite qu'on veut). Considérons d'abord la progression

$$\div\!\div 1 : 1 + \alpha : (1 + \alpha)^2 : (1 + \alpha)^3 \ldots\ldots$$

formée par les puissances successives de la raison. Cherchons la différence entre deux termes consécutifs quelconques. De la relation

$$(1 + \alpha)^{n+1} = (1 + \alpha)^n \times (1 + \alpha) = (1 + \alpha)^n + \alpha(1 + \alpha)^n,$$

on déduit

$$(1 + \alpha)^{n+1} - (1 + \alpha)^n = \alpha(1 + \alpha)^n;$$

le facteur $(1 + \alpha)^n$, dans le second membre, étant plus grand que l'unité, il en résulte que la différence cherchée est plus grande que α, excepté pour les deux premiers termes, dont la différence est égale à α. Ainsi les termes de la progression géométrique, formée par les puissances successives de la raison, sont plus grands que les termes correspondants de la progression arithmétique

$$\div 1 . 1 + \alpha . 1 + 2\alpha . 1 + 3\alpha \ldots\ldots$$

Mais ces derniers augmentent indéfiniment, de manière à devenir plus grands que toute quantité donnée (n° 200); il en est de même à plus forte raison des premiers.

Un terme quelconque d'une progression géométrique croissante a pour expression $a(1+\alpha)^n$; nous venons de démontrer que, lorsque n croît indéfiniment, $(1+\alpha)^n$ augmente à l'infini; la valeur absolue du produit $a(1+\alpha)^n$ de cette quantité par le premier terme a jouit évidemment de la même propriété.

208. Remarque II. *Les termes d'une progression géométrique décroissante tendent vers zéro, quand on prolonge indéfiniment la progression.* La raison, étant plus petite que l'unité, peut être représentée par $\frac{1}{1+\alpha}$; un terme quelconque de la progression sera

$$\frac{a}{(1+\alpha)^n}.$$

Quand n croît indéfiniment, le dénominateur augmentant à l'infini, la fraction tend vers zéro.

209. *Insérer entre deux nombres un certain nombre de moyens géométriques.* On appelle moyens géométriques, insérés entre deux nombres donnés, des nombres qui forment une progression géométrique dont les nombres donnés sont les deux extrêmes. La question revient évidemment à trouver la raison de la progression.

Soit à insérer n moyens entre a et b. En appelant r la raison cherchée, on a

$$b = ar^{n+1};$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}.$$

Ainsi *on obtient la raison de la progression en extrayant du quotient des deux nombres donnés une racine ayant pour indice le nombre de moyens à insérer plus un.*

210. Théorème II. *Si, entre deux termes consécutifs d'une progression géométrique, on insère un même nombre de moyens, les progressions partielles ainsi obtenues forment une seule et même progression.*

En effet, puisqu'on insère le même nombre de moyens entre deux termes consécutifs de la progression, et que le quotient de ces deux termes est constant, la raison sera la même dans toutes les progressions partielles; et comme le dernier terme de chacune d'elles est le premier de la suivante, ces progressions partielles se continuent de manière à ne former qu'une seule et même progression.

211. Théorème III. *Dans toute progression géométrique, le produit de deux termes également distants des extrêmes est constant.*

Soit la progression

$$\div\!\!\div a : b : c \ldots\ldots : h : k : l.$$

Je considère le second terme et l'avant-dernier; le second terme est égal au premier multiplié par la raison,

$$b = ar;$$

l'avant-dernier est égal au dernier divisé par la raison,

$$k = \frac{l}{r}.$$

On a donc

$$bk = al.$$

On a de même, en considérant les deux termes c et h,

$$c = br \quad , \quad h = \frac{k}{r},$$

d'où l'on déduit

$$ch = bk,$$

et ainsi de suite.

Lorsque la progression contient un nombre impair de termes, il y a au milieu un terme également distant des extrêmes. Le carré de ce terme est égal au produit des extrêmes. Ainsi, dans la progression

$$\div\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458,$$

les termes 2 et 1458, 6 et 486, 18 et 162 donnent le même produit 2916, qui est le carré du terme du milieu 54.

212. THÉORÈME IV. *Le produit des termes d'une progression géométrique est égal à la racine carrée du produit des extrêmes élevé à une puissance marquée par le nombre des termes.*

Soit la progression

$$\div\div a : b : c \ldots\ldots : h : k : l.$$

Appelons n le nombre des termes, P leur produit, et écrivons-le au-dessous de lui-même en ordre inverse,

$$P = abc \ldots\ldots hkl,$$
$$P = lkh \ldots\ldots cba.$$

Les deux facteurs placés l'un au-dessous de l'autre sont des termes également distants des extrêmes dans la progression, et, par conséquent, leur produit est constant et égal au produit des extrêmes al. Si donc on multiplie les deux produits l'un par l'autre, le produit total se composera du produit des extrêmes élevé à une puissance marquée par le nombre des termes. On aura

$$P^2 = (al)^n;$$

d'où

$$(3) \qquad P = \sqrt{(al)^n}.$$

En remplaçant l par sa valeur (n° 206)

$$l = ar^{n-1},$$

on obtient cette autre formule

$$(4)\qquad P=\sqrt{a^{2n}r^{n(n-1)}}=a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

qui n'exige plus l'extraction d'une racine carrée; car l'exposant $n(n-1)$, produit de deux nombres entiers consécutifs, est toujours pair.

213. Théorème V. *On obtient la somme des termes d'une progression géométrique en retranchant le premier terme du dernier multiplié par la raison et divisant la différence par la raison moins l'unité.*

En multipliant la somme cherchée

$$S=a+ar+ar^2\ldots\ldots+ar^{n-1}$$

par la raison r, on a

$$Sr=ar+ar^2+ar^3\ldots\ldots+ar^n.$$

Si l'on retranche la première quantité de la seconde, tous les termes se détruisent dans les seconds membres, excepté le premier et le dernier, et il vient

$$S(r-1)=ar^n-a,$$

d'où l'on déduit

$$(5)\qquad S=\frac{ar^n-a}{r-1},$$

ou

$$(6)\qquad S=\frac{lr-a}{r-1}.$$

On emploie cette formule telle qu'elle est, si la progression est croissante. Mais si la progression est décroissante, en changeant les signes des deux termes de la fraction, on la met sous la forme

$$(7)\qquad S=\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a-lr}{1-r}.$$

EXEMPLE. La somme des termes de la progression géométrique croissante

$$\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458$$

est, d'après la formule (6),

$$S = \frac{1458 \times 3 - 2}{3 - 1} = 2186.$$

La somme des termes de la même progression écrite en ordre inverse et alors décroissante est, d'après la formule (7),

$$S = \frac{1458 - 2 \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2186.$$

REMARQUE. On obtient aussi les formules précédentes en écrivant la somme cherchée sous la forme

$$S = a(1 + r + r^2 \ldots\ldots + r^{n-1})$$

et remarquant que la quantité entre parenthèses est le quotient de $r^n - 1$ par $r - 1$ (n° 68), ce qui donne immédiatement

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}.$$

214. THÉORÈME VI. *La somme des termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini tend vers une limite égale au premier terme divisé par l'unité moins la raison.*

Supposons que la progression géométrique décroissante

$$\div a : ar : ar^2 : \ldots\ldots$$

se prolonge indéfiniment. La somme des n premiers termes est donnée par la formule

$$(8) \qquad S = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}.$$

Si l'on prend un nombre de termes de plus en plus grand,

la raison r étant plus petite que l'unité en valeur absolue, le terme ar^n de la progression décroissante diminue de plus en plus, et tend vers zéro, ainsi que la quantité $\frac{ar^n}{1-r}$, quand n augmente indéfiniment; donc la somme des termes se rapproche indéfiniment de la quantité fixe $\frac{a}{1-r}$, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra. En un mot, la somme des termes tend vers la limite $\frac{a}{1-r}$.

Le mode de convergence de la somme des termes vers sa limite n'est pas le même, suivant que la raison est positive ou négative. Pour fixer les idées, supposons que le premier terme a soit une quantité positive. Lorsque la raison est positive, tous les termes de la progression sont positifs; dans ce cas, il est évident que la somme va en augmentant constamment, à mesure que l'on prend un plus grand nombre de termes; mais elle n'augmente pas au delà de toute limite, car elle reste toujours inférieure à la quantité fixe $\frac{a}{1-r}$; elle ne peut jamais atteindre rigoureusement cette limite, dont elle se rapproche indéfiniment.

Lorsque la raison est négative, les termes de la progression sont alternativement positifs et négatifs; la formule (8) montre que la somme des n premiers termes est tantôt plus petite, tantôt plus grande que la quantité fixe $\frac{a}{1-r}$, dont elle se rapproche de plus en plus; si n est pair, la différence $-\frac{ar^n}{1-r}$ est négative, et la somme plus petite que la limite; au contraire, si n est impair, la différence est positive et la somme plus grande que la limite; ainsi,

dans ce cas, la somme des termes converge vers la limite $\frac{a}{1-r}$, en oscillant de part et d'autre.

Applications. 1° La somme des termes de la progression décroissante indéfinie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots,$$

dont la raison est $\frac{1}{2}$, a pour limite

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

On voit bien sur cet exemple comment les sommes consécutives

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots\ldots,$$

que l'on obtient en prenant le premier terme, les deux premiers, les trois premiers, etc., tendent vers la limite 1 ; la première somme diffère de l'unité de $\frac{1}{2}$, la seconde de $\frac{1}{4}$, la troisième de $\frac{1}{8}$, la quatrième de $\frac{1}{16}$, et ainsi de suite.

2° La somme des termes de la progression décroissante

$$\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{16}+\ldots\ldots,$$

dont la raison est $-\frac{1}{2}$, a pour limite

$$\frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}}=1.$$

Dans ce second exemple, la raison est négative et les sommes consécutives

$$\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{15}{16}, \frac{33}{32}, \ldots\ldots,$$

sont alternativement plus grandes et plus petites que la limite 1; la première surpasse l'unité de $\frac{1}{2}$, la seconde en diffère de $\frac{1}{4}$, la troisième la surpasse de $\frac{1}{8}$, la quatrième en diffère de $\frac{1}{16}$, etc.

3° Les fractions décimales périodiques sont des progressions géométriques décroissantes. Par exemple, la fraction décimale périodique simple

$$0{,}353535\ldots\ldots$$

peut s'écrire

$$\frac{35}{100}+\frac{35}{100^2}+\frac{35}{100^3}+\ldots\ldots;$$

c'est une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{100}$. La somme des termes tend vers la limite

$$\frac{\frac{35}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{35}{99}.$$

Cette limite est ce qu'on appelle la valeur de la fraction décimale périodique.

CHAPITRE III

LOGARITHMES.

Définition.

215. Étant données deux progressions, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro,

$$\begin{array}{l} \div\!\div 1 : a : a^2 : a^3 : a^4 : \ldots\ldots, \\ \div 0 \,.\, b \,.\, 2b \,.\, 3b \,.\, 4b \,\ldots\ldots, \end{array}$$

les termes de la progression arithmétique sont dits les *logarithmes* des termes correspondants de la progression géométrique. L'ensemble de ces deux progressions constitue ce qu'on appelle un *système* de logarithmes.

On suppose, en général, que la raison a de la progression géométrique est plus grande que l'unité, la raison b de la progression arithmétique étant d'ailleurs positive ; de cette manière, les termes de la progression géométrique augmentent à l'infini, de même que les termes de la progression arithmétique.

216. Nous avons défini de la sorte les logarithmes des nombres qui font partie de la progression géométrique ; il est facile d'étendre cette définition à tous les nombres. Concevons que l'on insère un très-grand nombre de moyens géométriques entre deux termes consécutifs de la progression géométrique, on formera une nouvelle progression géométrique procédant par intervalles beaucoup plus res-

serrés. Si, par exemple, on insère mille moyens géométriques entre deux termes consécutifs, la nouvelle progression renfermera mille nombres entre 1 et a, mille entre a et a^2, etc. En insérant le même nombre de moyens arithmétiques entre deux termes consécutifs de la progression arithmétique, on formera une nouvelle progression arithmétique, qui donnera exactement les logarithmes de tous les nombres inscrits dans la nouvelle progression géométrique, et approximativement les logarithmes de tous les autres nombres.

Soit $n-1$ le nombre des moyens insérés. Appelons q la raison de la nouvelle progression géométrique, r celle de la nouvelle progression arithmétique; on a

$$q=\sqrt[n]{a} \quad , \quad r=\frac{b}{n},$$

et les deux nouvelles progressions sont

$$\begin{array}{l} \div\!\div 1 : q : \; q^2 : \; q^3 : \ldots\ldots, \\ \div 0 . r . 2r \; . \; 3r \; \ldots\ldots \end{array}$$

On voit que la raison r de la nouvelle progression arithmétique est aussi petite qu'on veut. Je vais démontrer que l'excès de la raison q de la nouvelle progression géométrique sur l'unité peut être aussi rendu plus petit qu'une quantité donnée α, si petite qu'elle soit. En effet, l'inégalité

$$\sqrt[n]{a}<1+\alpha$$

sera satisfaite, si l'on a

$$a<(1+\alpha)^n,$$

ou

$$(1+\alpha)^n>a.$$

Or, si petite que soit α, on sait (n° 200) que n peut être

pris assez grand pour que $(1+\alpha)^n$ surpasse la quantité donnée a. Pour cette valeur de n et pour toutes les valeurs plus grandes, la raison q sera donc moindre que $1+\alpha$.

Soit A un nombre positif quelconque plus grand que l'unité; si ce nombre fait partie de la nouvelle progression géométrique, le terme correspondant de la progression arithmétique donnera exactement son logarithme. Si ce nombre ne fait pas partie de la progression géométrique, il sera compris entre deux termes consécutifs q^m et q^{m+1}; or la différence de ces deux termes

$$q^{m+1}-q^m=q^m(q-1),$$

étant moindre que $A\alpha$, puisque q^m est plus petit que A, et $q-1$ plus petit que α, peut être rendue aussi petite qu'on veut; le nombre A différera donc de chacun des termes qui le comprennent aussi peu qu'on voudra. On prendra approximativement pour le logarithme de A celui de l'un d'eux, soit mr, soit $(m+1)r$; l'erreur commise sur ce logarithme, étant moindre que la raison r ou $\frac{b}{n}$, sera aussi petite qu'on voudra.

Propriétés fondamentales des logarithmes.

217. THÉORÈME I. *Le logarithme du produit de plusieurs facteurs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs.*

Considérons les deux progressions

$$\div\!\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots,$$
$$\div 0 . r . 2r . 3r . 4r \ldots\ldots,$$

au moyen desquelles on définit les logarithmes. Nous remarquons que les termes de la progression arithmétique sont les multiples successifs de la raison, et que les termes

de la progression géométrique sont les puissances successives de la raison. Ces progressions sont disposées de manière que les termes qui occupent le même rang soient placés l'un au-dessous de l'autre ; on voit que, dans deux termes correspondants q^m et mr, le même nombre m sert à la fois d'exposant et de multiplicateur.

Je multiplie deux termes quelconques q^m et q^n de la progression géométrique, le produit q^{m+n} est aussi un terme de la progression géométrique. J'additionne leurs logarithmes, c'est-à-dire les deux termes correspondants mr et nr de la progression arithmétique ; la somme $(m+n)r$ est aussi un terme de la progression arithmétique. Or le produit q^{m+n} et la somme $(m+n)r$ se correspondent dans les deux progressions. Donc le logarithme du produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.

En général, soient a et b deux nombres quelconques, on aura

$$\log (a \times b) = \log a + \log b.$$

Ce théorème s'étend évidemment à un nombre quelconque de facteurs.

218. Théorème II. *Le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.*

Appelons c le quotient de a par b (a étant supposé plus grand que b). On a

$$a = b \times c,$$

et, d'après le théorème précédent,

$$\log a = \log b + \log c;$$

d'où

$$\log c = \log a - \log b.$$

Ainsi

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

219. Théorème III. *Le logarithme de la puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre multiplié par l'indice de la puissance.*

En effet, la puissance a^m étant le produit de m facteurs égaux à a, on a

$$a^m = a \times a \times a \times \ldots\ldots;$$

d'où

$$\log a^m = \log a + \log a + \log a + \ldots\ldots,$$
$$\log a^m = m \log a.$$

Par exemple, le logarithme du carré d'un nombre est égal à deux fois le logarithme de ce nombre, le logarithme du cube est égal à trois fois le logarithme du nombre, etc.

220. Théorème IV. *Le logarithme de la racine d'un nombre est égal au logarithme du nombre divisé par l'indice du radical.*

Appelons b la racine m^e de a; on a

$$a = b^m,$$

et, d'après le théorème précédent,

$$\log a = m \log b;$$

d'où

$$\log b = \frac{\log a}{m}.$$

Ainsi

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}.$$

Par exemple, la racine carrée ou la racine cubique d'un nombre a pour logarithme la moitié ou le tiers du logarithme de ce nombre.

221. Remarque. En arithmétique, on apprend à effectuer six opérations sur les nombres : trois opérations directes et trois opérations inverses. Les trois opérations di-

rectes sont : l'addition, la multiplication et l'élévation aux puissances. Les trois opérations inverses sont : la soustraction, la division et l'extraction des racines. La soustraction est l'opération inverse de l'addition ; la division, l'opération inverse de la multiplication; l'extraction des racines, l'opération inverse de l'élévation aux puissances.

Il y a ainsi trois ordres d'opérations, comprenant chacune une opération directe et une opération inverse. Les opérations du premier ordre, addition et soustraction, s'effectuent facilement et avec rapidité; celles du second ordre, multiplication et division, sont déjà plus longues et plus difficiles; enfin celles du troisième ordre, puissance et racine, deviennent très-longues et très-pénibles. Les propriétés des logarithmes, que nous venons de démontrer, permettent de remplacer les opérations du second et du troisième ordre par celles d'un ordre moins élevé. Ainsi la multiplication et la division des nombres sont ramenées à l'addition et à la soustraction de leurs logarithmes, la puissance revient à une multiplication, la racine à une division. On comprend par là toute l'utilité des logarithmes.

Logarithmes vulgaires.

222. Les deux progressions par lesquelles on définit les logarithmes dont on fait habituellement usage, et qu'on appelle pour cette raison *logarithmes vulgaires*, sont les suivantes :

$$\div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : \ldots\ldots,$$
$$\div 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 : \ldots\ldots$$

Dans ce système, le logarithme de 10 est 1, celui de 100 est 2, celui de 1000 est 3; en général, 10^n a pour logarithme le nombre entier n.

On nomme *base* d'un système de logarithmes le nombre qui a pour logarithme l'unité. Le système des logarithmes vulgaires, que l'on appelle aussi logarithmes de *Briggs*, a pour base le nombre *dix*, qui est la base de notre système de numération.

Les logarithmes ont été calculés en décimales : la partie entière d'un logarithme s'appelle *caractéristique*. Il est aisé de voir que *la caractéristique du logarithme d'un nombre renferme autant d'unités qu'il y a de chiffres dans la partie entière de ce nombre moins un*. En effet, tout nombre compris entre 1 et 10 n'a qu'un chiffre à sa partie entière; son logarithme, étant compris entre 0 et 1, aura 0 pour partie entière ou pour caractéristique. Tout nombre compris entre 10 et 100 a deux chiffres à sa partie entière; son logarithme, étant compris entre 1 et 2, aura 1 pour caractéristique. De même, tout nombre compris entre 100 et 1000 a trois chiffres à sa partie entière; son logarithme, étant compris entre 2 et 3, a 2 pour caractéristique. En général, tout nombre compris entre 10^n et 10^{n+1} a $n+1$ chiffres à sa partie entière; son logarithme, étant compris entre n et $n+1$, a n pour caractéristique.

223. Le logarithme de 10^n est n. Si l'on multiplie un nombre a par 10^n, on a

$$\log(a \times 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n.$$

La partie décimale du logarithme reste la même ; il suffit d'ajouter n unités à la caractéristique.

Si l'on divise un nombre a par 10^n, on a

$$\log \frac{a}{10^n} = \log a - \log 10^n = \log a - n.$$

La partie décimale reste la même; il suffit de retrancher n unités de la caractéristique.

Ainsi, *quand on multiplie ou quand on divise un nombre par* 10, 100, 1000..., *il suffit d'augmenter ou de diminuer la caractéristique du logarithme d'une, deux, trois ..... unités.*

Il en résulte que, lorsque deux nombres décimaux ne diffèrent que par la place qu'occupe la virgule, leurs logarithmes ont la même partie décimale et ne diffèrent que par la caractéristique. Ceci est important pour la facilité des calculs, parce qu'on a souvent à déplacer la virgule dans les nombres décimaux.

Tables de Callet.

224. Les tables de logarithmes les plus usitées en France sont les petites tables de Lalande et les grandes tables de Callet.

Les tables de Lalande contiennent les logarithmes des nombres entiers de 1 à 10000 avec cinq décimales.

Les tables de Callet contiennent les logarithmes des nombres entiers de 1 à 108000. La première partie de la table, nommée première *chiliade* (premier mille), contient les logarithmes des 1200 premiers nombres avec huit décimales. La table change ensuite de disposition, et donne les logarithmes des nombres de 10200 à 100000, avec sept décimales; à la fin, la table se prolonge de 100000

à 108000, avec huit décimales *. Dans la colonne verticale intitulée N, on lit les dizaines des nombres; les unités sont inscrites au haut de la page et en tête des dix colonnes intitulées 0, 1, 2,..., 8, 9. La caractéristique n'est pas indiquée : il est facile de l'ajouter d'après la règle énoncée. Dans la colonne voisine, on trouve les trois premiers chiffres décimaux de chaque logarithme; les quatre suivants sont inscrits dans la colonne convenable. Si l'on veut, par exemple, le logarithme du nombre 35647, dans la colonne verticale intitulée N on descendra jusqu'au nombre 3564, puis, dans cette ligne horizontale, on s'avancera vers la droite jusqu'à la colonne intitulée 7, et l'on écrira

$$\log 35647 = 4,5520230.$$

Le nombre ayant cinq chiffres, on commencera par écrire sa caractéristique 4; les trois premiers chiffres décimaux 552 sont communs à un assez grand nombre de logarithmes; on trouve les quatre derniers, 0230, dans la colonne verticale intitulée 7.

Pour effectuer des calculs par logarithmes, il faut savoir résoudre ces deux questions : 1° trouver le logarithme d'un nombre donné; 2° trouver le nombre qui correspond à un logarithme donné.

Trouver le logarithme d'un nombre donné.

225. *Trouver le logarithme d'un nombre entier.* Si le nombre est dans la limite des tables, s'il est plus petit que

* Callet a prolongé ses tables jusqu'à 108000, parce que 108000 est le nombre de secondes contenues dans l'angle de 30 degrés ou le tiers de l'angle droit. L'excellente édition des tables de Callet publiée par M. Dupuis contient les logarithmes de 1 à 100000 avec sept décimales.

100000, on trouve immédiatement dans les tables le logarithme demandé.

Si le nombre surpasse la limite des tables, on l'y ramène, en le divisant par une puissance de 10. On demande, par exemple, le logarithme du nombre 356478. Afin de rendre ce nombre plus petit que 100000, on le divise par 10, ce qui donne le nombre décimal 35647,8. La question revient à chercher le logarithme de ce nombre décimal; car, une fois ce logarithme trouvé, en ajoutant 1 à sa caractéristique, on aura le logarithme demandé.

Les tables donnent le logarithme de la partie entière 35647. La différence entre ce logarithme et celui du nombre suivant 35648 est 122 unités du septième ordre décimal. On admet que les accroissements du logarithme sont sensiblement proportionnels aux accroissements du nombre, quand il s'agit d'accroissements moindres que l'unité. On dira donc : puisque, pour une augmentation d'une unité dans le nombre 35647, il faut ajouter 122 au logarithme, pour une augmentation de 0,8 dans le nombre, il faudra ajouter au logarithme les $\frac{8}{10}$ de 122, soit $\frac{122\times 8}{10}$, ou 98 unités du septième ordre décimal, en négligeant les unités plus petites.

Mais on trouve cette augmentation toute calculée dans les tables de Callet; car, dans la dernière colonne verticale à droite, on voit, au-dessous de la différence 122, un petit tableau indiquant les augmentations du logarithme qui correspondent à 1, 2, 3,....., 9 dixièmes. Ainsi

$$\begin{array}{rl} \log 35647 = & 4,5520230 \\ \text{pour } 0,8 \ldots\ldots & 98 \\ \hline \log 35647,8 = & 4,5520328. \end{array}$$

En ajoutant une unité à la caractéristique, on a

$$\log 356478 = 5,5520328.$$

Nous avons supposé que les accroissements du logarithme sont sensiblement proportionnels aux accroissements du nombre ; cette proportion n'est pas rigoureusement exacte et il en résulte une certaine erreur dans le calcul des logarithmes des nombres décimaux. Mais on démontre que, lorsque le nombre est plus grand que 10000, l'erreur commise n'altère pas les sept premiers chiffres décimaux du logarithme ; on peut donc, dans la pratique, regarder la proportion comme exacte.

Soit encore à calculer le logarithme du nombre 2543247. En divisant par 100, on ramènera le nombre proposé au nombre décimal 25432,47. La table donne le logarithme de la partie entière. La petite table des parties proportionnelles montre qu'à une augmentation 0,4 dans le nombre correspond une augmentation 68 dans le logarithme. Il reste à trouver ce qu'il faut encore ajouter pour 0,07. On voit dans la table qu'à 0,7 correspond une augmentation 120 ; à 0,07 correspondra donc une augmentation dix fois plus petite, soit 12. Il faut donc au logarithme de 25432 ajouter $68 + 12$, c'est-à-dire 80. On a ainsi

$$\log 25432,47 = 4,4053885.$$

En ajoutant 2 unités à la caractéristique, on en déduit

$$\log 2543247 = 6,4053885.$$

226. Il est bon de remarquer que, dans la recherche du logarithme d'un nombre, il n'y a lieu de considérer que les huit premiers chiffres de gauche ; les suivants, n'ayant pas

d'influence sur le logarithme, peuvent être supprimés. En effet, supposons la virgule placée après le cinquième chiffre; si l'on néglige le chiffre des dix-millièmes et les suivants, on commet sur le nombre une erreur moindre qu'un millième; la plus grande différence tabulaire étant 435, on commet sur le logarithme une erreur moindre qu'une demi-unité du septième ordre décimal.

On demande, par exemple, le logarithme du nombre 11056,4852. Après avoir cherché dans les tables le logarithme de 11056, on dira, à l'aide des parties proportionnelles placées au-dessous de la différence 393 : à 0,4 correspond 157, à 0,8 correspond 31, à 0,005 correspond 2; en tout 190 qu'il faut ajouter au logarithme de 11056, ce qui donne

$$\log 11056{,}485 = 4{,}0436170.$$

Quand le premier chiffre est égal ou supérieur à 4, le huitième chiffre n'a pas d'influence sensible sur le résultat. Soit à trouver le logarithme de 46867,284. Après avoir trouvé le logarithme de 46867, on voit qu'à 0,2 correspond une augmentation 18, à 0,08 une augmentation 7; le chiffre des millièmes n'a pas d'influence; il faut donc ajouter $18 + 7$ ou 25 au logarithme de 46867, ce qui donne

$$\log 46867{,}28 = 4{,}6708697.$$

Quand le chiffre des millièmes est plus grand que 5, on force le chiffre des centièmes.

227. *Trouver le logarithme d'un nombre décimal.* On demande le logarithme du nombre décimal 35,6478. On le multipliera par une puissance de 10, de manière qu'il se rapproche le plus possible de la limite des tables. Si l'on

opère avec les tables de Callet, on multipliera par 1000 et on cherchera le logarithme du nombre 35647,8; puis on retranchera trois unités de la caractéristique:

$$\log 35647{,}8 = 4{,}5520328,$$
$$\log 35{,}6478 = 1{,}5520328.$$

228. *Trouver le logarithme d'un nombre fractionnaire.* Il y a deux manières de procéder : ou bien on convertira le nombre fractionnaire en nombre décimal et on appliquera la règle précédente; ou bien, mettant le nombre fractionnaire sous forme de fraction ordinaire, et remarquant qu'une fraction est égale au quotient de son numérateur par son dénominateur, on retranchera du logarithme du numérateur le logarithme du dénominateur.

Caractéristiques négatives.

229. Les deux progressions, par lesquelles nous avons défini les logarithmes, nous donnent, avec une approximation aussi grande qu'on veut, les logarithmes de tous les nombres plus grands que l'unité. Voici comment on définit les logarithmes des nombres plus petits que l'unité.

Imaginons que l'on prolonge les deux progressions vers la gauche, comme on les a prolongées vers la droite; en ce qui concerne la progression géométrique, chaque terme étant égal au terme placé à sa droite divisé par la raison, on prolongera la progression vers la gauche en divisant par la raison; de même, chaque terme de la progression arithmétique étant égal au terme placé à sa droite, moins la raison, on prolongera cette progression en retranchant

la raison. De cette manière, les deux progressions deviennent

$$\ldots\ldots : \frac{1}{q^3} : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 ; q^3 : q^4 : \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots -3r \,.\, -2r \,.\, -r \,.\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, 4r \,.\, \ldots\ldots;$$

les nombres $\frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q^3}, \ldots\ldots$, plus petits que l'unité, auront ainsi des logarithmes négatifs $-r, -2r, -3r, \ldots\ldots$

La propriété fondamentale des logarithmes, savoir que le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs, subsiste, pourvu que l'on entende que le logarithme du produit est égal à la somme *algébrique* des logarithmes des facteurs. En effet, dans la progression géométrique, prenons d'abord deux termes q^m, $\frac{1}{q^n}$, le premier plus grand que l'unité, le second plus petit; si $m>n$, le produit de ces deux nombres sera q^{m-n}; la somme algébrique des termes correspondants mr et $-nr$ de la progression arithmétique est $(m-n)r$; c'est le logarithme du produit. Si $m<n$, le produit est $\frac{1}{q^{n-m}}$; la somme algébrique des logarithmes $-(n-m)r$ est le terme correspondant de la progression arithmétique; c'est le logarithme du produit. Prenons maintenant deux facteurs $\frac{1}{q^m}$ et $\frac{1}{q^n}$ plus petits que l'unité; la somme des logarithmes $-mr-nr$ ou $-(m+n)r$ est encore le logarithme du produit $\frac{1}{q^{m+n}}$. Ainsi, dans tous les cas, le logarithme du produit est égal à la somme algébrique des logarithmes des facteurs.

Le théorème relatif à la multiplication étant ainsi généralisé, les théorèmes relatifs à la division, à l'élévation aux puissances et à l'extraction des racines, qui s'en déduisent, ont le même degré de généralité.

Reprenons maintenant les progressions qui ont servi à définir les logarithmes vulgaires

$$\ldots\ldots : 0{,}001 : 0{,}01 : 0{,}1 : 1 : 10 : 100 : 1000 : \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ -3\ .\ -2\ .\ -1\ .\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots$$

et prolongeons-les vers la gauche, comme nous l'avons dit; on voit que tous les nombres compris entre 1 et 0,1 ont leurs logarithmes compris entre 0 et -1, les nombres compris entre 0,1 et 0,01 ont leurs logarithmes compris entre -1 et -2, les nombres compris entre 0,01 et 0,001 ont leurs logarithmes compris entre -2 et -3, et ainsi de suite.

230. Mais, dans la pratique, on ne se sert pas de ces logarithmes entièrement négatifs; on laisse positive la partie décimale et on rend négative seulement la partie entière ou la caractéristique. On demande, par exemple, le logarithme du nombre 0,035261. On trouvera dans la table le logarithme du nombre entier 35261, qui est

$$4{,}5472946.$$

Le logarithme du nombre décimal 3,5261, qui n'a qu'un chiffre à sa partie entière, est

$$0{,}5472946.$$

Pour passer de ce dernier nombre à la fraction décimale proposée, il faut diviser par 10^2 et par conséquent retrancher 2 unités du logarithme; le logarithme du nombre décimal 0,035261 est donc

$$0{,}5472946 - 2,$$

ce qu'on écrit plus simplement

$$\bar{2},5472946,$$

la partie décimale restant positive, la caractéristique seule $\bar{2}$ étant négative.

On peut remarquer que *la caractéristique négative du logarithme d'une fraction décimale est égale au rang du premier chiffre significatif après la virgule*. En général, soit n le rang du premier chiffre significatif après la virgule; si l'on multiplie par 10^n, le nombre aura un chiffre significatif à sa partie entière, et la caractéristique de son logarithme sera zéro; comme il faut diviser par 10^n pour revenir au nombre proposé, il faudra retrancher n unités du logarithme, ce qui donnera la caractéristique négative $\bar{n}$.

Il y a un grand avantage à laisser ainsi positive la partie décimale du logarithme d'un nombre moindre que l'unité; quand on a à calculer le produit de plusieurs facteurs, les uns plus grands que l'unité, les autres plus petits, on additionnera les parties décimales de tous les logarithmes et on retranchera seulement les caractéristiques négatives, ce qui est très-simple. Et d'ailleurs, c'est sous cette forme que l'on obtient, au moyen des tables, les logarithmes des nombres plus petits que l'unité.

Nous avons écrit le logarithme du nombre 0,035261 sous la forme

$$\bar{2},5472946,$$

laissant positive la partie décimale; en effectuant la soustraction, on a le logarithme négatif

$$-1,4527054.$$

Si l'on employait les logarithmes entièrement néga-

tifs, il faudrait additionner les uns, retrancher les autres, ce qui serait beaucoup plus compliqué.

Trouver le nombre qui admet un logarithme donné.

231. Trouver le nombre qui a pour logarithme 4,5520332 avec les tables de Callet. On regarde dans les tables quel est le plus grand logarithme contenu dans le logarithme donné; c'est 4,5520230 qui correspond au nombre 35647; le nombre cherché est donc compris entre 35647 et 35648. Le logarithme donné surpasse le logarithme de 35647 de 102 unités du septième ordre : or la différence tabulaire est 122, c'est-à-dire que si l'on augmentait le logarithme de 35647 de 122 unités du dernier ordre, il faudrait augmenter d'une unité le nombre 35647; si l'on suppose les accroissements du nombre proportionnels à ceux du logarithme, à une augmentation 102 dans le logarithme correspondra dans le nombre une augmentation égale à $\frac{102}{122} = 0,83$.

Mais il est plus commode de se servir de la petite table des parties proportionnelles : cette table montre qu'à une augmentation 98 dans le logarithme correspond une augmentation 0,8 dans le nombre. Il reste 4; à l'augmentation 40 dans le logarithme correspond une augmentation 0,3 dans le nombre; à l'augmentation dix fois plus petite 4 correspondra donc une augmentation 0,03. Ainsi à l'augmentation 102 dans le logarithme correspond une augmentation 0,83 dans le nombre. Le nombre cherché est donc 35647,83 à un centième près.

232. On ramène toujours la caractéristique du loga-

rithme donné à être égale à 4, sauf à multiplier ou à diviser ensuite le nombre trouvé par une puissance de 10.

Exemples : 1° Trouver le nombre qui a pour logarithme 5,552033 2. Je retranche 1 de la caractéristique pour ramener le logarithme dans les limites des tables, et je cherche le nombre qui a pour logarithme 4,5520332; c'est 35647,83. Pour revenir au logarithme donné, il faut ajouter 1 à la caractéristique, et par conséquent multiplier par 10 : le nombre cherché est donc 356478,3 à un dixième près.

2° Trouver le nombre qui a pour logarithme 1,5520332. On ajoutera 3 unités à la caractéristique, et l'on cherchera le nombre qui a pour logarithme 4,5520332; c'est 35647,83. Pour revenir au logarithme proposé, il faut retrancher 3 de la caractéristique, et par conséquent diviser par 1000; le nombre cherché est donc 35,64783 avec cinq décimales exactes.

On voit qu'il y a un grand avantage à augmenter la caractéristique de manière à opérer dans la partie la plus élevée des tables; si l'on avait conservé la caractéristique 1, on aurait trouvé le nombre 35,65 avec deux décimales seulement, tandis qu'en opérant comme on l'a fait on a obtenu cinq décimales.

3° Trouver le nombre qui a pour logarithme $\bar{2}$,5522332. Je cherche le nombre qui a pour logarithme 0,5520332; c'est 3,564783. La caractéristique négative $\bar{2}$ indique qu'il faut diviser ce nombre par 100; le nombre demandé est donc 0,03564783.

233. Il importe de se rendre compte du degré d'approximation avec lequel on obtient les nombres à l'aide de leurs logarithmes. Soit $\log x = a$, le logarithme donné a ayant

une caractéristique égale à 4; appelons x_1 le nombre que l'on trouve en opérant comme nous l'avons expliqué, et Δ la différence tabulaire dont on s'est servi. Pour produire une variation d'une unité du septième ordre décimal dans le logarithme, il faut faire varier le nombre d'une quantité $\alpha = \frac{1}{\Delta}$; par conséquent, le mode de calcul adopté donnera pour les logarithmes de $x_1 + \alpha$ et de $x_1 - \alpha$ les valeurs approchées

$$a + \frac{1}{10^7} \quad , \quad a - \frac{1}{10^7};$$

mais on sait que l'erreur causée par la proportion est moindre que $\frac{1}{10^7}$; on a donc

$$\log(x_1 + \alpha) > a \quad , \quad \log(x_1 - \alpha) < a;$$

ainsi le nombre x, qui a pour logarithme a, est compris entre $x_1 - \alpha$ et $x_1 + \alpha$; en prenant la valeur approchée x_1, on commet une erreur moindre que α, c'est-à-dire moindre que $\frac{1}{\Delta}$. Dans le voisinage de 10000, la différence tabulaire est plus grande que 400; l'erreur commise sur le nombre est moindre que $\frac{1}{400}$; le nombre lui-même étant plus grand que 10000, l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{4000000}$. A mesure qu'on s'élève dans la table, la différence tabulaire diminue, et par conséquent l'erreur absolue augmente; mais l'erreur relative reste à peu près la même. Par exemple, vers 43500 la différence tabulaire est 100 et l'erreur absolue moindre que $\frac{1}{100}$; mais l'erreur relative est encore moindre que $\frac{1}{4000000}$.

Vers 90000, la différence tabulaire est 44 et l'erreur absolue moindre que $\frac{1}{44}$; l'erreur relative est toujours moindre que $\frac{1}{4000000}$.

Ainsi les tables de Callet donnent les nombres avec une erreur relative inférieure à un quart de millionième.

Remarques sur l'emploi des logarithmes.

234. MULTIPLICATION. Lorsque les facteurs sont plus grands que l'unité, on ajoute leurs logarithmes; il n'y a là aucune difficulté.

Si des facteurs sont plus petits que l'unité, leurs logarithmes ont des caractéristiques négatives qui indiquent la division par des puissances de 10; on aura soin de retrancher ces caractéristiques négatives.

1° Calculer le produit

$$x = 875,6348 \times 62,82407.$$

On cherchera les logarithmes des deux facteurs et on les ajoutera, ce qui donne le logarithme du produit; puis on cherchera dans les tables le nombre correspondant :

$$\begin{aligned} \log 875,6348 &= 2,9423230 \\ \log 62,82407 &= \underline{1,7981261} \\ \log x &= 4,7404491 \\ x &= 55010,95. \end{aligned}$$

2° Calculer le produit

$$\begin{aligned} x &= 87,56348 \times 0,06282407 \\ \log 87,56348 &= 1,9423230 \\ \log 0,06282407 &= \underline{\bar{2},7981261} \\ \log x &= 0,7404491 \\ x &= 5,501095. \end{aligned}$$

En ajoutant les logarithmes, on trouve 2 pour partie entière ; mais, comme il faut retrancher 2, il reste 0.

3° Calculer le produit

$$x = 87,56348 \times 0,00628240,$$

$$\log 87,56348 = 1,9423230$$

$$\log 0,006282407 = \bar{3},7981261$$

$$\log x = \bar{1},7404491$$

$$x = 0,5501095.$$

L'addition des logarithmes donne 2 pour partie entière; mais comme il faut retrancher 3, on obtient la caractéristique négative $\bar{1}$.

4° Calculer le produit

$$x = 0,08756348 \times 0,006282407$$

$$\log 0,08756348 = \bar{2},9423230$$

$$\log 0,006282407 = \bar{3},7981261$$

$$\log x = \bar{4},7404491$$

$$x = 0,0005501095.$$

L'addition des logarithmes donne 1 pour partie entière ; comme il faut retrancher 2 et 3, c'est-à-dire 5, on a la caractéristique négative $\bar{4}$.

235. DIVISION. On sait que, pour effectuer une division, il faut du logarithme du dividende retrancher le logarithme du diviseur. Lorsqu'on n'a qu'une simple division à faire, on peut procéder de cette manière ; mais quand on a une série de multiplications et de divisions à effectuer, il est plus commode de n'avoir que des logarithmes à ajouter. Pour cela on transforme les logarithmes à retrancher, de manière que leurs parties décimales deviennent positives.

Soit, par exemple, à calculer

$$x = \frac{236,39 \times 127,46}{564,87}.$$

Il faut retrancher le logarithme du nombre 564,87, qui est 2,7519485. On écrira

$$\begin{aligned} -2,7519485 &= -2 - 0,7519485 = -3 + (1 - 0,7519485) \\ &= -3 + 0,2480515 = \bar{3},2480515. \end{aligned}$$

On aura donc

$$\begin{aligned} \log 236,39 &= 2,3736291 \\ \log 127,46 &= 2,1053739 \\ -\log 564,87 &= \underline{\bar{3},2480515} \\ \log x &= 1,7270515 \\ x &= 53,34018. \end{aligned}$$

Quand on a ainsi rendu positive la partie décimale de $-\log 564,87$, on additionne les parties décimales des trois logarithmes ; la soustraction ne porte plus que sur la caractéristique, ce qui est une grande simplification.

Soit encore à calculer

$$x = \frac{0,23639 \times 1,2746}{0,0056487}.$$

Il faut diviser par le nombre 0,0056487, qui a pour logarithme $\bar{3},7519485$. On écrira

$$\begin{aligned} -\bar{3},7519485 &= +3 - 0,7519485 = 2 + (1 - 0,7519485) \\ &= 2,\ 2480515. \end{aligned}$$

On aura donc

$$\begin{aligned} \log 0,23639 &= \bar{1},3736291 \\ \log 1,2746 &= 0,1053739 \\ -\log 0,0056487 &= \underline{2,2480515} \\ \log x &= 1,7270545 \\ x &= 53,34018. \end{aligned}$$

Remarquons cette manière de procéder : *Pour retrancher un logarithme, on ajoute une unité à la caractéristique, dont on change ensuite le signe, et l'on écrit à la suite le complément arithmétique de la partie décimale.*

Ainsi, dans le premier exemple, au lieu de retrancher 2,7519485, on a ajouté $\bar{3}$,2480515. La caractéristique 2, augmentée d'une unité, puis changée de signe, donne $\bar{3}$; en prenant l'excès de l'unité sur la partie décimale 7519485, on obtient le complément 2480515.

Dans le second exemple, au lieu de retrancher $\bar{3}$,7519485, on a ajouté 2,2480515. La caractéristique $\bar{3}$, augmentée d'une unité, puis changée de signe, donne 2.

Quant à l'excès de l'unité sur la partie décimale du logarithme, ce qu'on appelle le complément arithmétique, on l'obtient aisément. De 1 il faut retrancher 0,7519485. Or une unité vaut 9 dixièmes et 10 centièmes; 10 centièmes valent 9 centièmes et 10 millièmes, etc. L'unité égale donc 0,999999 plus 10 unités du septième ordre. En effectuant la soustraction de gauche à droite, on obtient le complément demandé :

$$\begin{array}{r} 0{,}999999^{10} \\ 0{,}7519485 \\ \hline 0{,}2480515 \end{array}$$

Ainsi, *pour avoir le complément de la partie décimale d'un logarithme, on retranche tous les chiffres de* 9, *en allant de gauche à droite, excepté le dernier que l'on retranche de* 10.

Avec un peu d'habitude, on lit immédiatement le complément dans la table, en regardant le logarithme.

236. Puissances. On sait qu'on élève un nombre à une puissance en multipliant son logarithme par l'indice de la puissance.

1° Calculer $x=5^{10}$. On cherchera d'abord le logarithme de 5, puis on multipliera ce logarithme par 10 :

$$\log 5 = 0,69897000$$
$$\log x = 6,9897000$$
$$x = 9765625.$$

2° Calculer $x = 0,4326^3$.

$$\log 0,4326 = \bar{1},6360865$$
$$\log x = \bar{2},9082595$$
$$x = 0,08095794.$$

En multipliant par 3 la partie décimale 0,6360865 du logarithme, on trouve 1,9082595; en multipliant par 3 la caractéristique négative -1, on a -3; il faut donc retrancher 3 de la partie entière du logarithme, ce qui donne $\bar{2},9082595$.

3° Calculer $x = \left(\frac{2}{37}\right)^5$.

$$\log 2 = 0,30103000$$
$$-\log 37 = \bar{2},43179828$$
$$\log \tfrac{2}{37} = \bar{2},73282828$$
$$\log x = \bar{7},6641414$$
$$x = 0,00000046114678.$$

En multipliant par 5 la partie décimale du logarithme, on trouve 3 pour partie entière ; la caractéristique négative -2, multipliée par 5, donne -10; en retranchant 10 de la partie entière, on obtient la caractéristique négative $\bar{7}$.

237. Racines. On extrait la racine d'un nombre en divisant son logarithme par l'indice de la racine.

1° Calculer $x = \sqrt[3]{478928}$.

$$\log 478928 = 5,6802702$$
$$\log x = 1,8934234$$
$$x = 78,23902.$$

2° Calculer $x = \sqrt[3]{0,054327}$.

$$\log 0,054327 = \bar{2},7350157$$
$$\log x = \bar{1},5783386$$
$$x = 0,3787377.$$

Afin de rendre la caractéristique négative divisible par 3, je retranche et j'ajoute une unité, et je suppose le logarithme écrit sous la forme

$$-3 + 1,7350157.$$

En divisant par 3 la partie négative et la partie positive, on a

$$-1 + 0,5783386 = \bar{1},5783386.$$

3° Calculer $x = \sqrt[5]{0,0000098763}$.

$$\log 0,0000098763 = \bar{6},9945943$$
$$\log x = \bar{2},9989189$$
$$x = 0,09975137.$$

Je suppose le logarithme écrit sous la forme

$$-10 + 4,9945943,$$

afin de rendre la partie négative divisible par 5. En divisant par 5 les deux parties, on a

$$-2 + 0,9989189 = \bar{2},9989189.$$

238. *Remarques sur les accroissements des logarithmes.* En examinant dans les tables la colonne des différences, on voit ces différences aller sans cesse en diminuant. Par

exemple, les logarithmes des nombres 486 et 487 diffèrent entre eux de 8927 unités du septième ordre, tandis que ceux des nombres 48624 et 48625 ne diffèrent plus que de 89 unités du même ordre. Il est facile d'expliquer la cause de cette diminution. Soient a et $a+1$ deux nombres entiers consécutifs, la différence de leurs logarithmes est

$$\log(a+1) - \log a = \log\frac{a+1}{a} = \log\left(1+\frac{1}{a}\right);$$

or, à mesure que a augmente, $1+\frac{1}{a}$ diminue et tend vers l'unité : la différence tabulaire diminue donc et tend vers zéro. Si l'on prolongeait les tables indéfiniment, cette différence deviendrait infiniment petite.

Je donne au nombre a un accroissement constant quelconque h, l'accroissement du logarithme

$$\log(a+h) - \log a = \log\left(\frac{a+h}{a}\right) = \log\left(1+\frac{h}{a}\right)$$

sera d'autant plus petit que a sera plus grand. Ainsi, pour un même accroissement *absolu* donné au nombre, l'accroissement du logarithme diminue à mesure que le nombre augmente. Mais si l'on donnait au nombre un même accroissement *relatif* (j'entends par accroissement relatif le rapport de l'accroissement absolu au nombre lui-même ; un nombre, par exemple, éprouve un accroissement relatif de $\frac{1}{1000}$, si on l'augmente de la $\frac{1}{1000}$ partie de sa valeur), l'accroissement du logarithme serait constant. En désignant par k l'accroissement relatif, $k=\frac{h}{a}$, l'accroissement du logarithme devient $\log(1+k)$; c'est une quantité constante, si l'accroissement relatif reste le même.

239. Dans la recherche des logarithmes des nombres, on a supposé les accroissements du logarithme proportionnels à ceux du nombre; cette proportion n'est pas exacte. En effet, si l'on donne au nombre a l'accroissement h, le logarithme subit un certain accroissement; si l'on donne au nombre $a+h$ le même accroissement h, le logarithme subit un nouvel accroissement plus petit que le premier; ainsi, quand l'accroissement du nombre devient double, l'accroissement du logarithme est un peu moindre que le double; et réciproquement, quand l'accroissement du nombre devient moitié, l'accroissement du logarithme est un peu plus grand que la moitié. L'emploi de la proportion donne donc, dans le passage des nombres aux logarithmes, des résultats un peu trop faibles, et, dans le passage des logarithmes aux nombres, des résultats un peu trop forts.

Mais, si l'on a soin d'employer toujours la partie la plus élevée des tables, l'erreur commise sur les logarithmes n'affectera pas les unités du septième ordre décimal; et en effet, dans les tables de Callet, on voit que la même différence tabulaire existe entre plusieurs couples de logarithmes consécutifs. Par exemple, du nombre 68595 au nombre 69744 la différence tabulaire est la même. Dans cet intervalle, pour une unité d'augmentation dans le nombre, le logarithme subit un accroissement constant 63; pour deux, trois... unités d'augmentation dans le nombre, le logarithme subit donc un accroissement deux, trois... fois plus grand, et par conséquent les accroissements du nombre sont proportionnels à ceux du logarithme, du moins au degré d'approximation des tables.

CHAPITRE IV

DES INTÉRÊTS COMPOSÉS.

240. Ordinairement les intérêts d'un capital prêté se payent chaque année et constituent une rente; mais il arrive quelquefois qu'on laisse les intérêts s'ajouter au capital, de manière que le capital s'accroisse d'année en année : c'est là ce qu'on appelle *capitaliser* les intérêts, ou placer à *intérêts composés.*

On a appelé *taux* de l'intérêt ce que rapportent 100 francs dans un an; mais, dans le calcul des intérêts composés, il est plus commode de prendre pour taux l'intérêt de *un* franc en un an, intérêt que, pour abréger, nous désignerons par la lettre r. Ainsi, placer à 5 pour 100, c'est la même chose que placer à 0,05 pour 1; dans ce cas $r=0{,}05$; placer à 4,50 pour 100, c'est la même chose que placer à 0,045 pour 1; dans ce cas, $r=0{,}045$.

241. Le capital *un* franc, augmenté de son intérêt, vaut, après une année, $1+r$; un capital 2460 francs vaudra 2460 fois plus, c'est-à-dire $(1+r)\times 2460$ ou $2460(1+r)$. En général, si l'on représente par a un capital quelconque, sa valeur au bout d'un an, par l'addition des intérêts, sera $a(1+r)$. Ainsi *on obtient la valeur d'un capital après une année en multipliant ce capital par l'unité augmentée de l'intérêt de un franc.*

Par exemple, le capital 2460 francs placé à 5 pour 100 vaut au bout d'un an $2460 \times 1,05 = 2583$.

Je suppose maintenant que le capital a soit placé pendant n années. Après une année, ce capital devient $a(1+r)$; tel est le capital dû à la fin de la première année et qui produit intérêt pendant la seconde année. Pour savoir ce que devient ce capital $a(1+r)$ par l'addition des intérêts de la seconde année, il faut le multiplier par $1+r$, ce qui fait $a(1+r)(1+r)$ ou $a(1+r)^2$; tel est le capital dû à la fin de la seconde année, et qui produit intérêt pendant la troisième année. Pour savoir ce que devient ce capital $a(1+r)^2$, par l'addition des intérêts de la troisième année, il faut le multiplier par $1+r$, ce qui fait $a(1+r)^2(1+r)$ ou $a(1+r)^3$; tel est le capital dû à la fin de la troisième année, et qui produit intérêt pendant la quatrième année. Le même raisonnement peut être continué indéfiniment, et, comme chaque année nouvelle introduit un nouveau facteur $1+r$, la valeur du capital, après n années, sera $a(1+r)^n$. Ainsi *on obtient la valeur d'un capital, placé à intérêts composés, après un certain nombre d'années, en multipliant ce capital par la valeur d'un franc après un an, élevée à une puissance marquée par le nombre des années.*

Si donc l'on désigne par A la valeur du capital après n années, on a la formule générale

$$A = a(1+r)^n. \tag{1}$$

Cette formule établit une relation entre les quatre quantités représentées par a, A, n, r, relation qui détermine l'une quelconque d'entre elles, quand on connaît les trois autres. On peut donc, à l'aide de cette relation, résoudre les quatre questions suivantes.

242. Problème I. *Quelle est la valeur d'un capital placé, à intérêts composés, et au taux r, après n années?*

C'est la question traitée précédemment : on calculera A par logarithmes.

Exemple. Trouver la valeur du capital 12540 francs placé à intérêts composés, à 5 pour 100, après 7 ans.

Je suppose dans tout ce qui suit que l'on opère avec les tables de Callet.

$$
\begin{aligned}
\log 12540 \ldots\ldots\ldots &= 4{,}0982975 \\
\log 1{,}05 = 0{,}0211893 & \\
7 \log 1{,}05 \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0{,}1483251 \\
\hline
\log A &= 4{,}2466226 \\
A &= 17645{,}04.
\end{aligned}
$$

243. Problème II. *Quel est le capital qui, placé à intérêts composés, au taux r, acquiert après n années la valeur A?*

La formule précédente donne

$$
(2) \qquad a = \frac{A}{(1+r)^n}.
$$

Exemple. Quel est le capital qui, placé à intérêts composés à 4,75 pour 100, vaut 24600 francs, après 12 années?

$$
\begin{aligned}
\log 24600 \ldots\ldots\ldots &= 4{,}3909351 \\
\log 1{,}0475 = 0{,}0201540 & \\
12 \log 1{,}0475 \ldots\ldots\ldots &= 0{,}2418480 \\
\hline
\log a \ldots\ldots &= 4{,}1490871 \\
a &= 14095{,}70.
\end{aligned}
$$

244. Problème III. *A quel taux faut-il placer un capital a, à intérêts composés, pour qu'après n années il acquière la valeur A?*

L'inconnue ici est r; de la formule fondamentale on déduit

$$(3) \qquad 1+r=\sqrt[n]{\frac{A}{a}}.$$

On calculera de cette manière la quantité $1+r$; retranchant 1 du résultat, on aura r.

Exemple. A quel taux faut-il placer le capital 14095,70, pour qu'après 12 années il vaille 24600 francs?

$$\begin{aligned}
\log 24600 \ldots\ldots\ldots &= 4,3909351\\
\log 14095,70 \ldots\ldots\ldots &= \underline{4,1490867}\\
\log A - \log a &= 0,2418484\\
\log(1+r) &= 0,0201540\\
1+r &= 1,0475,\\
r &= 0,0475.
\end{aligned}$$

Il faut placer le capital à 4,75 pour 100.

245. Problème IV. *Pendant combien d'années faut-il placer un capital a, au taux r, à intérêts composés, pour qu'il acquière la valeur A?*

L'inconnue est n; de la formule fondamentale on déduit

$$(4) \qquad (1+r)^n=\frac{A}{a},$$

et, en prenant les logarithmes,

$$n\log(1+r)=\log A-\log a;$$

d'où

$$n=\frac{\log A-\log a}{\log(1+r)}.$$

246. Remarque. La formule des intérêts composés a été établie dans l'hypothèse où le capital reste placé pendant un nombre entier d'années. Lorsque le capital reste placé pendant un certain nombre d'années, plus une fraction

d'année, on cherche d'abord sa valeur après le nombre entier d'années par la formule des intérêts composés. puis on calcule les intérêts simples de ce nouveau capital pendant la fraction d'années.

Mais il sera plus simple d'appliquer la formule ordinaire

$$A = a(1+r)^n,$$

dans laquelle on donnera à n des valeurs fractionnaires; la différence des résultats est négligeable.

Exemple I. Quelle est la valeur du capital 12540 francs, placé à intérêts composés à 5 pour 100, après 7 ans 8 mois?

Après 7 ans, le capital devient 17645,04; ce nouveau capital rapporte 588,17 en 8 mois : donc, après 7 ans 8 mois, le capital devient 18233,20.

En donnant à n la valeur fractionnaire $7+\frac{8}{12}$, on trouve 18228,40; la différence est 4,80; c'est une quantité relativement très-petite; elle est plus petite que le $\frac{1}{3000}$ de la grandeur cherchée.

Exemple II. Pendant combien d'années faut-il placer un capital à intérêts composés à 5 pour 100, pour qu'il acquière une valeur double?

Comme la grandeur du capital n'a aucune influence dans la question, je suppose qu'il s'agisse du capital 1000 francs.

$$n = \frac{\log 2}{\log 1,05};$$

$\log 2 = 0,3010300$	$\log 0,30103 = \bar{1},4786098$
$\log 1,05 = 0,0211893$	$\log 0,0211893 = \bar{2},3261167$
	$\log n = 1,1524931$

$$n = 14,207.$$

Après 14 années, le capital n'est pas encore doublé; après

15 années, il est plus que doublé. Après 14 années, le capital 1000 francs devient 1979,93; si l'on cherche dans combien de jours le capital 1979,93 produira ce qui manque pour que le capital primitif soit doublé, c'est-à-dire 20,07, on trouve 74 jours. Ainsi, à 5 pour 100, le capital est doublé en 14 ans 74 jours.

Si l'on prend la valeur fractionnaire $n = 14,207$ donnée par le calcul, on trouve 14 ans 75 jours. La différence n'est que d'un jour.

Exemple III. A quel taux faut-il placer un capital de 12000 francs à intérêts composés, pour qu'il acquière une valeur de 18000 francs après 9 ans 5 mois?

Dans la formule des intérêts composés, on donnera à n la valeur fractionnaire $9 + \frac{5}{12}$. Il serait très-difficile de résoudre autrement la question.

247. Problème V. *On a deux billets, l'un d'une somme a payable dans 1 an; l'autre d'une somme b payable dans 5 ans; on veut les convertir en un seul payable dans 3 ans.*

Cherchons la valeur de chacun des deux billets dans 3 ans, à l'échéance du troisième billet. A cette époque, 2 ans après son échéance, le premier billet vaudra

$$a(1 + r)^2;$$

à cette même époque, 2 ans avant son échéance, le second billet vaut

$$\frac{b}{(1 + r)^2}.$$

Si l'on appelle x la somme qui doit être inscrite sur le troisième billet, c'est-à-dire la somme à toucher dans 3 ans,

on aura

$$x = a(1+r)^2 + \frac{b}{(1+r)^2}.$$

248. Problème VI. *La population d'un État est de 40 millions d'habitants, elle s'accroît chaque année de $\frac{1}{300}$ de sa valeur ; on demande quelle sera la population de cet État dans un siècle.*

J'appelle P la population après un certain nombre d'années ; l'année suivante, elle sera

$$P + \frac{P}{300} = P \times \left(1 + \frac{1}{300}\right) = P \times \frac{301}{300}.$$

Ainsi la population croît année par année comme les termes d'une progression géométrique dont le premier terme est 40 millions et la raison $\frac{301}{300}$. On demande le 101ᵉ terme de la progression : en désignant par x ce terme, on a (n° 206)

$$x = 40000000 \times \left(\frac{301}{300}\right)^{100}.$$

$$x = 55793000.$$

249. Problème VII. *Les populations de deux États sont, l'une de 20 millions d'habitants, l'autre de 30 millions : la première s'accroît chaque année de $\frac{1}{200}$, la seconde de $\frac{1}{300}$ de sa valeur. Dans combien de temps les deux populations seront-elles égales?*

J'appelle n le nombre d'années cherché ; après ce nombre d'années, les deux populations étant égales, on aura

$$20000000 \times \left(\frac{201}{200}\right)^n = 30000000 \times \left(\frac{301}{300}\right)^n;$$

d'où

$$2 \times \left(\frac{201}{200}\right)^n = 3 \times \left(\frac{301}{300}\right)^n,$$

$$\left(\frac{201 \times 300}{200 \times 301}\right)^n = \frac{3}{2},$$

$$= \left(\frac{603}{602}\right)^n \frac{3}{2};$$

si l'on prend les logarithmes, il vient

$$n(\log 603 - \log 602) = \log 3 - \log 2,$$

$$n = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 603 - \log 602}\ n = 244.$$

QUESTIONS D'ANNUITÉS.

250. Problème VIII. *Une personne place chaque année une somme a pendant n années, et laisse les capitaux et les intérêts s'accumuler. On demande quelle sera la valeur totale de tous ces placements après ces n années?*

Le premier versement, étant placé pendant n années, acquiert une valeur égale à $a(1+r)^n$; le second, étant placé pendant $n-1$ années, acquiert une valeur égale à $a(1+r)^{n-1}$, etc.; enfin le dernier, ne restant placé que pendant un an, vaut $a(1+r)$. La valeur totale après les n années est donc

$$a(1+r) + a(1+r)^2 \ldots\ldots + a(1+r)^n;$$

c'est la somme des termes d'une progression géométrique dont la raison est $1+r$: on a ainsi, en désignant par A la somme cherchée (n° 213),

$$(5)\quad A = \frac{a(1+r)^{n+1} - a(1+r)}{r} = \frac{a(1+r)\,[(1+r)^n - 1]}{r}.$$

Il est impossible de soumettre directement cette formule au calcul logarithmique; on est obligé de faire deux calculs séparés. On calculera d'abord la quantité $(1+r)^n$, puis A.

EXEMPLE. On place chaque année 1000 francs pendant 20 ans à 5 pour 100.

$$A = 1000\frac{1,05(1,05^{20}-1)}{0,05} = 21000 \times (1,05^{20}-1).$$

Calcul de $1,05^{20}$	Calcul de A
$\log 1,05 = 0,0211893$	$\log 21000 = 4,3222193$
$20 \log 1,05 = 0,4237860$	$\log 1,6533 = 0,2183517$
$1,05^{20} = 2,6533$	$\log A = 4,5405710$
	$A = 34719^{f},30$

251. PROBLÈME IX. *Une personne emprunte actuellement une somme A, et voudrait se libérer en n années par n payements égaux effectués à la fin de chaque année. On demande quel doit être le montant de chacun des payements?*

Je désigne par x le montant de chaque payement et je suppose qu'on règle les comptes à la fin de la n^e année; la somme due est alors $A(1+r)^n$. Le premier versement, ayant été fait $n-1$ années auparavant, vaut, au moment du règlement, $x(1+r)^{n-1}$, le second versement, ayant été fait $n-2$ années auparavant, vaut $x(1+r)^{n-2}$, et ainsi de suite; l'avant-dernier versement, ayant été fait, il y a un an, vaut $x(1+r)$; enfin le dernier, étant fait au moment même, vaut x. La valeur totale des n payements annuels est donc, au moment du règlement de compte,

$$x + x(1+r) + x(1+r)^2 \ldots\ldots + x(1+r)^{n-1},$$

ou, en faisant la somme,

$$x \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

La somme qui reste due à la fin de la n^e année est donc

$$A(1+r)^n - x \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Si la dette est acquittée, on a l'équation

$$A(1+r)^n - x \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0;$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

Cette formule présente le même inconvénient que la précédente ; il est impossible de la soumettre directement au calcul logarithmique. On calculera d'abord $(1+r)^n$, puis x.

252. PROBLÈME X. Les compagnies de chemins de fer, pour construire les lignes nouvelles de leurs réseaux, émettent des obligations de 500 francs, portant intérêt à 3 pour 100, c'est-à-dire de 15 francs par an, et remboursables au pair, c'est-à-dire à 500 francs, par voie de tirage au sort pendant toute la durée de la concession. La durée des concessions faites par l'État est de 99 ans. Supposons qu'il reste encore à courir 75 ans, et proposons-nous de calculer la somme annuelle que doit servir la compagnie pour l'intérêt et l'amortissement d'un million d'obligations. C'est comme si la compagnie empruntait une somme 500×10^6 à 3 pour 100; il suffira de faire dans la formule

précédente $A = 500 \times 10^6$, $r = 0{,}03$, $n = 75$; on trouve ainsi $x = 1683400$0, ce qui fait par obligation 16,834.

La compagnie vend ses obligations à un prix plus ou moins élevé, suivant l'abondance des capitaux disponibles. Aujourd'hui le cours est d'environ 390 francs par obligation. La compagnie paye donc annuellement 16,834, pour intérêt et amortissement d'une somme de 390 francs reçue par elle, ce qui fait 4,316 pour 100 francs.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.

LIVRE PREMIER.

CALCUL ALGÉBRIQUE.

LIVRE II.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

LIVRE III.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

LIVRE IV.

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Sceaux. — Imp. Charaire et fils.

LEÇONS
D'ALGÈBRE





Les questions marquées d'un astérisque ne figurent pas dans les programmes officiels.

Sceaux. — Typ. et stér. M. et P.-E. Charaire.

LEÇONS D'ALGÈBRE

CONFORMES

AUX PROGRAMMES OFFICIELS DE L'ENSEIGNEMENT DES LYCÉES

Par CH. BRIOT

Professeur à la Faculté des sciences,
Maître de conférences à l'École normale supérieure.

DEUXIÈME PARTIE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ONZIÈME ÉDITION,



PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT 15

1883

LEÇONS D'ALGÈBRE

DEUXIÈME PARTIE

LIVRE PREMIER

COMPLÉMENT DE CALCUL ALGÉBRIQUE

CHAPITRE PREMIER.

DES NOMBRES INCOMMENSURABLES.

Définition.

1. Lorsqu'on veut mesurer une grandeur, on cherche une commune mesure entre cette grandeur et l'unité. Si, par exemple, la commune mesure est contenue 7 fois dans l'unité et 4 fois dans la grandeur que l'on veut mesurer, cette grandeur, étant égale à 4 fois la septième partie de l'unité, sera représentée par la fraction $\frac{4}{7}$.

Mais il peut arriver que la grandeur et l'unité n'admettent pas de commune mesure, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de

grandeur, si petite qu'elle soit, contenue exactement dans la grandeur et l'unité. Dans ce cas, on dit que la grandeur est *incommensurable*, et, comme il est impossible de la mesurer exactement, on se borne à une évaluation approximative. Imaginons l'unité partagée en un grand nombre de parties égales, par exemple en mille parties égales, et cherchons combien la grandeur à mesurer contient de ces parties; elle en contient, je suppose, 728, plus un reste plus petit que l'une des parties; la grandeur à mesurer étant plus grande que $\frac{728}{1000}$, mais plus petite que $\frac{729}{1000}$, sera représentée par l'une ou l'autre de ces deux fractions, avec une erreur moindre que 1 millième.

Si l'on avait partagé l'unité en un million de parties égales, on aurait obtenu la mesure de la grandeur avec une erreur moindre que 1 millionième.

Le nombre fractionnaire qui mesure une grandeur incommensurable, avec une approximation aussi grande qu'on veut, s'appelle un *nombre incommensurable*.

2. Les racines des quantités qui ne sont pas puissances parfaites donnent aussi naissance à des nombres incommensurables. Appelons A un nombre entier non puissance n^e parfaite (c'est-à-dire un nombre entier qui n'est pas la puissance n^e d'un nombre entier), et, plus généralement, une fraction ordinaire irréductible dont les deux termes ne sont pas des puissances n^{es} parfaites; je dis qu'il n'existe pas de nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ qui, élevé à n^e puissance, reproduise exactement A. En effet, la n^e puissance de la fraction $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^n}{b^n}$; comme on peut supposer la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible, c'est-à-dire les

deux nombres a et b premiers entre eux, les deux nombres a^n et b^n sont aussi premiers entre eux et la fraction $\frac{a^n}{b^n}$ irréductible. On voit d'abord que cette fraction irréductible ne peut être égale à un nombre entier A. Elle ne peut non plus être égale à une fraction irréductible dont les termes ne sont pas des puissances parfaites; car deux fractions irréductibles ne sont égales que si elles ont leurs deux termes égaux respectivement.

Mais on peut trouver des nombres fractionnaires $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b}$, qui ne diffèrent entre eux que d'une quantité aussi petite qu'on veut $\frac{1}{b}$ (b étant très-grand), et dont les n^{es} puissances comprennent A. Écrivons, en effet, la quantité proposée A sous la forme

$$\frac{A \times b^n}{b^n},$$

et désignons par a le plus grand nombre entier dont la n^e puissance soit contenue dans $A \times b^n$; la quantité $A \times b^n$ étant comprise entre a^n et $(a+1)^n$, la quantité $\frac{A \times b^n}{b^n}$ ou A sera évidemment comprise entre

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a+1}{b}\right)^n.$$

Chacun des nombres fractionnaires $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b}$, dont la différence est aussi petite qu'on veut, et dont les puissances comprennent la quantité proposée A, est ce que l'on appelle la racine approchée de A; on la désigne par le symbole $\sqrt[n]{A}$.

Il est aisé de voir que ce nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ ou $\frac{a+1}{b}$ représente, avec une approximation aussi grande qu'on veut, une certaine grandeur incommensurable. Considérons en effet, d'une part, les nombres fractionnaires dont les n^{es} puissances sont inférieures à A ; d'autre part, ceux dont les puissances sont supérieures à A, et imaginons les deux séries de grandeurs commensurables de même espèce représentées par ces nombres. Les grandeurs de la première série sont plus petites que celles de la seconde ; la différence $\frac{1}{b}$ entre une grandeur $\frac{a}{b}$ de la première série et une grandeur $\frac{a+1}{b}$ de la seconde série peut être rendue aussi petite qu'on veut. On conçoit donc qu'entre ces deux séries de grandeurs commensurables, il existe une grandeur incommensurable unique et déterminée, qui en est la limite commune ; c'est cette grandeur incommensurable que représente le symbole $\sqrt[n]{A}$.

3. On a vu, en géométrie, plusieurs exemples de grandeurs incommensurables. Ainsi, on a démontré que la diagonale d'un carré est incommensurable par rapport au côté pris pour unité : elle est représentée par le symbole $\sqrt{2}$. De même, la circonférence d'un cercle est incommensurable par rapport au diamètre pris pour unité ; on le désigne par la lettre π.

Calcul des nombres incommensurables.

4. Le calcul des nombres incommensurables n'offre aucune difficulté. Les nombres incommensurables n'étant autre chose que des nombres fractionnaires approchés, il est clair que les opérations portent sur ces nombres fractionnaires; le résultat sera lui-même un nombre fractionnaire approché, qui représentera, avec une erreur infiniment petite, une grandeur déterminée, en général incommensurable.

Addition. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'additionner deux nombres incommensurables. Si l'on prend les deux nombres par défaut, puis par excès, on a une première somme plus petite que la seconde; d'ailleurs ces deux sommes diffèrent entre elles aussi peu qu'on veut; donc elles comprennent une grandeur déterminée, qu'elles représentent avec une approximation indéfinie. Cette grandeur est la somme des deux grandeurs incommensurables représentées par les nombres incommensurables proposés.

Soustraction. Il en est de même de la soustraction : si l'on prend le plus grand nombre par défaut, le second par excès, ou, réciproquement, le premier par excès, le second par défaut, on a une première différence plus petite que la seconde, et ces deux différences diffèrent entre elles d'une quantité aussi petite qu'on veut; donc elles comprennent une grandeur qu'elles représentent avec une approximation indéfinie. Cette grandeur est la différence des grandeurs incommensurables que représentent les deux nombres incommensurables proposés.

5. *Multiplication.* Soit à faire le produit de deux nombres

incommensurables, par exemple $\sqrt{7} \times \sqrt{5}$. Si l'on prend les deux nombres par défaut, puis par excès, on a un premier produit plus petit que le second ; d'ailleurs ces deux produits diffèrent entre eux d'une quantité aussi petite qu'on veut ; donc ils comprennent une grandeur qu'ils représentent avec une approximation indéfinie.

Il est clair que le produit de plusieurs nombres incommensurables ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs ; car le produit des nombres fractionnaires approchés ne change pas. Ce théorème fondamental étendu aux nombres incommensurables, toutes ses conséquences le sont par là même ; ainsi, on peut grouper deux facteurs en un seul, décomposer au contraire un facteur en deux, etc.

Division. Si l'on prend le dividende par défaut, le diviseur par excès, ou, réciproquement, le dividende par excès, le diviseur par défaut, le premier quotient sera plus petit que le second, et comme leur différence est infiniment petite, ils comprennent entre eux une grandeur déterminée qu'ils représentent avec une approximation indéfinie.

Les propriétés des fractions algébriques, et en général toutes les règles du calcul algébrique, subsistent évidemment quand les lettres désignent des nombres incommensurables. (Voyez l'*Algèbre*, première partie, livre I.)

CHAPITRE II.

CALCUL DES RADICAUX.

6. On appelle en général racine n^e d'un nombre positif a, un nombre positif, commensurable ou incommensurable, qui,

élevé à la n^e puissance, reproduit le nombre proposé. C'est là ce qu'on entend par *valeur arithmétique* d'un radical; on la désigne par le symbole $\sqrt[n]{a}$. Le nombre n est l'indice du radical. On est convenu de ne pas écrire l'indice quand il s'agit d'une racine carrée : dans ce cas, on sous-entend l'indice 2.

Avant d'aborder le calcul des radicaux, nous établirons quelques lemmes sur les puissances :

LEMME I. *On élève un produit à une certaine puissance, en élevant chaque facteur séparément à cette puissance.*

On a, en effet,

$$(abc)^n = abc \times abc \times abc \times \ldots\ldots = a^n b^n c^n.$$

LEMME II. *On élève une fraction à une certaine puissance, en élevant les deux termes séparément à cette puissance.*

On a, en effet,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots\ldots = \frac{a^n}{b^n}.$$

LEMME III. *Élever un nombre à deux puissances successives revient à élever ce nombre à une puissance ayant pour exposant le produit des exposants.*

On a, en effet,

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots = a^{mn}.$$

COROLLAIRE I. *On élève un monôme à une certaine puissance en élevant son coefficient à cette puissance et multipliant tous les exposants par l'indice de la puissance.*

Soit à élever à la n^e puissance le monôme $5a^3b^2c$. En vertu des lemmes I et III, on aura

$$(5a^3b^2c)^n = 5^n a^{3n} b^{2n} c^n.$$

COROLLAIRE II. Un monôme est une puissance n^e parfaite, lorsque son coefficient est une puissance n^e parfaite et que tous ses exposants sont divisibles par n. Dans ce cas, on obtient la racine n^e du monôme proposé, en extrayant la racine n^e de son coefficient et divisant par n tous ses exposants.

Venons maintenant au calcul des radicaux.

7. THÉORÈME I. *Le produit de plusieurs radicaux de même indice est égal à la racine du produit des quantités placées sous les radicaux.*

Je dis, par exemple, que

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc}.$$

Car, si l'on élève le premier membre à la n^e puissance, ce que l'on fait en élevant chaque facteur à cette puissance, on reproduit la quantité abc; donc le premier membre est la racine n^e de abc.

8. THÉORÈME II. *Le quotient de deux radicaux de même indice est égal à la racine du quotient des deux quantités placées sous les radicaux.*

Je dis que

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Car, si l'on élève le premier membre à la n^e puissance, ce que l'on fait en élevant séparément le numérateur et le dénominateur à cette puissance, on reproduit la fraction $\frac{a}{b}$.

9. THÉORÈME III. *On élève un radical à une certaine puissance en élevant à cette puissance la quantité placée sous le radical.*

On a, en effet, en vertu du théorème I,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\ldots\ldots = \sqrt[n]{a^m}.$$

10. REMARQUE. L'expression $\sqrt[n]{a^m}$ indique qu'il faut élever le nombre a à la m^e puissance, et extraire la racine n^e du résultat. Lorsque l'exposant m de la quantité placée sous le radical est divisible par l'indice n du radical, on peut extraire la racine ; il suffit de diviser l'exposant par l'indice du radical. En effet, soit $m = np$, on aura

$$\sqrt[n]{a^{np}} = a^p;$$

car, si l'on élève la quantité a^p à la puissance n, on reproduit a^{np}.

11. THÉORÈME IV. *On extrait la racine d'un radical en multipliant l'indice du radical par l'indice de la racine que l'on veut extraire.*

Je dis que

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

En effet, si l'on élève le premier membre à la puissance m, on trouve $\sqrt[n]{a}$; si l'on élève ensuite ce résultat à la puissance n, on obtient a ; mais ceci revient à élever le premier membre à la puissance mn. Ainsi, le premier membre est une quantité qui, élevée à la puissance mn, reproduit a; c'est donc la racine mn^e de a.

12. Théorème V. *On ne change pas la valeur d'un radical, quand on multiplie ou quand on divise par un même nombre l'indice du radical et l'exposant de la quantité placée sous le radical.*

Soit le radical

$$\sqrt[n]{a^m}.$$

Je dis qu'en multipliant par un même nombre entier p l'indice n et l'exposant m, on obtient un second radical

$$\sqrt[np]{a^{mp}}$$

égal au premier. En effet, d'après le théorème précédent, le second radical peut s'écrire

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{mp}}}.$$

Mais on a (n° 10)

$$\sqrt[p]{a^{mp}} = a^m;$$

donc

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

13. Corollaire I. On *simplifie* un radical en divisant l'indice et l'exposant par leur plus grand commun diviseur. Ainsi

$$\sqrt[12]{a^{20}} = \sqrt[3]{a^5}.$$

14. Corollaire II. On réduit plusieurs radicaux au *même indice* en prenant pour indice commun le produit des indices,

ou plus simplement leur plus petit multiple. Cette réduction est nécessaire quand on veut multiplier ou diviser deux radicaux d'indices différents. Ainsi

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{a^n}\times\sqrt[mn]{b^m}=\sqrt[mn]{a^nb^m},$$

$$\sqrt[4]{a}\times\sqrt[6]{b}=\sqrt[12]{a^3}\times\sqrt[12]{b^2}=\sqrt[12]{a^3b^2}.$$

CHAPITRE III.

EXPOSANTS FRACTIONNAIRES.—EXPOSANTS NÉGATIFS.

Exposants fractionnaires.

15. On a vu (n° 10) que, pour extraire la racine d'une quantité affectée d'un certain exposant, il suffit de diviser l'exposant par l'indice de la racine, lorsque cette division est possible. Ainsi

$$\sqrt[4]{a^{12}}=a^3.$$

Si, par extension, on applique la même règle dans le cas où l'exposant n'est pas divisible par l'indice de la racine, on obtient un exposant fractionnaire. Soit le radical $\sqrt[5]{a^7}$; l'exposant 7 n'étant pas divisible par l'indice 5, il est impossible d'extraire la racine; mais, si l'on applique la règle énoncée plus haut, on est conduit au symbole $a^{\frac{7}{5}}$, que l'on adoptera pour représenter le radical proposé.

En général, on est convenu de représenter un radical quelconque $\sqrt[n]{a^m}$ par le symbole $a^{\frac{m}{n}}$. Le dénominateur de

l'exposant fractionnaire remplace ainsi le signe $\sqrt[n]{\ }$, et les expressions irrationnelles prennent la forme d'expressions rationnelles.

D'après cette convention, les radicaux

$$\begin{array}{lll} \sqrt{a} & \text{s'écriront} & a^{\frac{1}{2}}, \\ \sqrt[3]{a} & \ldots\ldots\ldots & a^{\frac{1}{3}}, \\ \sqrt{a^3} & \ldots\ldots\ldots & a^{\frac{3}{2}}, \\ \sqrt[3]{a^2} & \ldots\ldots\ldots & a^{\frac{2}{3}}, \\ 7\sqrt[3]{a^3b^2c} & \ldots\ldots & 7ab^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}. \end{array}$$

16. L'emploi des exposants fractionnaires ne sera vraiment utile que s'il est permis de remplacer un exposant fractionnaire par un autre égal au premier. C'est ce qui a lieu effectivement ; car multiplier ou diviser par un même nombre les deux termes d'un exposant fractionnaire, revient à multiplier ou diviser par un même nombre l'indice d'un radical et l'exposant de la quantité placée sous le radical, ce qui, comme on l'a vu (n° 12), ne change pas la valeur du radical.

On pourra donc, si l'on veut, réduire un exposant fractionnaire à sa plus simple expression. Soit, par exemple, le radical $\sqrt[12]{a^{20}}$, qui s'écrit symboliquement $a^{\frac{20}{12}}$; en simplifiant l'exposant fractionnaire $\frac{20}{12}$, on obtient le symbole $a^{\frac{5}{3}}$, qui représente le radical $\sqrt[3]{a^5}$, égal au premier.

Nous ferons voir maintenant que les règles du calcul des exposants entiers s'appliquent aux exposants fractionnaires.

17. *Multiplication*. On sait que, pour multiplier deux puissances entières a^m et a^n d'un même nombre a, il suffit d'ajou-

ter les exposants, ce qui donne a^{m+n}. La même règle s'applique aux exposants fractionnaires.

Soient en effet $m=\frac{p}{q}$, $n=\frac{p'}{q'}$; les deux puissances fractionnaires $a^{\frac{p}{q}}$ et $a^{\frac{p'}{q'}}$ représentent les radicaux $\sqrt[q]{a^p}$ et $\sqrt[q']{a^{p'}}$; pour multiplier ces deux radicaux, on les réduira d'abord au même indice, ce qui donne

$$\sqrt[qq']{a^{pq'}}\times\sqrt[qq']{a^{p'q}}=\sqrt[qq']{a^{pq'}\times a^{p'q}}=\sqrt[qq']{a^{pq'+p'q}}.$$

Or, ce dernier radical, produit des deux premiers, est représenté par le symbole

$$a^{\frac{pq'+p'q}{qq'}},$$

ou

$$a^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}};$$

on a donc

$$a^m\times a^n=a^{m+n},$$

quels que soient les exposants m et n, entiers ou fractionnaires.

Exemples.

1° $a^{\frac{2}{5}}\times a^{\frac{3}{5}}=a,$

2° $a\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{2}},$

3° $a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}},$

4° $a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{5}{6}}a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{21}{12}}=a^{\frac{7}{4}}.$

18. *Division*. La règle de la multiplication étant étendue aux exposants fractionnaires, celle de la division l'est par là même. On a, en effet,

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},$$

m et n étant des exposants entiers ou fractionnaires, dont le premier est plus grand que le second ; car, si l'on multiplie le quotient par le diviseur, ce que l'on fait en ajoutant les exposants, on reproduit le dividende a^m. Ainsi, pour diviser l'une par l'autre deux puissances quelconques d'un même nombre, il suffira de retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende.

Exemples.

1° $\dfrac{a}{a^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}$,

2° $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}=a$,

3° $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{6}}$,

4° $\dfrac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{3}{4}}}=a^{\frac{1}{12}}$.

19. *Puissance*. Nous avons démontré que l'on élève un nombre a à deux puissances entières successives m et n en élevant ce nombre à une puissance ayant pour exposant le produit mn des exposants (n° 6). La même règle s'applique aux exposants fractionnaires.

Soient en effet $m=\frac{p}{q}$, $n=\frac{p'}{q'}$; l'expression

$$(a^m)^n \quad \text{ou} \quad \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p'}{q'}}$$

signifie

$$\sqrt[q']{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{p'}} \quad \text{ou} \quad \sqrt[q']{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{p'}}.$$

Il faut élever le radical $\sqrt[q]{a^p}$ à la puissance p' et prendre la raison q'^e du résultat. On sait (nº 9) que l'on élève un radical à une puissance en élevant à cette puissance la quantité placée sous le radical ; on a donc

$$\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{p'}=\sqrt[q]{a^{pp'}},$$

et par suite

$$\sqrt[q']{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{p'}}=\sqrt[q']{\sqrt[q]{a^{pp'}}}.$$

On sait d'autre part (nº 11) que l'on extrait la racine d'un radical en multipliant l'indice du radical par l'indice de la racine, ce qui donne

$$\sqrt[q']{\sqrt[q]{a^{pp'}}}=\sqrt[qq']{a^{pp'}}.$$

Mais ce dernier radical est représenté par le symbole $a^{\frac{pp'}{qq'}}$ ou $a^{\frac{p}{q}\times\frac{p'}{q'}}$; on a donc d'une manière générale

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

Exemples.

1º $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{2}}$,

2º $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=a$,

3º $\left(a^{\frac{2}{4}}\right)^{\frac{8}{2}}=a^2$.

Exposants incommensurables.

20. Prenons comme exemple l'expression $a^{\sqrt{2}}$. Soient $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ deux nombres fractionnaires dont les carrés comprennent 2; l'expression $a^{\sqrt{2}}$ désigne la limite commune des deux quantités $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{m+1}{n}}$, quand la différence $\frac{1}{n}$ devient de plus en plus petite. Mais, pour justifier cette définition, il faut démontrer que ces deux quantités $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{m+n}{n}}$ tendent effectivement vers une limite commune : c'est ce que nous ferons voir plus tard, quand nous aurons établi quelques propriétés des puissances servant à la définition des logarithmes.

Admettant pour le moment l'existence de cette limite, nous remarquerons que toutes les règles démontrées pour le calcul des exposants fractionnaires s'étendent évidemment aux exposants incommensurables.

Ainsi

$$a^{\sqrt{3}}\,a^{\sqrt{2}}=a^{\sqrt{3}+\sqrt{2}},$$

$$\left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}=a^{\sqrt{6}},$$

$$\left(a^{\sqrt{12}}\right)^{\sqrt{3}}=a^{\sqrt{36}}=a^{6}.$$

Exposants négatifs.

21. Nous savons que pour diviser l'une par l'autre deux puissances d'un même nombre, il suffit de retrancher l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende, lorsque l'exposant du diviseur est plus petit que celui du dividende.

Si l'on applique la même règle, lorsque l'exposant du diviseur est plus grand que celui du dividende, on obtient un exposant négatif. Soit le quotient $\frac{a^4}{a^7}$; l'exposant du diviseur étant plus grand que celui du dividende, la division est impossible; mais, si l'on applique la règle énoncée plus haut, on est conduit au symbole a^{-3}; le quotient proposé $\frac{a^4}{a^7}$, simplifié, devient $\frac{1}{a^3}$; ainsi le symbole a^{-3} peut être adopté comme représentant le quotient $\frac{1}{a^3}$.

En général, on est convenu de représenter le quotient $\frac{1}{a^m}$, dans lequel l'exposant m est quelconque, entier ou fractionnaire, par le symbole a^{-m}. L'exposant négatif remplace ainsi le signe de la division.

Nous ferons voir que les règles établies précédemment pour le calcul des exposants positifs s'étendent aux exposants négatifs.

22. *Multiplication.* Pour multiplier deux puissances a^m et a^n d'un même nombre, il suffit de faire la somme algébrique des exposants, quels que soient ces exposants, positifs ou négatifs.

1° Considérons d'abord le cas où l'un des exposants m est positif, l'autre n négatif. Posons $n=-n'$, les nombres positifs m et n' étant quelconques, entiers ou fractionnaires ou même incommensurables. Puisque le symbole $a^{-n'}$ représente $\frac{1}{a^{n'}}$, on a

$$a^m \times a^n = a^m \times a^{-n'} = a^m \times \frac{1}{a^{n'}} = \frac{a^m}{a^{n'}};$$

mais le quotient $\frac{a^m}{a^{n'}}$ est représenté, dans tous les cas, que m soit plus grand ou plus petit que n', par le symbole $a^{m-n'}$; on a donc

$$a^m \times a^n = a^{m-n'} = a^{m+n}.$$

L'exposant du produit est la somme algébrique des deux exposants.

2° Supposons maintenant les deux exposants négatifs, et soient $m = -m'$, $n = -n'$. Puisque les symboles $a^{-m'}$ et $a^{-n'}$ désignent les quotients $\frac{1}{a^{m'}}$ et $\frac{1}{a^{n'}}$, on a

$$a^m \times a^n = a^{-m'} \times a^{-n'} = \frac{1}{a^{m'}} \times \frac{1}{a^{n'}} = \frac{1}{a^{m'} \times a^{n'}} = \frac{1}{a^{m'+n'}}.$$

Mais cette dernière expression est représentée par $a^{-(m'+n')}$ ou $a^{-m'-n'}$. On a donc

$$a^m \times a^n = a^{-m'-n'} = a^{m+n}.$$

L'exposant du produit est encore la somme algébrique des exposants.

Exemples.

1° $a^5 \times a^{-2} = a^3$,

2° $a^{-5} \times a^2 = a^{-3}$,

3° $a^2 \times a^{-2} = a^0 = 1$,

4° $a^{-5} \times a^{-2} = a^{-7}$.

23. *Division.* La règle de la multiplication étant étendue aux exposants négatifs, celle de la division l'est par là même. Pour diviser l'une par l'autre deux puissances quelconques d'un même nombre, il suffit de retrancher algébriquement l'exposant du diviseur de celui du dividende; car en multi-

pliant le quotient ainsi obtenu par le diviseur, on reproduit le dividende. Remarquons que ceci revient à transformer le diviseur en multiplicateur par le changement de signe de son exposant.

Exemples.

1° $\frac{a^{-3}}{a^{2}}=a^{-3}\times a^{-2}=a^{-5}$,

2° $\frac{a^{3}}{a^{-2}}=a^{3}\times a^{2}=a^{5}$,

3° $\frac{a^{-3}}{a^{-2}}=a^{-3}\times a^{2}=a^{-1}$,

4° $\frac{a^{-3}}{a^{-5}}=a^{-3}\times a^{5}=a^{2}$.

24. *Puissance.* Pour élever un nombre à deux puissances successives, il suffit de multiplier entre eux les deux exposants, quels que soient leurs signes.

1° Considérons d'abord le cas où le premier exposant m est négatif, le second n positif, et soit $m=-m'$; on a

$$(a^{m})^{n}=(a^{-m'})^{n}=\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{n}=\frac{1}{a^{m'n}};$$

mais ce résultat peut être représenté par $a^{-m'n}$ ou par a^{mn}; ainsi

$$(a^{m})^{n}=a^{mn}.$$

2° Supposons le premier exposant m positif, le second n négatif, et soit $n=-n'$. L'expression $(a^{m})^{-n'}$ représente le quotient

$$\frac{1}{(a^{m})^{n'}},$$

qui est égal à $\frac{1}{a^{mn'}}$, et qui peut être représenté par $a^{-mn'}$, ou par a^{mn}. On a donc

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

3° Supposons enfin les deux exposants négatifs et soient $m = -m'$, $n = -n'$. L'expression $(a^{-m'})^{-n'}$ représente le quotient

$$\frac{1}{(a^{-m'})^{n'}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{n'}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{m'n'}}} = a^{m'n'} = a^{mn},$$

et l'on a toujours

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Ainsi, dans tous les cas, l'exposant du résultat est le produit algébrique des deux exposants, conformément à la règle des signes.

Exemples.

$$1° \quad (a^{-3})^2 = a^{-6},$$

$$2° \quad (a^3)^{-2} = a^{-6},$$

$$3° \quad (a^{-2})^{-3} = a^6.$$

Tout ce que nous avons dit sur le calcul des exposants fractionnaires et négatifs peut se résumer en deux règles fondamentales :

$$1° \quad a^m \times a^n = a^{m+n},$$

$$2° \quad (a^m)^n = a^{mn},$$

m et n désignant des exposants quelconques, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

LIVRE II

BINÔME

—

CHAPITRE PREMIER.

COMBINAISONS.

Arrangements.

25. Je suppose que l'on ait m objets distincts. On appelle *arrangements* de ces m objets n à n les différentes dispositions que l'on peut former avec ces m objets, en les prenant n à n de toutes les manières possibles, et les plaçant les uns à côté des autres sur une ligne droite. Deux arrangements diffèrent, par la nature des objets qui les composent, ou seulement par l'ordre dans lequel ils sont placés.

Par exemple, avec les trois lettres a, b, c, prises deux à deux de toutes les manières, on peut former les six arrangements suivants:

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$

Le premier et le troisième ne diffèrent que par l'ordre des lettres; de même le second et le cinquième, le quatrième et le sixième.

Nous représenterons en général les m objets par les premières lettres de l'alphabet

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots,\ k,$$

et nous désignerons par le symbole A_m^n le nombre des arrangements que l'on peut former avec ces m objets pris n à n de toutes les manières possibles.

On obtient évidemment les arrangements des m lettres une à une, en prenant chacune d'elles séparément, ce qui donne m arrangements

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots\ k.$$

Ainsi

$$A_m^1 = m.$$

Nous obtiendrons les arrangements des m lettres deux à deux, en mettant à la suite de la première lettre a successivement chacune des autres lettres, à la suite de la seconde lettre b successivement chacune des autres, et ainsi de suite, ce qui donne le tableau suivant :

$$\begin{array}{l} ab,\ ac,\ ad,\ \ldots\ldots,\ ak,\\ ba,\ bc,\ bd,\ \ldots\ldots,\ bk,\\ ca,\ cb,\ cd,\ \ldots\ldots,\ ck,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ ka,\ kb,\ kc,\ \ldots\ldots,\ kh. \end{array}$$

La première ligne horizontale contenant tous les arrangements qui commencent par la lettre a, la deuxième tous ceux qui commencent par la lettre b, etc., nous avons ainsi formé tous les arrangements des m lettres deux à deux. Puisque chaque ligne horizontale renferme $m-1$ arrangements, et qu'il y a m lignes, le nombre des arrangements contenus dans le tableau est $m\,(m-1)$; on a donc

$$A_m^2 = m(m-1).$$

De même, si, à la suite de chacun des arrangements deux à deux, on place chacune des $m-2$ autres lettres, on forme les arrangements trois à trois :

$$
\begin{array}{l}
abc,\ abd,\ \ldots\ldots,\ abk,\\
acb,\ acd,\ \ldots\ldots,\ ack,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
bac,\ bad,\ \ldots\ldots,\ bak,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

A la suite du premier arrangement *ab* de deux lettres, nous avons écrit chacune des autres lettres $c, d, \ldots\ldots, k$; de même, à la suite du second *ac*, chacune des autres lettres $b, d, \ldots, k$, etc. Nous avons formé ainsi tous les arrangements trois à trois; car un arrangement de trois lettres se compose nécessairement d'un arrangement de deux lettres suivi d'une autre lettre. Le même arrangement n'est pas répété deux fois; car les arrangements d'une même ligne horizontale diffèrent par la troisième lettre, et deux arrangements de deux lignes différentes par l'arrangement des deux premières lettres. Chaque ligne horizontale contient $m-2$ arrangements; il y a $m(m-1)$ lignes horizontales, autant que d'arrangements deux à deux; donc le nombre des arrangements des m lettres trois à trois est

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2).$$

En continuant le même raisonnement, on arrive à la formule générale

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1).$$

Le nombre des arrangements de m *objets* n *à* n *est égal au*

produit de n *nombres entiers consécutifs décroissants à commencer par* m.

26. Il est bon de s'assurer que la formule précédente, écrite par induction, est générale. Supposons que l'on ait formé les arrangements des m lettres $n-1$ à $n-1$, et que l'on veuille former les arrangements n à n. A la suite de chacun des arrangements $n-1$ à $n-1$, on écrira successivement chacune des $m-n+1$ autres lettres. On obtiendra de la sorte tous les arrangements n à n; car un arrangement de n lettres se compose d'un arrangement de $n-1$ lettres suivi d'une autre lettre. Le même arrangement ne se trouve pas répété deux fois; car deux quelconques des arrangements ainsi obtenus diffèrent, soit par la dernière lettre, soit par l'arrangement des $n-1$ premières lettres. Chacun des arrangements précédents donnant $m-n+1$ arrangements nouveaux, on a la relation générale

$$A_m^n = A_m^{n-1} \times (m-n+1).$$

On en déduit, en donnant successivement à n les valeurs 2, 3, 4,....., n,

$$A_m^2 = A_m^1 \times (m-1) = m(m-1),$$

$$A_m^3 = A_m^2 \times (m-2),$$

$$A_m^4 = A_m^3 \times (m-3),$$

. . . .

. . . .

$$A_m^n = A_m^{n-1} \times (m-n+1).$$

Si l'on multiplie toutes ces égalités entre elles, les fa-

teurs intermédiaires disparaissent, et l'on obtient la formule

$$A_m^n = m(m-1)\,(m-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(m-n+1).$$

Applications. 1° Quel est le nombre des arrangements de sept lettres trois à trois? C'est le produit de trois nombres entiers consécutifs décroissants, à commencer par 7,

$$A_7^3 = 7.6.5 = 210.$$

2° Combien y a-t-il de nombres composés de deux chiffres significatifs différents? Autant qu'on peut former d'arrangements avec les neuf chiffres significatifs deux à deux,

$$A_9^2 = 9.8 = 72.$$

3° Combien y a-t-il de nombres composés de cinq chiffres significatifs différents? Autant qu'on peut former d'arrangements cinq à cinq avec les neuf chiffres significatifs,

$$A_9^5 = 9.8.7.6.5 = 15120.$$

Permutations.

27. On appelle *permutations* de m objets les différentes dispositions que l'on peut donner à ces m objets, en les plaçant les uns à côté des autres sur une ligne droite. Chaque permutation contient tous les objets, et deux permutations ne diffèrent que par l'ordre des objets.

Ainsi, avec deux lettres a et b, on peut former deux permutations

$$ab,\quad ba.$$

Nous désignerons en général par P_m le nombre des permutations de m objets. Il résulte de la définition que les permutations de m objets ne sont autre chose que les arrangements

de ces m objets pris tous ensemble, c'est-à-dire m à m; on a donc, suivant la notation habituelle,

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2) \ldots \ldots 3.2.1,$$

ou, si l'on change l'ordre des facteurs,

$$P_m = 1.2.3 \ldots \ldots m.$$

Le nombre des permutations de m *objets égale le produit des* m *premiers nombres entiers.*

Applications. 1° Combien peut-on former de mots de trois lettres différentes avec trois lettres données? C'est le nombre des permutations de trois lettres;

$$P_3 = 1.2.3 = 6.$$

2° De combien de manières peut-on disposer dix soldats en ligne? C'est le nombre des permutations de dix objets;

$$P_{10} = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3628800.$$

28. *Remarque.* Nous avons déduit la formule des permutations de celles des arrangements comme cas particulier. Voici comment on peut établir cette formule directement.

On ne peut évidemment donner qu'une disposition à une lettre a; ainsi

$$P_1 = 1.$$

Avec deux lettres a et b, on peut former deux permutations

$$ab, \; ba,$$

et l'on a

$$P_2 = 1.2.$$

Si, dans chacune des permutations précédentes, on introduit la lettre c à toutes les places, à la fin, au milieu, au

commencement, on obtient les permutations de trois lettres a, b, c,

$$abc,\ acb,\ cab,$$
$$bac,\ bca,\ cba.$$

On a formé ainsi toutes les permutations de trois lettres; car une permutation de trois lettres se compose d'une permutation des deux premières lettres a et b à laquelle on ajoute la troisième lettre c à une place déterminée. La même permutation ne se trouve pas répétée deux fois; car deux permutations quelconques diffèrent, soit par la place de la lettre c, soit par la disposition des deux autres lettres. Chacune des permutations précédentes donnant trois permutations nouvelles, on a

$$P_3 = P_2 \times 3 = 1.2.3.$$

De même, si dans chacune des permutations des trois lettres a, b, c, on introduit la lettre d à toutes les places, et il y a quatre places, deux intermédiaires et deux extrêmes, on obtient les permutations des quatre lettres a, b, c, d; chacune des permutations précédentes donnant quatre permutations nouvelles, on a

$$P_4 = P_3 \times 4 = 1.2.3.4.$$

En continuant le même raisonnement, on arrive à la formule générale

$$P_m = 1.2.3 \ldots\ldots m.$$

Combinaisons.

29. On appelle *combinaisons* de m objets n à n les différents groupes que l'on peut former avec ces m objets, en les prenant n à n de toutes les manières possibles, de façon que deux groupes diffèrent au moins par la nature d'un objet.

Dans les combinaisons on n'a pas égard à la disposition des objets.

Par exemple, avec les trois lettres *a*, *b*, *c*, prises deux à deux, on ne peut former que trois combinaisons

$$ab,\ ac,\ cb,$$

tandis que l'on a six arrangements.

Nous désignerons en général par C_m^n les nombre des combinaisons de *m* objets *n* à *n*. La formule des combinaisons se déduit de celle des arrangements et de celle des permutations. Imaginons, en effet, les combinaisons de *m* lettres *n* à *n* formées. Si nous donnons aux *n* lettres qui composent chacune de ces combinaisons toutes les dispositions possibles, c'est-à-dire si nous formons les permutations de ces *n* lettres, nous obtiendrons les arrangements des *m* lettres *n* à *n*. Nous aurons ainsi tous les arrangements; car un arrangement quelconque est une combinaison dans laquelle les *n* lettres qui composent cette combinaison sont disposées dans un certain ordre; et nous n'aurons pas deux fois le même arrangement; car les arrangements fournis par une même combinaison diffèrent par l'ordre des lettres, et ceux qui sont fournis par des combinaisons différentes diffèrent au moins par la nature d'une lettre. Chaque combinaison donnant un nombre d'arrangements marqué par P_n, on a

$$A_m^n = C_m^n \times P_n;$$

d'où

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n},$$

et, en remplaçant par les valeurs connues,

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}.$$

Applications. Pour appliquer la formule, on écrit d'abord au dénominateur les n premiers nombres entiers, puis on écrit au numérateur autant de nombres entiers décroissants, à commencer par m.

1° Nombre des combinaisons de 5 objets 2 à 2;

$$C_5^2 = \frac{5.4}{1.2} = 10.$$

2° Nombre des combinaisons de 10 lettres 4 à 4;

$$C_{10}^4 = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 210.$$

3° Nombre des combinaisons de 10 lettres 6 à 6;

$$C_{10}^6 = \frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6} = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 210.$$

4° Le nombre des combinaisons de m lettres une à une est m, ce qui est évident *à priori*.

5° Le nombre des combinaisons de m lettres m à m est

$$C_m^m = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots\ldots m} = 1.$$

Il est évident, en effet, que si l'on prend toutes les lettres, on ne peut former qu'une seule combinaison.

Nous démontrerons sur les combinaisons deux théorèmes qui nous seront utiles par la suite.

30. Théorème I. *Le nombre des combinaisons de* m *objets* n *à* n *est égal au nombre des combinaisons de* m *objets* m — n *à* m — n.

Supposons, en effet, que l'on ait m numéros dans une urne; si l'on en tire n, il en restera $m-n$ dans l'urne; ainsi, à chaque combinaison de n numéros tirés correspond une combinaison de $m-n$ numéros restants, et réciproquement. On a donc

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

On peut d'ailleurs vérifier aisément l'égalité des deux nombres

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n},$$

$$C_m^{m-n} = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(m-n)};$$

car, si l'on multiplie les deux termes de la première fraction par le produit $1.2\ldots\ldots(m-n)$, les deux termes de la seconde par $1.2\ldots\ldots n$, les dénominateurs deviennent égaux et l'on a au numérateur le produit des nombres entiers consécutifs de 1 à m; il vient de la sorte

$$C_m^n = C_m^{m-n} = \frac{1.2.3\ldots\ldots m}{1.2\ldots\ldots n \times 1.2\ldots\ldots(m-n)}.$$

Par exemple, le nombre des combinaisons de 5 objets 4 à 4 est égal au nombre des combinaisons de 5 objets 1 à 1, le nombre des combinaisons de 5 objets 3 à 3 est égal au nombre des combinaisons de 5 objets 2 à 2.

31. THÉORÈME II. *Le nombre des combinaisons de* m *objets* n *à* n *est égal au nombre des combinaisons de* m—1 *objets* n *à* n, *plus le nombre des combinaisons de* m — 1 *objets* n — 1 *à* n — 1.

En effet, les combinaisons de m lettres $a, b, c, \ldots\ldots, k$, prises

n à n, peuvent être distinguées en deux catégories, celles qui ne contiennent pas une certaine lettre k, et celles qui la contiennent. La première catégorie se compose évidemment des combinaisons des $m-1$ premières lettres n à n. On obtiendra celles de la seconde catégorie en formant les combinaisons des $m-1$ premières lettres $n-1$ à $n-1$, et ajoutant à chacune d'elles la lettre k. On a donc

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}.$$

On peut aussi vérifier facilement cette égalité au moyen de la formule des combinaisons.

Par exemple, le nombre des combinaisons de 7 objets 3 à 3 est égal au nombre des combinaisons de 6 objets 3 à 3, plus le nombre des combinaisons de 6 objets 2 à 2.

Probabilités.

32. On appelle *probabilité* d'un événement le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles, lorsque tous ces cas sont également possibles. Je suppose qu'une urne renferme 12 boules d'égale grandeur, 7 blanches et 5 noires. On tire une boule au hasard, et l'on demande la probabilité pour chaque couleur. Il y a 12 cas possibles et également possibles ; 7 pour les blanches, 5 pour les noires. La probabilité est donc $\frac{7}{12}$ pour la sortie d'une blanche, $\frac{5}{12}$ pour la sortie d'une noire.

La loterie se composait de 90 numéros ; à chaque tirage il en sortait 5 au hasard. Une personne désigne un numéro, par exemple, le numéro 20 ; si le numéro désigné se trouve parmi les 5 numéros sortants, la personne a gagné, sinon elle

a perdu. C'est là ce qu'on appelait un *extrait*. Il est facile d'évaluer la probabilité. Puisqu'on tire 5 numéros à chaque fois, le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 90 numéros 5 à 5,

$$C_{90}^{5} = \frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}.$$

Les cas favorables sont les combinaisons qui contiennent le numéro désigné 20; pour les former, imaginons que l'on ôte ce numéro 20 et que l'on combine les 89 autres numéros 4 à 4, puis que l'on ajoute à chacune de ces combinaisons le numéro 20; on aura de cette manière toutes les combinaisons qui contiennent le numéro 20. Ainsi, le nombre des cas favorables est le nombre des combinaisons de 89 numéros 4 à 4,

$$C_{89}^{4} = \frac{89.88.87.86}{1.2.3.4}.$$

La probabilité de la sortie du numéro désigné, ou le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles, est le quotient de C_{89}^{4} par C_{90}^{5}, soit $\frac{5}{90}$ ou $\frac{1}{18}$. Ainsi, sur 18 cas possibles, il y en a 1 favorable à la personne qui prend l'extrait, et 17 pour la loterie. Il faudrait donc parier 1 contre 17. La loterie, au lieu de 17 fois, ne donnait que 15 fois la mise.

Lorsqu'on désigne deux numéros, on prend ce qu'on appelle un *ambe;* si les deux numéros désignés sont tous deux parmi les cinq numéros sortants, on a gagné; sinon on a perdu. Les cas favorables sont les combinaisons qui contiennent les deux numéros désignés; on les formerait en combinant les 88 autres numéros 3 à 3, et ajoutant à cha-

cune des combinaisons les deux numéros désignés. Ainsi, la probabilité de la sortie d'un ambe est le rapport de C_{88}^{3} à C_{90}^{5}, soit $\frac{4.5}{90.89}$ ou $\frac{2}{801}$. Il faudrait donc parier 2 contre 799, ou 1 contre $399 + \frac{1}{2}$; la loterie ne donnait que 270 fois la mise.

On trouvera de même que la probabilité du *terne* est $\frac{1}{11748}$, celle du *quaterne* $\frac{1}{511038}$. La loterie ne donnait que 5500 fois la mise pour le terne, 75000 fois pour le quaterne.

CHAPITRE II.

FORMULE DU BINÔME.

33. On sait que le produit de deux polynômes est égal à la somme des produits que l'on obtient en multipliant chacun des termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur. En général, le produit de plusieurs polynômes est la somme des produits que l'on obtient en prenant de toutes les manières possibles un terme dans chacun des polynômes proposés.

Proposons-nous d'abord d'effectuer le produit des m facteurs binômes

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,\ldots\ldots\,(x+h)\,(x+k),$$

en l'ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x. D'après la loi que nous venons de rappeler, le produit de ces m facteurs binômes est la somme des produits que l'on obtient en prenant de toutes les manières possibles un terme

dans chacun d'eux. Si l'on prend les m premiers termes, on obtient le premier terme x^m du produit. Si l'on prend le second terme a dans le premier facteur binôme, et le premier terme x dans tous les autres, on obtient le produit ax^{m-1}, qui est du degré $m-1$ par rapport à x; en prenant de même le second terme b dans le second facteur binôme, et le premier terme x dans tous les autres, on a bx^{m-1}; le second terme de l'un quelconque des facteurs binômes, combiné avec les premiers termes de tous les autres, donne au produit un terme en x^{m-1}; si l'on réunit tous ces termes du degré $m-1$, on reconnaît que le coefficient de x^{m-1} est la somme des m quantités $a, b, c, \ldots, k$, somme que, pour abréger, nous désignerons par S_1. Ainsi le second terme du produit est S_1x^{m-1}.

Prenons maintenant les seconds termes dans deux quelconques des facteurs binômes, et les premiers dans tous les autres, nous formerons les termes du degré $m-2$, tels que abx^{m-2}, acx^{m-2}, bcx^{m-2}, etc.; en réunissant tous ces termes, nous voyons que le coefficient de x^{m-2} est la somme S_2 des produits des m quantités $a, b, \ldots, k$ deux à deux, de sorte que le troisième terme du produit est S_2x^{m-2}.

En prenant de même les seconds termes dans trois quelconques des facteurs binômes et les premiers dans tous les autres, on formera les termes du degré $m-3$, tels que $abcx^{m-3}$, $abdx^{m-3}$, etc. Réunissant ces termes en un seul, et appelant S_3 la somme des produits des quantités $a, b, \ldots, k$ trois à trois, on obtient le quatrième terme S_3x^{m-3} du produit.

En général, si l'on prend les seconds termes dans n quelconques des facteurs binômes et les premiers dans les $m-n$

autres, on forme les termes du degré $m-n$; réunissant ces termes et représentant par S_n la somme des produits des m quantités $a, b, \ldots\ldots, k$ prises n à n, on a le terme général $S_n x^{m-n}$ du produit.

On obtient les termes du premier degré en prenant les seconds termes dans tous les facteurs binômes, excepté un, et le premier dans cet autre; ces termes réunis donnent l'avant-dernier terme du produit, $S_{m-1}x$. Enfin le produit $abc\ldots\ldots k$ des seconds termes de tous les facteurs binômes, produit que nous désignerons par S_m, donne le dernier terme du produit demandé.

Ainsi, le produit des m facteurs binômes se développe de la manière suivante :

$$x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} \ldots\ldots + S_n x^{m-n} \ldots\ldots + S_{m-1} x + S_m.$$

34. Supposons maintenant que les quantités $a, b, c, \ldots\ldots, k$ soient égales entre elles, le produit des m facteurs binômes

$$(x+a)(x+b)(x+c) \ldots\ldots (x+k)$$

devient $(x+a)^m$. Voyons à quoi se réduit le développement : la somme S_1 des quantités $a, b, c, \ldots\ldots, k$ est ma, puisque chacune de ces quantités devient égale à a et qu'il y en a m. La lettre S_2 désigne la somme des produits de ces mêmes quantités deux à deux; chacun de ces produits est égal à a^2, et il y en a un nombre marqué par le nombre des combinaisons de m lettres deux à deux, soit $\frac{m(m-1)}{1.2}$; leur somme S_2 est donc égale à $\frac{m(m-1)}{1.2} a^2$. De même S_3 désigne la somme des produits trois à trois; chacun d'eux étant égal à a^3

et leur nombre étant $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, leur somme est égale à $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3$.

En général, S_n désigne la somme des produits des m quantités $a, b, c, \ldots, k$ prises n à n; ces quantités devenant égales à a, chacun des produits est égal à a^n; leur nombre étant le nombre des combinaisons de m lettres n à n, on a

$$S_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3.\ldots\ldots n}a^n.$$

Enfin, le dernier terme, ou le produit des m quantités égales $a, b, \ldots\ldots, k$, se réduit à a^m.

On a ainsi la formule

$$(1)\qquad (x+a)^m = x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \ldots\ldots + \frac{m}{1}a^{m-1}x + a^m,$$

connue sous le nom de *formule du binôme*. Elle est très-fréquemment employée; elle sert à former le développement d'une puissance quelconque d'un binôme. Le terme général, celui qui occupe le $n+1^e$ rang dans le développement, est, comme nous l'avons dit,

$$(2)\qquad \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}a^nx^{m-n}.$$

Si dans la formule (1) on remplace a par $-a$, on obtient le développement de $(x-a)^m$,

$$(x-a)^m = x^m - \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} - \ldots\ldots \pm a^m;$$

les signes alternent.

35. Remarque I. Dans la formule du binôme, les exposants de x vont en diminuant graduellement d'une unité, ceux de a vont au contraire en augmentant; la somme des exposants de a et de x dans chaque terme est constamment égale à m.

Le nombre des termes du développement est $m+1$; car les exposants de x forment la suite des m premiers nombres entiers, plus l'exposant zéro du dernier terme,

$$m,\ m-1,\ m-2,\ \ldots\ldots,\ 1,\ 0;$$

en tout $m+1$ termes.

36. Remarque II. *Les coefficients des termes également distants des extrêmes sont égaux.* Si l'on écrit la formule du binôme en laissant les lettres qui marquent les nombres de combinaisons, on a

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1 a x^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} + \ldots\ldots$$
$$+ C_m^{m-2} a^{m-2} x^2 + C_m^{m-1} a^{m-1} x + a^m.$$

Le premier terme et le dernier ont tous deux pour coefficients l'unité, le second terme et l'avant-dernier ont pour coefficients C_m^1 et C_m^{m-1}; mais, en vertu d'un théorème démontré (nº 30), on sait que ces deux nombres sont égaux. De même les troisièmes termes, à partir des extrêmes, ont pour coefficients les nombres égaux C_m^2 et C_m^{m-2}, etc.

37. Remarque III. Les coefficients se déduisent les uns des autres par une loi très-simple : *Multipliez le coefficient du dernier terme obtenu par l'exposant de* x *dans ce terme et divisez par le rang de ce terme, vous aurez le coefficient du terme suivant.*

En effet, le $n+1^e$ terme du développement est

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots(n-1)n}a^n x^{m-n},$$

le terme précédent

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)}{1,2\ldots\ldots(n-1)}a^{n-1}x^{m-n+1}.$$

On déduit le $n+1^e$ terme du précédent en augmentant d'une unité l'exposant de a et diminuant d'une unité celui de x. Quant au coefficient, on le forme en multipliant le coefficient précédent par l'exposant $m-n+1$ de x dans ce terme précédent, et divisant par n, rang de ce terme.

Exemples.

Il importe de s'exercer à développer rapidement la puissance d'un binôme. La règle que nous venons d'indiquer facilite beaucoup le calcul.

1° $$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 \\ + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7.$$

Pour passer du second terme au troisième, il faut multiplier par 6 et diviser par 2, ce qui revient à multiplier par 3. Pour passer du troisième terme au quatrième, il faut multiplier par 5 et diviser par 3; on divisera d'abord 21 par 3, ce qui donne 7, et l'on multipliera par 5, ce qui fait 35. Le développement contenant $7+1$ ou 8 termes, et les coefficients des termes également distants des extrêmes étant égaux, il suffit de trouver les quatre premiers; les quatre autres sont les mêmes en ordre inverse.

2°
$$(x+a)^8 = x^8 + 8ax^7 + 28a^2x^6 + 56a^3x^5 + 70a^4x^4 + 56a^5x^3 + 28a^6x^2 + 8a^7x + a^8.$$

Le développement contient 9 termes; il est nécessaire de calculer les cinq premiers; arrivé au terme $70a^4x^4$, on remarque que les coefficients se reproduisent.

3°
$$(x-a)^{11} = x^{11} - 11ax^{10} + 55a^2x^9 - 165a^3x^8 + 330a^4x^7 - 462a^5x^6 + 462a^6x^5 - 330a^7x^4 + 165a^8x^3 - 55a^9x^2 + 11a^{10}x - a^{11}.$$

Le nombre des termes étant pair, le dernier terme a le signe —, et les termes également distants des extrêmes sont affectés de signes contraires.

4°
$$(x-a)^{12} = x^{12} - 12ax^{11} + 66a^2x^{10} - 220a^3x^9 + 495a^4x^8 - 792a^5x^7 + 924a^6x^6 - 792a^7x^5 + 495a^8x^4 - 220a^9x^3 + 66a^{10}x^2 - 12a^{11}x + a^{12}.$$

Le développement contenant un nombre impair de termes, le dernier a le signe +, et les termes également distants des extrêmes sont affectés du même signe.

38. Remarque IV. *Les coefficients vont en augmentant du commencement jusqu'au milieu du développement et en diminuant du milieu à la fin.* En effet, le rapport du coefficient du $n+1^e$ terme à celui du terme précédent est, comme nous l'avons dit,

$$\frac{m-n+1}{n}.$$

C'est par ce rapport que l'on multiplie le coefficient du n^e terme pour former celui du $n+1^e$ terme. Les coefficients vont en croissant tant que le multiplicateur reste supérieur à

l'unité; ils vont au contraire en décroissant quand ce multiplicateur devient inférieur à l'unité. Posons donc

$$\frac{m-n+1}{n}>1,$$

et résolvons cette inégalité par rapport à n, nous aurons

$$n<\frac{m+1}{2}.$$

La fraction $\frac{m+1}{2}$ désigne la moitié du nombre des termes du développement; ainsi les coefficients vont en croissant jusqu'au milieu. A partir du milieu, l'inégalité change de sens et les coefficients décroissent.

Il y a deux cas à distinguer : 1° lorsque m est pair, le nombre des termes $m+1$ est impair; il y a au milieu un coefficient plus grand que tous les autres. Ainsi, dans le développement de $(x+1)^8$, dont nous n'écrivons ici que les coefficients

$$1,\ 8,\ 28,\ 56,\ 70,\ 56,\ 28,\ 8,\ 1,$$

le coefficient 70 est le plus grand. 2° Lorsque m est impair, le nombre des termes est pair, il y a au milieu deux coefficients égaux plus grands que tous les autres. Ainsi, dans le développement de $(x+a)^7$, dont les coefficients sont

$$1,\ 7,\ 21,\ 35,\ 35,\ 21,\ 7,\ 1,$$

les deux coefficients 35 du milieu sont les plus grands.

Ce qui précède donne une propriété des combinaisons qu'il est bon de remarquer. On demande, par exemple, de quelle manière il faut combiner huit objets pour avoir le plus grand nombre des combinaisons. Il est clair qu'il faut les

combiner 4 à 4; car les coefficients du développement de $(x+a)^8$, à partir du second, sont les nombres de combinaisons que l'on peut former avec 8 objets, en les prenant 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, etc...; le plus grand coefficient étant le cinquième, il en résulte que le nombre des combinaisons des 8 objets 4 à 4 surpasse les autres nombres de combinaisons. De même, avec 7 objets, on obtient le plus grand nombre de combinaisons en les prenant 3 à 3 ou 4 à 4.

39. Remarque V. Si dans le développement de $(x+a)^m$ on fait $x=1$ et $a=1$, chaque terme se réduit à son coefficient, et l'on a

$$2^m=1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\ldots\ldots+1.$$

Ainsi, la somme des coefficients du développement est égale à 2^m.

En retranchant le premier coefficient qui ne désigne pas un nombre de combinaisons, on en conclut que le nombre total des combinaisons qu'on peut faire avec m objets, en les prenant de toutes les manières possibles, soit 1 à 1, soit 2 à 2, etc., est 2^m-1,

$$C_m^1+C_m^2+C_m^3+\ldots\ldots+C_m^m=2^m-1.$$

40. Remarque VI. Si dans le développement de $(x-a)^m$ on fait $x=1$ et $a=1$, on a

$$0=1-C_m^1+C_m^2-C_m^3+\ldots\ldots\pm C_m^m,$$

d'où l'on déduit

$$C_m^1+C_m^3+\ldots\ldots=1+(C_m^2+C_m^4+\ldots\ldots).$$

Ainsi, quand on forme toutes les combinaisons possibles avec

m objets, le nombre des combinaisons qui renferment un nombre impair d'objets surpasse d'une unité le nombre des combinaisons qui renferment un nombre pair d'objets. Si donc on appelle u et v ces deux nombres de combinaisons, on a

$$u+v=2^m-1,$$
$$u-v=1.$$

On en déduit

$$u=2^{m-1},\quad v=2^{m-1}-1.$$

Par exemple, avec 10 objets on peut former en tout $2^{10}-1$, c'est-à-dire 1023 combinaisons. Parmi ces combinaisons, 512 contiennent un nombre impair d'objets, 511 un nombre pair.

CHAPITRE III.

PUISSANCE D'UN POLYNÔME.

Permutations avec répétition.

41. Nous avons désigné par P_m le nombre des permutations que l'on peut former avec m lettres, quand toutes les lettres sont différentes. Supposons maintenant que, parmi ces m lettres, il y en ait α égales à a, les lettres b, c, d,..... étant différentes; voyons à quoi se réduit le nombre des permutations. Appelons x le nombre des permutations différentes que l'on peut former avec les m lettres proposées, parmi lesquelles α sont égales à a. Si, dans chacun de ces arrangements, on laisse les lettres b, c, d,..... à leurs places, et que l'on per-

mute entre elles les α lettres a, on n'apportera aucun changement apparent dans l'arrangement; mais, si on affecte les lettres a d'indices, si on les désigne par

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots,\ a_\alpha,$$

afin de les distinguer les unes des autres, chacun des x arrangements précédents produira P_α arrangements distincts. Comme on a maintenant m lettres différentes, on a formé de la sorte les P_m permutations des m lettres différentes. On a ainsi

$$P_m = x \times P_\alpha,$$

d'où

$$(1) \qquad x = \frac{P_m}{P_\alpha}.$$

Par exemple, avec les trois lettres a, a, b, dont deux sont égales à a, on ne peut former que $\frac{P_3}{P_2}$, c'est-à-dire 3 permutations différentes

$$aab,\ aba,\ baa.$$

Pour reprendre le raisonnement sur cet exemple, afin de le rendre plus sensible, affectons d'indices les deux lettres a et permutons les deux lettres a_1 et a_2; le premier arrangement aab fournira deux arrangements distincts a_1a_2b, a_2a_1b; le second aba fournira de même a_1ba_2, a_2ba_1; le troisième donnera ba_1a_2, ba_2a_1; on aura formé ainsi les six permutations

$$a_1a_2b,\ a_1ba_2,\ ba_1a_2,$$
$$a_2a_1b,\ a_2ba_1,\ ba_2a_1,$$

des trois lettres différentes a_1, a_2, b.

42. Supposons que, parmi les m lettres, il y en ait α égales à a et β égales à b, les autres étant différentes, et appelons x le nombre des permutations que l'on peut former avec ces m lettres. Si l'on affecte d'indices les β lettres b, afin de les distinguer les unes des autres, et que, dans chacun des arrangements précédents, on permute ces β lettres, chacun de ces x arrangements fournira P_β arrangements distincts, et l'on aura en tout $x\times P_\beta$ arrangements; ce sont les permutations de m lettres, parmi lesquelles α sont égales à a, les autres étant différentes; le nombre de ces permutations étant égal à $\frac{P_m}{P_\alpha}$, on a

$$x\times P_\beta=\frac{P_m}{P_\alpha};$$

d'où

$$x=\frac{P_m}{P_\alpha P_\beta}. \tag{2}$$

On peut continuer le même raisonnement. Si, parmi les m lettres, α sont égales à a, β à b, γ à c, les autres étant différentes, le nombre des permutations que l'on peut former avec ces m lettres sera exprimé par la formule

$$\frac{P_m}{P_\alpha P_\beta P_\gamma}, \tag{3}$$

et ainsi de suite.

Par exemple, si l'on a cinq lettres a, trois lettres b, deux lettres c, et une lettre d, avec ces onze lettres on peut former un nombre de permutations marqué par

$$\frac{P_{11}}{P_5P_3P_2P_1}=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}{1.2.3.4.5\times 1.2.3\times 1.2\times 1}=27720.$$

Combinaisons avec répétition.

43. Nous avons désigné par C_m^n le nombre des combinaisons que l'on peut faire avec m lettres différentes, en les prenant n à n de toutes les manières possibles, chaque lettre n'entrant qu'une fois au plus dans chaque combinaison. Supposons maintenant que l'on puisse répéter une même lettre autant de fois qu'on le voudra, et nommons D_m^n le nombre des combinaisons que l'on formera de cette manière. Par exemple, avec quatre lettres différentes a, b, c, d, quand une même lettre n'entre qu'une fois dans chaque combinaison, on peut former quatre combinaisons trois à trois,

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd;$$

ce sont les combinaisons telles que nous les avons considérées jusqu'à présent. Mais, si l'on peut répéter une même lettre, outre les combinaisons précédentes, on en aura d'autres

$$\begin{array}{l} aab,\ aac,\ aad, \\ bba,\ bbc,\ bbd, \\ cca,\ ccb,\ ccd, \\ dda,\ ddb,\ ddc, \\ aaa,\ bbb,\ ccc,\ ddd, \end{array}$$

dans lesquelles une même lettre entre deux ou trois fois. Dans cet exemple, on a donc $C_4^3 = 4$, $D_4^3 = 20$.

Voici comment on peut trouver le nombre des combinaisons avec répétition. Imaginons qu'on ait formé un tableau contenant toutes les combinaisons des m lettres n à n avec

répétition, et comptons le nombre des lettres écrites dans le tableau ; chaque combinaison contient n lettres, différentes ou non ; le nombre des combinaisons étant représenté par D_m^n, le nombre total des lettres écrites dans le tableau est $n \times D_m^n$; les m lettres y entrant toutes le même nombre de fois, l'une d'elles, par exemple la lettre a, y entrè un nombre de fois marqué par $\frac{n \times D_m^n}{m}$. Mais on peut trouver ce nombre d'une autre manière ; mettons à part les combinaisons qui contiennent la lettre a, et de chacune d'elles ôtons la lettre a une fois, il nous restera évidemment les combinaisons des m lettres $n-1$ à $n-1$ avec répétition, combinaisons dont le nombre est D_m^{n-1} ; en vertu du raisonnement précédent, la lettre a entre dans ces combinaisons un nombre de fois marqué par $\frac{(n-1) \times D_m^{n-1}}{m}$; si l'on ajoute maintenant à chacune d'elles la lettre a supprimée, pour rétablir les combinaisons primitives, on voit que la lettre a entrera dans le tableau un nombre de fois marqué par

$$\frac{(n-1) \times D_m^{n-1}}{m} + D_m^{n-1}, \quad \text{ou} \quad \frac{(m+n-1) \times D_m^{n-1}}{m}.$$

On a donc

$$\frac{n \times D_m^n}{m} = \frac{(m+n-1) \times D_m^{n-1}}{m},$$

ou

$$D_m^n = D_m^{n-1} \times \frac{m+n-1}{n}.$$

On en déduit, en donnant successivement à n les valeurs 2, 3,...., n,

$$D_m^2 = D_m^1 \times \frac{m+1}{2} = \frac{m}{1} \times \frac{m+1}{2},$$

$$D_m^3 = D_m^2 \times \frac{m+2}{3},$$

$$D_m^4 = D_m^3 \times \frac{m+3}{4},$$

. . . .

. . . .

$$D_m^n = D_m^{n-1} \times \frac{m+n-1}{n}.$$

Si l'on multiplie toutes ces égalités entre elles, les facteurs intermédiaires disparaissent, et l'on obtient la formule

$$(4) \qquad D_m^n = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots\ldots n}.$$

Dans les combinaisons ordinaires, dont le nombre est désigné par C_m^n, le nombre n des lettres qui entrent dans chaque combinaison ne peut surpasser le nombre m des lettres données. Mais, quand on répète une même lettre autant de fois qu'on le veut, rien n'empèche que n soit plus grand que m.

Puissance d'un polynôme.

44. Proposons-nous actuellement d'effectuer le développement de la puissance d'un polynôme,

$$(a+b+c\ldots\ldots+k)^m,$$

c'est-à dire d'effectuer le produit de m polynômes égaux entre eux. On sait que le produit de plusieurs polynômes est

la somme des produits que l'on obtient en prenant un terme dans chacun d'eux, de toutes les manières possibles. Si nous prenons la lettre a dans α facteurs, la lettre b dans β autres, la lettre c dans γ autres, etc., nous aurons un terme de la forme

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots;$$

la somme des exposants, ou le degré du terme, est constamment égale à m. Il est évident que l'on obtient plusieurs fois ce même terme, autant de fois que l'on peut former d'arrangements avec α lettres égales à a, β lettres égales à b, γ égales à c, etc.; car à chacun de ces arrangements correspond une manière particulière d'obtenir le terme $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots$; en réunissant ces termes égaux, on aura

$$\frac{P_m}{P_\alpha P_\beta P_\gamma \ldots\ldots} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots$$

Le développement peut donc être représenté par la formule

$$(5) \quad (a+b+c\ldots\ldots+k)^m = \sum \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta P_\gamma \ldots\ldots} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots,$$

le signe Σ indiquant une somme de termes de la même forme.

Toutefois, si l'un des exposants α, β, γ, ... devient égal à zéro, il faut convenir que le symbole P_0, qui n'a aucun sens par lui-même, sera remplacé par l'unité. Supposons, par exemple, $\alpha = 0$; on prend la lettre b dans β facteurs, la lettre c dans γ facteurs, etc.; le terme $b^\beta c^\gamma \ldots\ldots$, dans lequel la somme $\beta+\gamma+\ldots\ldots$ des exposants est égale à m, est répété un nombre de fois marqué par le nombre des permutations

que l'on peut former avec β lettres b, γ lettres c,.....; ce nombre est $\frac{P_m}{P_\beta P_\gamma \ldots}$; la formule générale conviendra, si l'on remplace P_α ou P_0 par l'unité.

45. Il est facile de trouver le nombre des termes du développement. Désignons par p le nombre des termes du polynôme que l'on élève à la m^e puissance. Chaque terme du développement, abstraction faite du coefficient, est de la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, ou

$$aaa\ldots bb\ldots cc\ldots;$$

il contient m lettres en tout; c'est une combinaison m à m des p lettres $a, b, c, \ldots, k$, avec répétition; le nombre des termes du développement est donc égal au nombre des combinaisons de p lettres m à m avec répétition, c'est-à-dire à

$$(6) \qquad D_p^m = \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+m-1)}{1.2.3\ldots m}.$$

Ce nombre est égal au nombre des combinaisons de $p+m-1$ lettres m à m sans répétition; mais on sait que $C_{p+m-1}^m = C_{p+m-1}^{p-1}$; on aura donc

$$(7) \qquad D_p^m = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}{1.2\ldots(p-1)}.$$

On appliquera l'une ou l'autre de ces formules suivant les cas.

46. Considérons en particulier le carré $(a+b+c+\ldots)^2$ d'un polynôme, ou le produit

$$(a+b+c+\ldots)\times(a+b+c+\ldots)$$

de deux polynômes égaux. Si l'on prend la même lettre a

dans les deux polynômes, on a le terme a^2 ; comme on ne peut obtenir ce terme que de cette manière, son coefficient est l'unité. Si l'on prend une lettre a dans l'un des polynômes, et une autre lettre b dans l'autre, on a le terme ab ; il est évident que ce terme peut être obtenu de deux manières, soit qu'on prenne la lettre a dans le premier polynôme et la lettre b dans le second, ou la lettre a dans le second et la lettre b dans le premier ; ces deux manières correspondent aux deux arrangements ab et ba ; le coefficient de ce terme sera donc égal à 2, et l'on aura $2ab$. On conclut de là que *le carré d'un polynôme est égal à la somme des carrés de tous ses termes, plus deux fois la somme des produits des termes deux à deux.*

Considérons encore le cube $(a+b+c+\ldots\ldots)^3$ d'un polynôme. D'après la formule générale (5), le développement contiendra trois sortes de termes : 1° des termes de la forme a^3 ayant pour coefficients l'unité ; 2° des termes de la forme a^2b ayant pour coefficients $\frac{P_3}{P_2P_1}$ ou 3 ; 3° des termes de la forme abc, ayant pour coefficients $\frac{P_3}{P_1P_1P_1}$ ou 6. On en conclut que *le cube d'un polynôme est égal à la somme des cubes de ses différents termes, plus trois fois la somme des produits que l'on obtient en multipliant le carré d'un terme quelconque par un autre terme, plus six fois la somme des produits des termes trois à trois.*

Si l'on appliquait la formule générale (5) au développement de la puissance d'un binôme, on aurait

$$(a+b)^m = \sum \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta} a^\alpha b^\beta.$$

Cette formule est la même que celle trouvée précédemment (n° 34), puisque $\alpha+\beta=m$, et que (n° 30)

$$\frac{P_m}{P_\alpha P_{m-\alpha}}=C_m^\alpha=C_m^{m-\alpha}$$

Racine d'un polynôme.

47. Proposons-nous d'abord d'extraire la racine carrée d'un polynôme entier P, ordonné suivant les puissances décroissantes d'une lettre x; nous supposerons qu'il existe un polynôme entier qui, élevé au carré, reproduise exactement le polynôme proposé. Représentons par les lettres a, b, c..... les différents termes de ce polynôme racine, ordonné aussi suivant les puissances décroissantes de x. Nous aurons

$$\begin{aligned}P&=(a+b+c+\ldots\ldots)^2\\&=a^2+2a(b+c+\ldots\ldots)+(b+c+\ldots\ldots)^2.\end{aligned}$$

Le terme a^2, étant d'un degré plus élevé que tous les autres termes du développement, et ne se réduisant par conséquent avec aucun autre, est égal au premier terme du polynôme P; on obtiendra donc le premier terme a de la racine, en extrayant la racine carrée du premier terme du polynôme proposé. Si du polynôme on retranche le carré du premier terme de la racine, et si l'on appelle R le reste, il vient

$$R=2a(b+c+\ldots\ldots)+(b+c+\ldots\ldots)^2.$$

Dans le second membre, la première partie est d'un degré plus élevé que la seconde; or le premier terme de cette première partie est $2ab$; ce terme $2ab$, étant ainsi d'un degré plus élevé que tous les autres, est égal au premier terme du

polynôme reste R; on obtiendra donc le second terme b de la racine en divisant le premier terme du reste R par $2a$, c'est-à-dire par le double du premier terme de la racine.

Si l'on groupe maintenant les deux premiers termes de la racine, qui sont connus, on a

$$\begin{aligned} P &= [(a+b)+(c+d+\ldots\ldots)]^2 \\ &= (a+b)^2+2(a+b)(c+d+\ldots\ldots)+(c+d+\ldots\ldots)^2. \end{aligned}$$

En retranchant du polynôme proposé le carré de la somme des deux premiers termes de la racine et appelant R′ le nouveau reste, on a

$$R' = 2(a+b)(c+d+\ldots\ldots)+(c+d+\ldots\ldots)^2.$$

Dans le second membre, la première partie est d'un degré plus élevé que la seconde, et le premier terme de cette première partie est $2ac$; le terme $2ac$, étant ainsi d'un degré plus élevé que tous les autres, est égal au premier terme du polynôme R′; on obtiendra donc le troisième terme c de la racine en divisant le premier terme du second reste R′ par $2a$, c'est-à-dire par le double du premier terme de la racine.

Si l'on groupe actuellement les trois premiers termes de la racine, qui sont connus, on a

$$\begin{aligned} P &= [(a+b+c)+(d+e+\ldots\ldots)]^2 \\ &= (a+b+c)^2+2(a+b+c)(d+e+\ldots)+(d+e+\ldots)^2. \end{aligned}$$

Retranchons du polynôme proposé le carré de la somme des trois premiers termes de la racine, et appelons R″ le nouveau reste, nous aurons

$$R'' = 2(a+b+c)(d+e+\ldots\ldots)+(d+e+\ldots\ldots)^2.$$

Le premier terme de ce reste est égal à $2ad$; si on le divise par $2a$, on obtiendra le quatrième terme d de la racine.

On continuera de cette manière jusqu'à ce qu'on arrive au dernier terme de la racine, tel qu'on l'obtient directement. Car le même raisonnement s'applique lorsque le polynôme est ordonné par rapport aux puissances croissantes de x ; on obtiendra donc immédiatement le dernier terme en extrayant la racine carrée du dernier terme du polynôme proposé. Si l'opération conduit à ce dernier terme, et si le reste suivant est nul, on en conclut que le polynôme proposé est carré parfait. Il est clair qu'on peut changer les signes de tous les termes de la racine, ce qui ne change pas le carré.

On peut simplifier un peu le calcul des restes, comme on le fait en arithmétique. Quand on a trouvé les deux premiers termes de la racine, il faut, du polynôme proposé, retrancher $(a+b)^2$, c'est-à-dire $a^2+2ab+b^2$; comme on a déjà retranché a^2, il suffit de retrancher du reste la quantité $2ab+b^2$ ou $(2a+b)b$. De même, quand on a trouvé le troisième terme c, il faut, du polynôme proposé, retrancher $(a+b+c)^2$, c'est-à-dire $(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$; comme on a déjà retranché $(a+b)^2$, il suffit de retrancher du second reste R′ la quantité $2(a+b)c+c^2$ ou $(2a+2b+c)c$. En général, quand on aura trouvé un nouveau terme de la racine, à la droite du double de la partie précédemment obtenue, on écrira ce nouveau terme, on multipliera par ce terme, et l'on retranchera le produit du reste précédent.

Considérons, par exemple, le polynôme

$$25x^6-70x^5+89x^4-86x^3+58x^2-24x+9.$$

Pour que ce polynôme soit le carré d'un polynôme entier, il faut d'abord que le premier et le dernier termes soient des carrés parfaits ; c'est ce qui a lieu ici. Si le polynôme racine

existe, son premier terme sera $5x^3$, son dernier terme ± 3. En effectuant l'opération comme nous l'avons dit, on arrive au dernier terme -3, et à un reste nul. La racine cherchée est $5x^3-7x^2+4x-3$.

$$
\begin{array}{r|l}
25x^6-70x^5+89x^4-86x^3+58x^2-24x+9 & \underline{5x^3-7x^2+4x-3} \\
\underline{+70x^5-49x^4} & 10x^3-7x^2 \\
+40x^4-86x^3+58x^2-24x-9 & 10x^3-14x^2+4x \\
\underline{-40x^4+56x^3-16x^2} & 10x^3-14x^2+8x-3 \\
-30x^3+42x^2-24x+9 & \\
\underline{+30x^3-42x^2+24x-9} & \\
0 &
\end{array}
$$

48. On suivra une marche analogue pour l'extraction de la racine m^e d'un polynôme. Supposons toujours le polynôme P ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, et appelons encore a, b, c,..... les différents termes de la racine. On a

$$
\begin{aligned}
P&=(a+b+c+\ldots\ldots)^m \\
&=a^m+ma^{m-1}(b+c+\ldots)+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}(b+c+\ldots)^2+\ldots
\end{aligned}
$$

Le premier terme du polynôme proposé est égal à a^m; en extrayant la racine m^e de ce premier terme, on obtiendra le premier terme de la racine. Si du polynôme on retranche a^m, on a

$$
R=ma^{m-1}(b+c+\ldots)+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}(b+c+\ldots)^2+\ldots;
$$

le premier terme du reste R est égal à $ma^{m-1}b$; en divisant ce premier terme par ma^{m-1}, on obtiendra le second terme b de la racine. Considérons maintenant l'expression

$$
\begin{aligned}
P&=[(a+b)+(c+d+\ldots\ldots)]^m \\
&=(a+b)^m+m(a+b)^{m-1}(c+d+\ldots\ldots)+\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

et retranchons $(a+b)^m$, nous aurons un reste

$$R' = m(a+b)^{m-1}(c+d+\ldots\ldots)+\ldots\ldots,$$

dont le premier terme est $ma^{m-1}c$; en divisant ce premier terme par ma^{m-1}, on obtiendra le troisième terme c de la racine, et ainsi de suite.

Somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.

49. Considérons une progression arithmétique

$$\div a.\, b.\, c.\, \ldots\ldots\, h.\, k,$$

formée de n termes; appelons r la raison et désignons par S_m la somme des m^{es} puissances de tous les termes. On a, d'après la formule du binôme,

$$(a+r)^{m+1} = a^{m+1} + \frac{m+1}{1} a^m r + \frac{(m+1)m}{1.2} a^{m-1} r^2 \ldots\ldots + \frac{m+1}{1} a r^m + r^{m+1},$$

$$(b+r)^{m+1} = b^{m+1} + \frac{m+1}{1} b^m r + \frac{(m+1)m}{1.2} b^{m-1} r^2 \ldots\ldots + \frac{m+1}{1} b r^m + r^{m+1},$$

$$(c+r)^{m+1} = c^{m+1} + \frac{m+1}{1} c^m r + \frac{(m+1)m}{1.2} c^{m-1} r^2 \ldots\ldots + \frac{m+1}{1} c r^m + r^{m+1},$$

. . . .

. . . .

$$(h+r)^{m+1} = h^{m+1} + \frac{m+1}{1} h^m r + \frac{(m+1)m}{1.2} h^{m-1} r^2 \ldots\ldots + \frac{m+1}{1} h r^m + r^{m+1},$$

$$(k+r)^{m+1} = k^{m+1} + \frac{m+1}{1} k^m r + \frac{(m+1)m}{1.2} k^{m-1} r^2 \ldots\ldots + \frac{m+1}{1} k r^m + r^{m+1}.$$

Ajoutons ces n égalités membre à membre; supprimons les termes égaux $(a+r)^{m+1}$ et b^{m+1}, $(b+r)^{m+1}$ et c^{m+1}, ...,

$(h+r)^{m+1}$ et k^{m+1}, qui se trouvent dans les deux membres, puis remplaçons $k+r$ par $a+nr$; nous aurons

$$(3)\quad (a+nr)^{m+1}=a^{m+1}+\frac{m+1}{1}r\mathrm{S}_m+\frac{(m+1)m}{1.2}r^2\mathrm{S}_{m-1}+\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{m+1}{1}r^m\mathrm{S}_1+nr^{m+1}.$$

En faisant $m=1$, on retrouve la somme connue S_1 des termes de la progression. En faisant $m=2$, on obtient S_2 au moyen de S_1. En faisant $m=3$, on obtient S_3 au moyen de S_1 et S_2, et ainsi de suite.

Par exemple, si l'on demande la somme des puissances semblables des n premiers nombres entiers, on fera $a=1$, $r=1$ dans la relation (3), et, en procédant comme nous l'avons dit, on trouvera successivement

$$\mathrm{S}_1=\frac{n(n+1)}{2},\quad \mathrm{S}_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3},\quad \mathrm{S}_3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,\ldots\ldots$$

Exercices.

1° De combien de manières peut-on partager en triangles par des diagonales un polynôme convexe de n côtés?

2° Étant donnés dans un plan n points, quel est le nombre des points d'intersection des droites qui passent par ces points deux à deux?

3° Trouver le nombre des boulets sphériques formant une pyramide à base carrée ou triangulaire, ou une pile à base rectangle?

4° Trouver le plus grand terme du développement de $(a+b)^m$, ou de $(a+b+c\ldots)^m$ et déterminer les limites des exposants de a, b, ..., dans ce terme, quand m augmente indéfiniment.

CHAPITRE IV.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS.

50. Considérons les permutations des n premiers nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

c'est-à-dire les différents arrangements que l'on peut former avec ces n nombres en les plaçant les uns à côté des autres sur une ligne droite (n° 27). Lorsque dans un arrangement deux nombres sont tels que celui qui est placé le premier est plus grand que l'autre, on dit que ces deux nombres présentent une *inversion*. Nous distinguerons les arrangements en deux classes, suivant que le nombre total des inversions que renferme chacun d'eux est pair ou impair; nous dirons que les arrangements qui renferment un nombre pair d'inversions sont de la première classe, et que ceux qui en renferment un nombre impair sont de la seconde classe.

Par exemple, avec les trois nombres 1, 2, 3, on peut former six arrangements

$$\begin{array}{ccc} 1\,2\,3, & 2\,3\,1, & 3\,1\,2, \\ 2\,1\,3, & 1\,3\,2, & 3\,2\,1. \end{array}$$

Le premier ne présente pas d'inversion; le second en présente deux, savoir : (2,1) et (3,1); le troisième en présente aussi deux, savoir : (3,1) et (3,2). Le quatrième n'en a qu'une, ainsi que le cinquième; mais le sixième en a trois, savoir : (3,2), (3,1), (2,1). Ainsi les trois premiers arran-

gements sont de la première classe; les trois derniers de la seconde classe.

Nous allons démontrer que, lorsque dans un arrangement on permute deux nombres α et β, l'arrangement change de classe. Nous pouvons représenter l'arrangement par

$$A\alpha\, B\beta\, C,$$

en désignant par A la partie qui précède α, par B celle qui est interposée entre α et β, et par C celle qui suit β. Quand on permute les deux nombres α et β, on a le nouvel arrangement

$$A\beta\, B\alpha\, C.$$

Nous remarquons d'abord que, dans les deux arrangements, les éléments de A, comparés entre eux et avec les suivants, présentent un même nombre d'inversions, et que les éléments de C, comparés entre eux et avec les précédents, présentent aussi un même nombre d'inversions; on peut donc faire abstraction de ces deux parties, et se borner à considérer les deux arrangements $\alpha B\beta$, $\beta B\alpha$.

Les inversions que présentent les éléments de B entre eux étant les mêmes de part et d'autre, il n'y a pas lieu de s'en occuper. Supposons α plus petit que β; appelons m le nombre des éléments de B; parmi ces éléments, il y en a p inférieurs à α et q supérieurs à β.

Examinons le premier arrangement : les éléments de B, comparés à α donnent p inversions, comparés à β ils en donnent q; d'ailleurs les deux nombres α et β ne présentent pas d'inversion; le premier arrangement renferme donc $p+q$ inversions, sans compter celles que forment entre eux les éléments de B. Examinons maintenant le second arran-

gement; puisque dans B il y a $m-q$ éléments inférieurs à β et $m-p$ supérieurs à α, les éléments de B, comparés à β, donnent $m-q$ inversions, comparés à α ils en donnent $m-p$; d'ailleurs les deux nombres β et α présentent une inversion; le second arrangement renferme donc $2m-p-q+1$ inversions, sans compter celles de B. La différence entre les nombres d'inversions que renferment les deux arrangements est égale à $\pm(2m-2p-2q+1)$; c'est un nombre impair; d'où l'on conclut que les deux arrangements sont de classes différentes.

Le nombre des arrangements, étant égal au produit des n premiers nombres, est pair. Il y en a autant d'une classe que de l'autre; car aux arrangements de l'une des classes on peut faire correspondre ceux de l'autre qui s'en déduisent par la permutation de deux nombres désignés α et β. Ainsi, dans l'exemple précédent, des trois arrangements de la première classe on déduit ceux de la seconde par la permutation des deux nombres 1 et 2.

51. Cela posé, considérons le tableau des n^2 quantités

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots\ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \ldots\ldots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \ldots\ldots & a_3^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \ldots\ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

caractérisées par deux indices, marquant, l'un la ligne horizontale, l'autre la colonne verticale, dans laquelle est situé l'élément; formons le produit

$$a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 \ldots\ldots a_n^n$$

des éléments placés sur la diagonale du carré; concevons

ensuite que, laissant fixes les indices inférieurs, on permute dans ce produit les indices supérieurs de toutes les manières possibles, et que l'on affecte chacun des produits ainsi obtenus du signe + ou du signe —, suivant que l'arrangement des indices supérieurs est de la première ou de la seconde classe; la somme algébrique de tous ces produits est ce qu'on appelle le *déterminant* des n^2 quantités. On indique le déterminant en comprenant entre deux traits verticaux le tableau des n^2 quantités.

Le nombre des termes du déterminant est égal au nombre des arrangements des n valeurs de l'indice supérieur. Comme on peut amener ces indices à des places quelconques en permutant plusieurs fois successivement deux indices, et que, quand on permute deux indices, la classe de l'arrangement change, on pourra former tous les termes du déterminant à l'aide du premier terme que nous avons écrit plus haut, en permutant plusieurs fois successivement deux des indices supérieurs et changeant le signe à chaque permutation. On a, par exemple :

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1,$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 a_1^3 \\ a_2^1 a_2^2 a_2^3 \\ a_3^1 a_3^2 a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 - a_1^3 a_2^2 a_3^1.$$

52. D'après la loi de formation du déterminant, chaque terme contient un élément de chacune des lignes horizontales, et un de chacune des colonnes verticales. Les termes du déterminant sont donc les différents produits que

l'on obtient en prenant un élément dans chaque ligne et dans chaque colonne, de toutes les manières possibles. Nous avons défini le signe de chaque terme en supposant les facteurs écrits dans un ordre tel que les indices inférieurs soient rangés dans l'ordre des nombres croissants $1, 2, 3, \ldots, n$; leur arrangement, ne présentant pas d'inversion, doit être regardé comme de la première classe. Il est aisé de reconnaître que, si l'on change l'ordre des facteurs, chaque terme est affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que l'arrangement des indices inférieurs et celui des indices supérieurs sont de la même classe ou de classes différentes. Car la permutation de deux facteurs changeant la classe de l'un et l'autre arrangements, les deux arrangements restent de la même classe s'ils étaient primitivement de la même classe, de classes différentes s'ils étaient de classes différentes.

Supposons que dans chaque terme on dispose les facteurs dans un ordre tel que les indices supérieurs soient rangés dans l'ordre des nombres croissants; leur arrangement, ne présentant pas d'inversion, est de la première classe; en vertu de ce qui précède, chaque terme sera affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que l'arrangement des indices inférieurs est de la première ou de la seconde classe. Il en résulte que l'on peut former le déterminant à l'aide du premier terme, en permutant, non les indices supérieurs, mais les inférieurs, et affectant chacun des produits ainsi obtenus du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que l'arrangement des indices inférieurs est de la première ou de la seconde classe.

53. Théorème I. *Lorsqu'on remplace chaque ligne hori-*

zontale par la ligne verticale de même rang, le déterminant ne change pas.

Je dis que l'on a identiquement

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots\ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \ldots\ldots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \ldots\ldots & a_3^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \ldots\ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots\ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots\ldots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \ldots\ldots & a_n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \ldots\ldots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Nous avons dit que les termes d'un déterminant sont les produits que l'on peut former en prenant un élément dans chaque ligne et dans chaque colonne; il est évident que ces produits sont les mêmes dans les deux déterminants. Il faut affecter chaque produit du signe + ou du signe —, suivant que les arrangements des deux séries d'indices, marquant les uns les rangs de lignes, les autres les rangs des colonnes, sont de la même classe ou de classes différentes; l'arrangement qui, dans l'un des déterminants, se rapporte aux lignes, se rapporte aux colonnes dans l'autre, et réciproquement; les deux arrangements étant les mêmes de part et d'autre, le signe est le même. Ainsi les deux déterminants sont identiques.

54. Théorème II. *Lorsqu'on permute deux lignes parallèles, le déterminant change de signe.*

Supposons que l'on permute les lignes verticales de rangs α et β. Un terme du premier déterminant est de la forme $\pm Aa_p^\alpha Ba_q^\beta C$; à ce terme en correspond un autre $\mp Aa_p^\beta Ba_q^\alpha C$; ces deux termes deviennent $\pm Aa_p^\beta Ba_q^\alpha C$, $\mp Aa_p^\alpha Ba_q^\beta C$ dans le second déterminant. Ainsi les deux déterminants sont égaux et de signes contraires.

55. Théorème III. *Lorsque deux lignes parallèles sont égales, le déterminant est nul.*

Supposons que les éléments des lignes verticales de rangs α et β soient respectivement égaux; nous avons vu qu'à un terme $\pm \mathrm{A} a_p^\alpha \mathrm{B} a_q^\beta \mathrm{C}$ du déterminant en correspond un autre $\mp \mathrm{A} a_p^\beta \mathrm{B} a_q^\alpha \mathrm{C}$; les éléments a_p^α et a_p^β étant égaux, ainsi que a_q^α et a_q^β, ces deux termes sont égaux et de signes contraires, et le déterminant est identiquement nul.

56. *Ordonner un déterminant suivant les éléments d'une même ligne.* Le déterminant est une fonction homogène et du premier degré des éléments d'une même ligne. Ainsi, chaque terme du déterminant renferme un élément de la première ligne horizontale et un seul; si l'on groupe les termes qui contiennent l'élément a_1^1, ceux qui contiennent l'élément a_1^2, et ainsi de suite, le déterminant se mettra sous la forme

$$\Delta = \mathrm{A}_1^1 a_1^1 + \mathrm{A}_1^2 a_1^2 + \mathrm{A}_1^3 a_1^3 + \ldots\ldots + \mathrm{A}_1^n a_1^n,$$

les quantités $\mathrm{A}_1^1, \mathrm{A}_1^2, \ldots\ldots, \mathrm{A}_1^n$ ne contenant aucun élément de cette première ligne. Désignons, d'une manière générale, par $\mathrm{A}_\alpha^\beta a_\alpha^\beta$ la somme des termes du déterminant qui renferment l'élément a_α^β, et remarquons que la quantité A_α^β ne renferme aucun élément appartenant à la α^e ligne ou à la β^e colonne. Nous aurons, en ordonnant par rapport aux éléments de la α^e ligne,

$$\Delta = \mathrm{A}_\alpha^1 a_\alpha^1 + \mathrm{A}_\alpha^2 a_\alpha^2 + \ldots\ldots + \mathrm{A}_\alpha^n a_\alpha^n,$$

et, par rapport aux éléments de la β^e colonne,

$$\Delta = \mathrm{A}_1^\beta a_1^\beta + \mathrm{A}_2^\beta a_2^\beta + \ldots\ldots + \mathrm{A}_n^\beta a_n^\beta.$$

Il est facile de former les quantités A_α^β. Représentons par

Δ_α^β le déterminant *mineur* que l'on obtient en supprimant du tableau la α^e ligne et la β^e colonne. Il est clair que la quantité A_1^1 est égale au déterminant mineur

$$\Delta_1^1 = \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 & \ldots\ldots & a_2^n \\ a_3^2 & a_3^3 & \ldots\ldots & a_3^n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n^2 & a_n^3 & \ldots\ldots & a_n^n \end{vmatrix};$$

car, pour avoir le groupe des termes renfermant l'élément a_1^1, il suffit de prendre le premier terme $a_1^1\, a_2^2 \ldots\ldots a_n^n$, et, mettant à part l'élément a_1^1, de permuter dans la partie $a_2^2\, a_3^3 \ldots$ $\ldots a_n^n$ les indices supérieurs deux à deux, ce qui revient à former le déterminant mineur Δ_1^1.

Concevons maintenant que l'on permute les deux premières colonnes, afin d'amener l'élément a_1^2 au sommet du tableau, à la place occupée primitivement par a_1^1; le groupe des termes qui dans le nouveau déterminant renferment l'élément a_1^2 sera $\Delta_1^2\, a_1^2$; le déterminant total ayant changé de signe, on aura $A_1^2 = -\Delta_1^2$. On amènera la troisième colonne au premier rang, en la permutant d'abord avec la seconde, puis avec la première; le signe ayant changé deux fois, s'est rétabli, ce qui donne $A_1^3 = \Delta_1^3$. On aura de même $A_1^4 = -\Delta_1^4$, et ainsi de suite.

En général, proposons-nous de trouver le groupe des termes qui renferment l'élément a_α^β. On amènera la α^e ligne au premier rang par $\alpha - 1$ permutations de deux lignes successives, puis la β^e colonne au premier rang par $\beta - 1$ permutations de deux colonnes successives, ce qui fait $\alpha + \beta - 2$ changements de signe; l'élément a_α sera alors placé au sommet du tableau, et l'on aura $A_\alpha^\beta = (-1)^{\alpha+\beta}\, \Delta_\alpha^\beta$.

On a, par exemple :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) - a_2 (b_1 c_3 - c_1 b_3) + a_3 (b_1 c_2 - c_1 b_2).$$

COROLLAIRE. *On multiplie un déterminant par un nombre en multipliant par ce nombre tous les éléments d'une même ligne.*

Supposons le déterminant ordonné suivant les éléments de la première ligne horizontale et mis sous la forme

$$\Delta = A_1^1 a_1^1 + A_1^2 a_1^2 + \ldots\ldots + A_1^n a_1^n;$$

en multipliant les deux membres par un nombre p, on a

$$p\Delta = A_1^1 p a_1^1 + A_1^2 p a_1^2 + \ldots\ldots + A_1^n p_1^n;$$

c'est un nouveau déterminant que l'on déduit du premier en remplaçant les éléments de la première ligne par

$$pa_1^1 \ , \ pa_1^2 \ , \ \ldots\ldots \ , \ pa_1^n.$$

On a, par exemple,

$$p \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 & pb_1 & pc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 & b_1 & c_1 \\ pa_2 & b_2 & c_2 \\ pa_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

57. THÉORÈME IV. *La somme de deux déterminants de même ordre, qui ne diffèrent que par les éléments d'une même ligne, est un nouveau déterminant que l'on obtient en ajoutant ces éléments deux à deux.*

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 \ , & a_1^2 \ , & a_1^3, & \ldots\ldots & a_1^n \\ a_2 + b_2 \ , & a_2^2 \ , & a_2^3. & \ldots\ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n + b_n \ , & a_n^2 \ , & a_n^3, & \ldots\ldots & a_n^n \end{vmatrix},$$

ordonné par rapport aux éléments de la première colonne, est

$$\Delta = A_1^1(a_1+b_1) + A_2^1(a_2+b_2) + \ldots\ldots + A_n^1(a_n+b_n),$$

ou

$$\Delta = A_1^1 a_1 + A_2^1 a_2 + \ldots\ldots + A_n^1 a_n$$
$$+ A_1^1 b_1 + A_2^1 b_2 + \ldots\ldots + A_n^1 b_n;$$

il est égal à la somme des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 & \ldots\ldots & a_1^n \\ a_2 & a_2^2 & \ldots\ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_n^2 & \ldots\ldots & a_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1^2 & \ldots\ldots & a_1^n \\ b_2 & a_2^2 & \ldots\ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_n^2 & \ldots\ldots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

58. THÉORÈME V. *La valeur d'un déterminant ne change pas, lorsqu'on remplace une ligne par les résultats que l'on obtient en ajoutant aux éléments de cette ligne les éléments correspondants d'une autre ligne parallèle multipliés par un même nombre.*

Par exemple, si aux éléments de la première colonne on ajoute ceux de la seconde multipliés par p, on a

$$\begin{vmatrix} a_1^1+pa_1^2, & a_1^2, & \ldots\ldots & a_1^n \\ a_2^1+pa_2^2, & a_2^2, & \ldots\ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1+pa_n^2, & a_n^2, & \ldots\ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots\ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots\ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots\ldots & a_n^n \end{vmatrix} + p\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^2 & \ldots\ldots & a_1^n \\ a_2^2 & a_2^2 & \ldots\ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^2 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix};$$

le dernier déterminant étant nul (n° 55), les deux premiers sont égaux entre eux.

On peut généraliser le théorème précédent : la valeur d'un déterminant ne change pas, lorsqu'on remplace les éléments d'une ligne, horizontale ou verticale, par les résultats que l'on obtient en ajoutant aux éléments de cette ligne ceux de plusieurs autres lignes, après qu'on a multiplié les éléments de chacune de celles-ci par un nombre arbitraire.

Résolution d'un système d'équations du premier degré.

59. Nous commencerons par rappeler un principe général que nous avons démontré dans la première partie de l'algèbre (livre II, ch. I). Étant donné un système de n équations

$$(1) \qquad X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \ldots\ldots, X_n = 0,$$

à n inconnues, l'équation

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \cdots\cdots + A_n X_n = 0,$$

que l'on obtient en ajoutant ces équations membre a membre, après les avoir multipliées par des quantités constantes $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$, peut remplacer l'une de celles des équations proposées qui ont été multipliées par des quantités différentes de zéro, c'est-à-dire que l'équation nouvelle, avec les $n-1$ autres équations, forme un système équivalent au système proposé. Supposons, par exemple, que la quantité A_1 soit différente de zéro, je dis que le système proposé est équivalent au système des n équations

$$(2)\quad X_2 = 0, \ldots, X_n = 0, A_1 X_1 + A_2 X_2 + \cdots + A_n X_n = 0.$$

En effet, tout système de valeurs des inconnues qui satisfont aux équations (1), annulant les expressions $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$, satisfont aux équations (2). Réciproquement, tout système de valeurs des inconnues qui satisfont aux équations (2), annulant X_2, X_n, et la somme $A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots\ldots + A_n X_n$, annulent $A_1 X_1$ et par suite X_1, puisque la quantité constante A_1 est différente de zéro, et par conséquent satisfont aux équations (1).

60. Cela posé, considérons un système de n équations du premier degré à n inconnues $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$. Nous pouvons le représenter par

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots\cdots + a_1^n x_n = k_1, \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots\cdots + a_2^n x_n = k_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \cdots\cdots + a_n^n x_n = k_n. \end{array} \right.$$

Appelons Δ le déterminant des n^2 coefficients des incon-

nues, savoir :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots\ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots\ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots\ldots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Supposons que ce déterminant soit différent de zéro. Comme il est égal à une fonction homogène et du premier degré des éléments d'une ligne horizontale ou d'une colonne verticale, l'un au moins des n déterminants mineurs correspondants sera différent de zéro. Concevons-le ordonné par rapport à la première colonne, et soit

$$\Delta = A_1^1 a_1^1 + A_2^1 a_2^1 + \ldots\ldots + A_n^1 a_n^1.$$

Ajoutons les équations proposées membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par $A_1^1, A_2^1, \ldots\ldots, A_n^1$; le coefficient de x_1 dans la nouvelle équation sera égal au déterminant Δ; celui de x_2 sera

$$A_1^1 a_1^2 + A_2^1 a_2^2 + \ldots\ldots + A_n^1 a_n^2;$$

c'est le déterminant dans lequel la première colonne est égale à la seconde, il est donc nul; il en est de même des suivants; l'équation résultante se réduit donc à

$$(4) \qquad \Delta x_1 = A_1^1 k_1 + A_2^1 k_2 + \ldots\ldots + A_n^1 k_n.$$

Si les équations proposées admettent une solution, la valeur de x_1, devant satisfaire à l'équation (4), est

$$(5) \qquad x_1 = \frac{A_1^1 k_1 + A_2^1 k_2 + \ldots\ldots + A_n^1 k_n}{\Delta}.$$

On verra de même que la valeur de x_2 est

$$(6) \qquad x_2 = \frac{A_1^2 k_1 + A_2^2 k_2 + \ldots\ldots + A_n^2 k_n}{\Delta},$$

et ainsi de suite. Toutes ces fractions ont même dénomina-

teur Δ. Le numérateur relatif à chacune des inconnues est le déterminant que l'on obtient, lorsqu'on remplace les coefficients de l'inconnue par les seconds membres des équations proposées.

61. Nous allons démontrer maintenant que les valeurs des inconnues données par les formules (5), (6), ..., satisfont bien aux équations proposées. Pour cela, nous substituerons ces valeurs dans les équations (3); le premier membre de la première équation devient

$$\frac{1}{\Delta}\left\{\begin{array}{l} (A_1^1 a_1^1 + A_1^2 a_1^2 + \cdots\cdots + A_1^n a_1^n) k_1 \\ +(A_2^1 a_1^1 + A_2^2 a_1^2 + \cdots\cdots + A_2^n a_1^n) k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +(A_n^1 a_1^1 + A_n^2 a_1^2 + \cdots\cdots + A_n^n a_1^n) k_n \end{array}\right\}.$$

Dans le polynôme placé entre parenthèses, le coefficient de k_1 est le déterminant Δ ordonné par rapport aux éléments de la première ligne horizontale. Le coefficient de k_2 est le déterminant ordonné par rapport aux éléments de la seconde ligne, et dans lequel on remplace la seconde ligne par la première; il est donc nul; il en est de même des coefficients suivants. Le premier membre se réduit donc à k_1 et l'équation est vérifiée. On verra de même que les autres équations sont vérifiées. On conclut de là que, lorsque le déterminant est différent de zéro, les équations proposées admettent une solution et une seule.

62. Examinons maintenant le cas où le déterminant Δ est nul, sans que les n^2 déterminants mineurs le soient tous à la fois. Si le déterminant mineur Δ_1^1 est différent de zéro, on obtient un système de n équations équivalent au système proposé, en remplaçant par l'équation (4) la première des équations (3), dont les deux membres ont été multipliés par

la quantité Δ_1^1 différente de zéro. Lorsque le second membre de l'équation (4) est différent de zéro, cette équation n'admettant aucune solution, il y a impossibilité de satisfaire au second système, et par conséquent au premier. Lorsque ce second membre est nul, l'équation (4) devenant une identité, le système proposé se réduit à un système de $n-1$ équations à n inconnues. On peut donner à x_1 une valeur arbitraire; puisque le déterminant Δ_1^1 n'est pas nul, à chaque valeur de x_1 correspond un système de valeurs déterminées de $x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$.

Si tous les déterminants mineurs du premier ordre étaient nuls, on considérerait ceux du second ordre, qui résultent de la suppression de deux lignes et de deux colonnes; nous les désignerons par $\Delta_{\alpha,\alpha'}^{\beta,\beta'}$, α et α' étant les rangs des lignes, β et β' ceux des colonnes supprimées. Supposons le déterminant du second ordre $\Delta_{1,2}^{1,2}$ différent de zéro. En ordonnant les déterminants du premier ordre Δ_1^1, Δ_1^2 par rapport aux éléments de la première colonne, on a

$$\Delta_1^1 = \Delta_{1,2}^{1,2} a_2^2 - \Delta_{1,3}^{1,2} a_3^2 + \Delta_{1,4}^{1,2} a_4^2 - \ldots + (-1)^n \Delta_{1,n}^{1,2} a_n^2,$$
$$\Delta_1^2 = \Delta_{1,2}^{2,1} a_2^1 - \Delta_{1,3}^{2,1} a_3^1 + \Delta_{1,4}^{2,1} a_4^1 - \ldots + (-1)^n \Delta_{1,n}^{2,1} a_n^1,$$

les déterminants mineurs du second ordre étant les mêmes de part et d'autre. En remplaçant la première colonne par l'une des suivantes, on a des résultats nuls,

$$0 = \Delta_{1,2}^{1,2} a_2^3 - \Delta_{1,3}^{1,2} a_3^3 + \Delta_{1,4}^{1,2} a_4^3 - \ldots\ldots,$$
$$0 = \Delta_{1,2}^{1,2} a_2^4 - \Delta_{1,3}^{1,2} a_3^4 + \Delta_{1,4}^{1,2} a_4^4 - \ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = \Delta_{1,2}^{1,2} a_2^n - \Delta_{1,3}^{1,2} a_3^n + \Delta_{1,4}^{1,2} a_4^n - \ldots\ldots$$

Si maintenant on ajoute membre à membre la seconde des

équations proposées, et les $n-2$ dernières, après les avoir multipliées respectivement par

$$\Delta^{1,2}_{1,2}\,,\ -\Delta^{1,2}_{1,3}\,,\ +\Delta^{1,2}_{1,4}\,,\ \ldots\ldots,\ (-1)^n\Delta^{1,2}_{1,n},$$

on obtient l'équation

$$(7)\qquad \Delta^2_1 x_1 + \Delta^1_1 x_2 = \Delta^{1,2}_{1,2} k_2 - \Delta^{1,2}_{1,3} k_3 + \Delta^{1,2}_{1,4} k_4 - \ldots,$$

qui peut remplacer la seconde, dont les deux membres ont été multipliés par une quantité différente de zéro. En combinant de même la première équation avec les $n-2$ dernières, on obtient l'équation

$$(8)\qquad \Delta^2_2 x_1 + \Delta^1_2 x_2 = \Delta^{1,2}_{2,1} k_1 - \Delta^{1,2}_{2,3} k_3 + \Delta^{1,2}_{2,4} k_4 - \ldots,$$

qui remplacera la première. Les premiers membres de ces deux équations (7) et (8) étant nuls, si l'un des seconds membres est différent de zéro, il y a impossibilité; si les deux seconds membres sont égaux à zéro, ces équations devenant des identités, le système proposé se réduit aux $n-2$ dernières équations; on pourra attribuer à x_1 et x_2 des valeurs arbitraires; le déterminant $\Delta^{1,2}_{1,2}$ étant différent de zéro, on en déduira des valeurs correspondantes pour $x_3, x_4, \ldots, x_n$.

On continuera de cette manière jusqu'à ce qu'on arrive à un déterminant mineur différent de zéro. Soit p l'ordre de ce déterminant; on peut supposer les termes dans chaque équation et les équations elles-mêmes, mis dans un ordre tel que ce déterminant résulte de la suppression des p premières lignes et des p premières colonnes. Pour abréger, nous désignerons par σ la suite des p premiers indices $1, 2, 3, \ldots, p$, et par $\overset{\sigma}{\underset{\alpha}{-}}$ ou $\overset{\sigma}{\underset{\beta}{-}}$ cette même suite dont on retranche un indice α ou β. En ordonnant un déterminant

mineur d'ordre $p - 1$ par rapport aux éléments de la première colonne, on a

$$\Delta^{\overset{\sigma}{\bar\beta}}_{\underset{\alpha}{\bar\sigma}} = \Delta^{\sigma}_{\sigma} a^{\beta}_{\alpha} - \Delta^{\sigma}_{\underset{\alpha}{\bar\sigma},p+1} a^{\beta}_{p+1} + \Delta^{\sigma}_{\underset{\alpha}{\bar\sigma},p+2} a^{\beta}_{p+2} - \cdots;$$

en remplaçant la première colonne par l'une des suivantes, on a des résultats nuls. Si l'on ajoute membre à membre l'une des p premières équations, celle de rang α, avec les $n - p$ dernières, après les avoir multipliées respectivement par les déterminants mineurs d'ordre p qui entrent dans la relation précédente, on obtient l'équation

$$(9)\quad \Delta^{\overset{\sigma}{\bar 1}}_{\underset{\alpha}{\bar\sigma}} x_1 + \Delta^{\overset{\sigma}{\bar 2}}_{\underset{\alpha}{\bar\sigma}} x_2 + \ldots + \Delta^{\overset{\sigma}{\bar p}}_{\underset{\alpha}{\bar\sigma}} x_p = \Delta^{\sigma}_{\sigma} k_\alpha - \Delta^{\sigma}_{\underset{\alpha}{\bar\sigma},p+1} k_{p+1} + \ldots,$$

qui remplacera l'équation de rang α. Les p premières équations seront ainsi remplacées par p équations de la forme (9). Les premiers membres étant nuls, si l'un des seconds membres est différent de zéro, il y a impossibilité. Si les p seconds membres sont nuls, les p équations (9) devenant des identités, le système proposé se réduit aux $n - p$ dernières équations; on pourra attribuer aux p premières inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ des valeurs arbitraires; le déterminant Δ^{σ}_{σ} d'ordre p étant différent de zéro, on en déduira des valeurs correspondantes pour les $n - p$ autres inconnues $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$.

On conclut de ce qui précède que, toutes les fois que le déterminant principal Δ est égal à zéro, il y a impossibilité, ou indétermination d'un ordre marqué par celui du premier déterminant mineur différent de zéro.

LIVRE III.

SÉRIES.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES SERIES.

63. On appelle *série*, en mathématique, une suite indéfinie de quantités qui se déduisent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités sont les *termes* de la série.

Lorsque la somme des n premiers termes de la série tend vers une limite finie et déterminée, quand on prend un nombre de termes de plus en plus grand, on dit que la série est *convergente*. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est *divergente*.

Nous désignerons les termes successifs d'une série par

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots\ldots$$

et nous appellerons S_n la somme des n premiers termes. La série est convergente, lorsque cette somme

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n-1}$$

tend vers une limite finie S, quand n augmente indéfiniment.

Il importe de bien préciser la définition des séries convergentes. Quand on dit que la somme des n premiers termes de la série tend vers une limite finie et déterminée S, cela signifie que l'on peut prendre n assez grand pour que la somme S_n, et chacune des sommes suivantes S_{n+1}, S_{n+2},....., diffère de la limite S d'une quantité moindre qu'une quantité donnée, si petite qu'elle soit.

La progression géométrique, prolongée à l'infini, nous donne un premier exemple de série. Soit a le premier terme, r la raison; la série s'écrit

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ .\ .\ .\ .\ .$$

La loi de formation de la série est très-simple; on déduit chaque terme du précédent en le multipliant par un nombre constant r.

Quand la raison r, en valeur absolue, est plus grande que l'unité, les termes de la série vont en augmentant indéfiniment; il est clair que, dans ce cas, la somme des termes ne peut tendre vers une limite déterminée; la série est divergente.

Quand la raison, en valeur absolue, est plus petite que l'unité, les termes de la série diminuent indéfiniment, de manière à devenir plus petits que toute quantité donnée. Nous avons trouvé pour la somme des n premiers termes (Ire partie, livre IV, chap. II),

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

Si l'on prend un nombre de termes de plus en plus grand, la valeur absolue de la quantité $\frac{ar^n}{1-r}$ devenant plus petite

que toute quantité donnée, la somme des termes tend vers une limite finie et déterminée

$$S=\frac{a}{1-r}.$$

Ainsi, dans ce cas, la série est convergente; cette limite $\frac{a}{1-r}$ est ce que l'on appelle la somme des termes de la série.

Lorsque la raison r est positive, ainsi que le premier terme a, tous les termes étant positifs, la somme des termes va constamment en augmentant, à mesure qu'on en prend un nombre plus grand, et elle se rapproche de plus en plus de la limite S. Quand la raison est négative, la somme est alternativement plus grande et plus petite que la limite S; elle s'en rapproche aussi de plus en plus, mais en oscillant de part et d'autre.

64. *Une première condition nécessaire pour qu'une série soit convergente, est que ses termes tendent vers zéro.* Nous ferons voir, en effet, que, dans toute série convergente, on peut prendre n assez grand pour que le terme u_n et chacun des termes suivants u_{n+1}, u_{n+2},....., soit plus petit qu'une quantité donnée α, si petite qu'elle soit. Puisque la série est convergente, on peut prendre n assez grand pour que chacune des sommes

$$S_n,\ S_{n+1},\ S_{n+2},\ \ldots\ldots$$

diffère de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$. Les deux sommes S_n et S_{n+1}, différant de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$, diffèrent entre elles d'une quantité moindre

que α; mais la différence de ces deux sommes est le terme u_n de la série; on en conclut que la valeur absolue de ce terme u_n est plus petite que α. De même les deux sommes S_{n+1} et S_{n+2}, différant de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$, leur différence, c'est-à-dire la valeur absolue du terme u_{n+1} de la série, est moindre que α, et ainsi de suite. Ainsi la valeur absolue de chacun des termes

$$u_n,\ u_{n+1},\ u_{n+2},\ \ldots\ldots$$

est moindre que la quantité donnée α, ce qu'on exprime en disant que les termes de la série tendent vers zéro.

C'est ce qui a lieu dans la progression géometrique décroissante; ses termes deviennent en effet plus petits que toute quantité donnée.

65. Mais cette condition n'est pas suffisante; les termes d'une série peuvent tendre vers zéro sans que la série soit convergente. Un exemple très-simple mettra cette proposition en évidence. Considérons la série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots,$$

formée de fractions ayant pour numérateurs l'unité, et pour dénominateurs les nombres entiers consécutifs; le terme général $\frac{1}{n}$ tend vers zéro, et cependant la série est divergente.

Prenons, en effet, le troisième et le quatrième termes

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4},$$

et remplaçons $\frac{1}{3}$ par la quantité plus petite $\frac{1}{4}$, nous aurons

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4},$$

et plus simplement

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}.$$

Prenons maintenant les quatre termes suivants

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8},$$

et remplaçons chacun des trois premiers par la quantité plus petite $\frac{1}{8}$, nous aurons

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

En prenant de même les huit termes suivants, et remplaçant chacun d'eux par $\frac{1}{16}$, on aura

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots\cdots+\frac{1}{16}>\frac{8}{16}=\frac{1}{2},$$

et ainsi de suite indéfiniment. Nous formerons ainsi une infinité de groupes dont chacun a une valeur plus grande que $\frac{1}{2}$; donc la somme des termes augmente au delà de toute limite, et par conséquent la série est divergente.

66. ***Remarque.*** Quand nous disons que les termes d'une série convergente tendent vers zéro, cela ne signifie pas qu'ils diminuent constamment, de manière que chacun

d'eux soit plus petit que le précédent. Écrivons, par exemple, la progression décroissante

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots$$

dans l'ordre suivant

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots,$$

la série reste évidemment convergente; les termes tendent vers zéro, mais avec des alternatives de croissance et de décroissance.

Après ces considérations préliminaires, nous étudierons successivement deux sortes de séries, celles dont tous les termes sont positifs, et celles dont les termes sont, les uns positifs, les autres négatifs.

Séries dont tous les termes sont positifs.

61. THÉORÈME I. *Une série dont les termes sont positifs, et dont la somme des* n *premiers termes conserve une valeur finie, quand* n *augmente indéfiniment, est convergente.*

On dit qu'une grandeur variable conserve une valeur finie, lorsqu'elle reste constamment inférieure à une grandeur déterminée A. Puisque les termes de la série proposée sont tous positifs, la somme des n premiers termes va en augmentant à mesure que n augmente. Si elle reste moindre que la quantité fixe A, la somme croissante tend évidemment vers une certaine limite qu'elle ne peut dépasser; cette limite est la plus petite des quantités auxquelles la somme variable reste constamment inférieure. Donc la série est convergente.

68. *Remarque*. Ce théorème doit être borné aux séries dont tous les termes sont positifs; lorsque les termes sont affectés de signes différents, de ce que la somme conserve une valeur finie, on ne peut plus conclure la convergence de la série. Soit, par exemple, la série

$$1-1+1-1+\ldots\ldots;$$

si l'on prend un nombre de termes de plus en plus grand, la somme est alternativement 1 et 0; quoique restant finie, elle ne tend pas vers une limite déterminée, et la série est divergente.

Ceci fait voir qu'une série peut être divergente de deux manières; soit que la somme des n premiers termes augmente à l'infini, soit que la somme, conservant une valeur finie, ne tende pas vers une limite déterminée. Dans les séries dont tous les termes sont positifs, le premier mode de divergence se présente seul, puisque la série est convergente toutes les fois que la somme reste finie; mais, dans les séries dont les termes sont affectés de signes différents, les deux modes de divergence peuvent se présenter.

69. THÉORÈME II. *Lorsqu'une série a tous ses termes positifs et respectivement moindres que les termes correspondants d'une série convergente, dont tous les termes sont positifs, cette série est aussi convergente.*

Appelons S la limite de la somme des termes de la seconde série, qui est supposée convergente. Il est clair que la somme des n premiers termes de la première série est moindre que la somme des n premiers termes de la seconde série, et par conséquent moindre que la quantité finie et déterminée S. On

en conclut, en vertu du théorème précédent, que la première série est convergente.

Ce théorème nous indique le moyen que l'on emploie pour reconnaître si une série est convergente ; on compare la série proposée à une autre déjà connue et que l'on sait être convergente. La progression géométrique décroissante étant la seule série convergente que nous connaissions jusqu'à présent, c'est aux progressions géométriques que nous comparerons les séries.

70. THÉORÈME III. *Lorsqu'à partir d'un certain rang le rapport d'un terme au précédent est constamment égal ou inférieur à un nombre déterminé plus petit que l'unité, la série est convergente.*

Supposons qu'à partir du terme de rang n le rapport d'un terme au précédent reste constamment égal ou inférieur à un nombre déterminé k plus petit que l'unité ; je dis que la série est convergente. Faisons abstraction des n premiers termes dont la somme a une valeur finie et déterminée, et considérons la série

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots$$

formée par les termes suivants. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k,$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < k,$$

$$\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < k,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

De la première inégalité on déduit

$$u_{n+1} < ku_n.$$

La seconde donne

$$u_{n+2} < ku_{n+1},$$

et, si l'on remplace le terme u_{n+1} par la quantité plus grande ku_n, on a *à fortiori*

$$u_{n+2} < k^2 u_n.$$

On déduit de même de la troisième

$$u_{n+3} < ku_{n+2},$$

et, en remplaçant u_{n+2} par la quantité plus grande $k^2 u_n$,

$$u_{n+3} < k^3 u_n,$$

et ainsi de suite.

Il résulte de là que les termes de la série

$$(1) \qquad u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots$$

sont respectivement moindres que les termes correspondants de la progression géométrique décroissante

$$(2) \qquad u_n + ku_n + k^2 u_n + \cdots\cdots$$

dont la raison k est inférieure à l'unité. En vertu du théorème précédent, on en conclut que la série est convergente.

Soit, par exemple la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots\cdots$$

Le rapport du second terme au premier est $\frac{1}{2}$, du troisième au second $\frac{1}{3}$, du quatrième au troisième $\frac{1}{4}$, et ainsi de suite ;

ce rapport étant constamment égal ou inférieur à $\frac{1}{2}$, la série est convergente.

Quand on prend les n premiers termes de la série proposée et qu'on néglige les suivants, l'erreur commise, ou la limite de la somme des termes de la série (1) est moindre que la limite de la somme des termes de la progression (2), c'est-à-dire moindre que $\frac{u_n}{1-k}$.

71. *Corollaire.* On facilite beaucoup l'application de ce théorème par les considérations suivantes. Ordinairement le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ d'un terme au précédent tend vers une limite déterminée, que nous désignerons par λ, lorsque n augmente indéfiniment. Il y a trois cas à distinguer, suivant que cette limite λ du rapport est inférieure, supérieure, ou égale à l'unité.

1° $\lambda < 1$. Choisissons un nombre arbitraire, mais déterminé k, compris entre 1 et λ, c'est-à-dire plus petit que l'unité, mais plus grand que λ. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, se rapprochant indéfiniment de sa limite λ, restera, à partir d'un certain rang, constamment inférieur au nombre k; donc, en vertu du théorème précédent, la série est convergente.

2° $\lambda > 1$. Choisissons un nombre arbitraire k entre 1 et λ. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, se rapprochant indéfiniment de sa limite λ, restera, à partir d'un certain rang, constamment supérieur à k, et l'on aura

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > k, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} > k, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} > k, \quad \ldots\ldots$$

On en déduit

$$u_{n+1} > ku_n,\quad u_{n+2} > k^2u_n,\quad u_{n+3} > k^3u_n,\ \ldots\ldots$$

Les termes de la série, étant plus grands que les termes d'une progression géométrique croissante, augmentent à l'infini. Donc la série est divergente.

3° $\lambda = 1$. Quand le rapport d'un terme au précédent tend vers une limite égale à l'unité, il y a ambiguïté : la série est tantôt convergente, tantôt divergente. Le théorème précédent est insuffisant pour décider la convergence de la série ; il faut alors recourir à des moyens particuliers.

Exemples.

1° Soit la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots,$$

dont le terme de rang $n+1$ est

$$\frac{x^n}{1.2.3.\ldots.n};$$

le rapport de ce terme au précédent est

$$\frac{x}{n};$$

ce rapport a pour limite zéro, quand n augmente indéfiniment; donc la série est convergente, quelle que soit la valeur de x.

Quand la valeur de x est plus grande que l'unité, les termes commencent par augmenter; mais, à partir d'un certain rang plus ou moins éloigné, ils vont en diminuant. Par exemple, si $x = 10 + \frac{1}{2}$, les termes augmentent jusqu'au

onzième terme ; mais au delà, le rapport devenant plus petit que l'unité, les termes diminuent. A partir du vingt et unième terme, les termes décroissent plus rapidement que les termes d'une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{2}$.

2° Considérons la série

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdot$$

qui a pour terme général

$$\frac{x^n}{n}.$$

Le rapport de ce terme au précédent est

$$\frac{n-1}{n}x \quad \text{ou} \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)x,$$

et a pour limite x, quand n augmente indéfiniment. Ainsi, la série est convergente, quand la valeur de x est plus petite que l'unité; divergente, quand elle est plus grande que l'unité.

Quand $x=1$, on a la série divergente étudiée au n° 65.

3° Soit la série

$$1+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\frac{1}{4^\mu}+\cdots\cdot$$

Le rapport d'un terme au précédent

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu=\left(1-\frac{1}{n}\right)^\mu$$

a pour limite l'unité, et la convergence reste indécise. Lorsque l'exposant μ est plus grand que l'unité, on peut démontrer aisément que la série est convergente, en groupant les termes d'une manière analogue à celle que nous avons em-

ployée dans l'exemple du n° 65. Prenons d'abord le second et le troisième termes, et remplaçons le troisième $\frac{1}{3^\mu}$ par une quantité plus grande $\frac{1}{2^\mu}$, nous aurons

$$\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}<\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{2^\mu}=\frac{2}{2^\mu}=\frac{1}{2^{\mu-1}}.$$

Formons un second groupe avec les quatre termes suivants et remplaçons chacun par le premier d'entre eux, nous aurons de même

$$\frac{1}{4^\mu}+\frac{1}{5^\mu}+\frac{1}{6^\mu}+\frac{1}{7^\mu}<\frac{4}{4^\mu}=\frac{1}{4^{\mu-1}}.$$

On formera le troisième groupe avec les huit termes suivants, en remplaçant chacun par le premier d'entre eux, ce qui donne

$$\frac{1}{8^\mu}+\frac{1}{9^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{15^\mu}<\frac{8}{8^\mu}=\frac{1}{8^{\mu-1}},$$

et ainsi de suite indéfiniment. On voit par là que la somme des termes de la série est plus petite que la somme des termes de la progression géométrique décroissante

$$1+\frac{1}{2^{\mu-1}}+\frac{1}{4^{\mu-1}}+\frac{1}{8^{\mu-1}}+\cdots\cdots,$$

dont la raison est $\frac{1}{2^{\mu-1}}$. Donc la série est convergente.

Lorsque l'exposant μ est plus petit que l'unité, les termes de la série sont respectivement plus grands que les termes de la série divergente

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots;$$

la somme des n premiers termes de cette série augmentant au delà de toute limite, il en est de même de la somme des n premiers termes de la série proposée; donc la série est divergente.

72. *Remarques.* Le rapport d'un terme au précédent ne tend pas toujours vers une limite déterminée. Considérons, par exemple, la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2^2.3}+\frac{1}{2^2.3^2}+\frac{1}{2^3.3^2}+\frac{1}{2^3.3^3}+\ldots\ldots;$$

le rapport d'un terme au précédent est ici alternativement $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$; il ne tend pas vers une limite déterminée; mais comme il reste égal ou inférieur au nombre constant $\frac{1}{2}$, qui est plus petit que l'unité, la série est convergente.

Il n'est pas nécessaire pour la convergence des séries qu'à partir d'un certain rang le rapport d'un terme au précédent reste constamment inférieur à un nombre fixe plus petit que l'unité. Prenons, comme exemple, la progression décroissante

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\ldots,$$

dont nous permutons les termes deux à deux, ce qui donne la série

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots$$

Le rapport d'un terme au précédent est ici alternativement 2 et $\frac{1}{8}$; ce rapport ne reste pas, à partir d'un certain rang,

inférieur à une quantité moindre que l'unité, et cependant la série est convergente.

73. Théorème IV. *Lorsqu'à partir d'un certain rang l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ a une valeur constamment égale ou inférieure à un nombre déterminé plus petit que l'unité, la série est convergente.*

Supposons qu'à partir d'un certain rang l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ reste constamment égale ou inférieure à un nombre déterminé k plus petit que l'unité, on aura

$$\sqrt[n]{u_n} < k,$$

et par suite

$$u_n < k^n.$$

Les termes de la série sont respectivement moindres que les termes de la progression géométrique décroissante

$$k^n + k^{n+1} + k^{n+2} + \dots\dots$$

et, par conséquent, la série est convergente.

74. *Corollaire.* On applique ce théorème comme le précédent. Ordinairement l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite déterminée λ, quand n augmente indéfiniment. Si la limite λ est inférieure à l'unité, la série est convergente ; si elle est supérieure à l'unité, la série est divergente ; si elle est égale à l'unité, il y a ambiguïté.

Il est aisé de reconnaître que les limites des deux expressions $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ sont égales. Appelons en effet λ et λ_1 ces

deux limites et supposons λ plus petit que λ_1. Si l'on considère la série

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots\cdots$$

les limites pour cette série seront λx et $\lambda_1 x$; en vertu des théorèmes précédents, la série sera convergente pour toutes les valeurs de x inférieures à $\frac{1}{\lambda}$ et divergente pour toutes les valeurs de x supérieures à $\frac{1}{\lambda_1}$; elle serait en même temps convergente et divergente pour les valeurs de x comprises entre $\frac{1}{\lambda_1}$ et $\frac{1}{\lambda}$. Il faut donc que les deux quantités λ et λ_1 soient égales.

Séries dont les termes sont affectés de signes différents.

75. THÉORÈME V. *Lorsqu'une série, dont tous les termes sont positifs, est convergente, si l'on affecte les termes de signes quelconques, la série reste convergente.*

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des séries dont tous les termes sont positifs. Quand les termes sont affectés de signes différents, on examine si la série que l'on obtient en prenant tous les termes positivement est convergente; alors on peut affirmer que la série proposée est aussi convergente.

Parmi les n premiers termes de la série proposée, les uns sont positifs, les autres négatifs; appelons P_n la somme des termes positifs, Q_n celle des termes négatifs; la somme des n premiers termes de la série proposée est

$$S_n = P_n - Q_n.$$

Considérons la série formée des mêmes termes que la précédente, mais tous affectés du signe +; la somme des n premiers termes de cette seconde série est

$$S'_n = P_n + Q_n.$$

Cette seconde série étant convergente et ayant tous ses termes positifs, la somme S'_n tend vers une limite S' en croissant. Les quantités P_n et Q_n sont moindres que la quantité déterminée S'; comme elles sont formées de termes positifs, elles vont en croissant constamment, à mesure que n augmente; donc elles tendent respectivement vers des limites P et Q. Leur différence $S_n = P_n - Q_n$ tend vers une limite égale à $P - Q$, et par conséquent la série proposée est convergente.

Corollaire. Le théorème III peut être étendu aux séries dont les termes sont affectés de signes quelconques. Si, à partir d'un certain rang, la valeur absolue du rapport d'un terme au précédent reste constamment inférieure à un nombre déterminé moindre que l'unité, la série est convergente. Nous savons, en effet, que, dans ce cas, la série formée de tous les termes pris positivement est convergente; donc la série proposée est elle-même convergente.

Séries à termes alternativement positifs et négatifs.

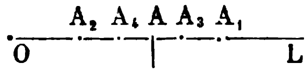
76. Théorème VI. *Lorsque les termes d'une série sont alternativement positifs et négatifs, décroissent indéfiniment et tendent vers zéro, la série est convergente.*

Parmi les séries dont les termes sont affectés de signes différents, il faut remarquer en particulier celles dont les

termes sont alternativement positifs et négatifs. Soit

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

une série de cette sorte ; lorsque les termes tendent vers zéro et en outre diminuent continuellement, de manière que chacun soit plus petit que le précédent, on peut affirmer la convergence de la série.



Sur une droite OL, à partir d'un point fixe O, portons, dans un certain sens, une longueur OA_1 égale au premier terme u_1 de la série. A partir du point A_1, portons ensuite sur la même droite, mais en sens inverse, une longueur A_1A_2 égale au second terme u_2 de la série ; ce second terme étant plus petit que le premier, le point A_2 sera situé entre les points A_1 et O. A partir du point A_2 portons, dans le sens direct, une longueur A_2A_3 égale au troisième terme u_3 de la série ; ce terme étant plus petit que u_2, le point A_3 tombera entre les points A_2 et A_1. A partir du point A_3 portons, en sens inverse, une longueur A_3A_4 égale au quatrième terme u_4 de la série ; ce terme étant plus petit que u_3, le point A_4 tombera entre les points A_3 et A_2, et ainsi de suite. Les longueurs OA_1, OA_2, OA_3, OA_4,...., comptées à partir du point O, représentent les sommes successives S_1, S_2, S_3, S_4,.... Il est évident que les sommes S_2, S_4,....., formées d'un nombre pair de termes, et qui sont figurées par les longueurs OA_2, OA_4,..., vont en croissant, tandis que les sommes S_1, S_3,...., formées d'un nombre impair de termes, et qui sont figurées par les longueurs OA_1, OA_3,...., vont en décroissant. D'ailleurs, l'une quelconque des premières sommes est plus petite que l'une quelconque des secondes.

Puisque les premières sommes $S_2, S_4, \ldots$, vont en augmentant et restent inférieures à l'une quelconque des secondes, par exemple à S_1, elles tendent vers une limite. Puisque les secondes sommes $S_1, S_3, \ldots$, vont en diminuant et restent supérieures à l'une quelconque des premières, par exemple à S_2, elles tendent aussi vers une limite.

La différence entre deux sommes consécutives S_n et S_{n+1}, ou le terme u_{n+1} de la série, devenant aussi petite qu'on veut, on en conclut que les deux limites sont les mêmes; donc la série est convergente.

Les sommes successives, formées d'un nombre de termes de plus en plus grand, sont alternativement trop grandes et trop petites; elles tendent vers la limite commune OA, en oscillant en quelque sorte de part et d'autre. Cette limite S étant toujours comprise entre deux sommes consécutives S_n et S_{n+1}, la différence entre la somme S_n et la limite S est moindre que la différence entre les deux sommes consécutives S_n et S_{n+1}, c'est-à-dire moindre que le terme u_{n+1}. Ainsi, quand on prend les n premiers termes de la série, l'erreur commise est moindre que le terme suivant u_{n+1}; la limite de la somme des termes négligés est une fraction de ce terme $\pm u_{n+1}$ et a même signe que lui.

Exemples.

1° La série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots$$

dont les signes sont alternés, et dont les termes diminuent

indéfiniment, et tendent vers zéro, est convergente. Les sommes

$$1$$

$$1-\frac{1}{2}=0,5$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=0,8333$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=0,5833$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

sont alternativement trop grandes et trop petites. Mais la série converge très-lentement; car, si l'on prend les dix premiers termes, l'erreur étant moindre que le terme suivant ou que $\frac{1}{11}$, on n'a qu'un chiffre décimal exact; si l'on prend les cent premiers termes, on a une approximation de $\frac{1}{101}$, ou deux chiffres exacts, etc.

Nous avons vu (n° 75) que, lorsque les termes d'une série sont affectés de signes différents, si la série que l'on obtient en prenant tous les termes positivement est convergente, la série proposée est aussi convergente. Mais cette condition n'est pas nécessaire. Ainsi la série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdot$$

est convergente, tandis que la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots,$$

formée des mêmes termes pris positivement, n'est pas convergente (n° 65).

2° La série

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\cdots\cdots$$

converge beaucoup plus rapidement.

Si l'on prend les dix premiers termes, l'erreur commise étant moindre que le terme suivant

$$\frac{1}{1.2.....12} = 0,0000000003,$$

on a la somme par défaut avec huit décimales exactes.

Théorème général.

77. Tous les théorèmes que nous avons démontrés sur la convergence des séries sont compris dans un théorème général qu'il est bon de connaître.

THÉORÈME VII. *Pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire et il suffit que l'on puisse rendre* n *assez grand pour que la somme d'un nombre quelconque de termes, à la suite des* n *premiers, soit moindre qu'une quantité donnée.*

Soit la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Nous avons désigné par S_n la somme des n premiers termes,

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + u_{n-1};$$

prenons à la suite un nombre quelconque m de termes et appelons s leur somme

$$s = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + u_{n+m-1};$$

en ajoutant cette somme s à la première somme S_n, nous obtiendrons la somme S_{n+m} des $n+m$ premiers termes de la série. Or, si la série est convergente, on peut prendre n assez grand pour que la somme S_n et la somme S_{n+m} diffèrent de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$, et par consé-

quent diffèrent entre elles d une quantité moindre que α; la somme s des m termes pris à la suite des n premiers est donc moindre que α, et cela est vrai si grand que soit m. Ainsi, dans une série convergente, on peut prendre n assez grand pour qu'un nombre quelconque de termes, pris à la suite des n premiers, ait une somme moindre qu'une quantité donnée, si petite qu'elle soit.

La réciproque est vraie : lorsque cette condition est remplie, la série est convergente. En effet, prenons n tel que la somme d'un nombre quelconque de termes à la suite des n premiers soit moindre que α en valeur absolue ; il est clair que toutes les sommes

$$S_{n+1},\ S_{n+2},\ S_{n+3},\ \ldots\ldots,$$

qui se composent des n premiers termes, plus un, deux, trois,.... termes à la suite, seront comprises entre $S_n - \alpha$ et $S_n + \alpha$. Prenons maintenant un nombre plus grand n', tel que la somme d'un nombre quelconque de termes à la suite des n' premiers soit moindre que la quantité α' plus petite que α; les sommes

$$S_{n'+1},\ S_{n'+2},\ S_{n'+3},\ \ldots\ldots$$

seront de même comprises entre $S_{n'} - \alpha'$ et $S_{n'} + \alpha'$. En général, la quantité $S_{n'} - \alpha'$ sera plus grande que $S_n - \alpha$, la quantité $S_{n'} + \alpha'$ plus petite que $S_n + \alpha$, et l'on aura ainsi resserré l'intervalle qui comprend toutes les sommes suivantes. On pourra encore le resserrer davantage et autant qu'on voudra, ce qui montre bien clairement l'existence de la limite vers laquelle tend la somme des termes de la série.

Il pourrait arriver cependant que la quantité $S_{n'} + \alpha'$ fût plus grande que $S_n + \alpha$; mais, comme on sait que les sommes $S_{n'+1}$, $S_{n'+2}$,..... sont plus petites que $S_n + \alpha$, on conserverait cette dernière quantité et l'on dirait que les sommes sont comprises entre $S_{n'} - \alpha'$ et $S_n + \alpha$. Il pourrait arriver de même que la quantité $S_{n'} - \alpha'$ fût plus petite que $S_n - \alpha$; dans ce cas, on dirait que les sommes sont comprises entre $S_n - \alpha$ et $S_{n'} + \alpha'$. Dans tous les cas, on aura formé, dans le premier intervalle 2α, un second intervalle $2\alpha'$ plus petit que le premier et comprenant toutes les sommes suivantes. Dans le second, on en formera un troisième encore plus petit, et ainsi de suite, ce qui conduit nécessairement à une limite.

CHAPITRE II.

DU NOMBRE *e*.

78. Considérons la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots\cdot$$

Les deux premiers termes donnent une somme égale à 2. Les termes suivants sont respectivement moindres que les termes de la progression géométrique

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots,$$

que l'on obtient en remplaçant chacun des facteurs 3, 4, 5,....., par un facteur plus petit 2, ce qui augmente les fractions; ainsi, d'après le théorème II, la série est convergente, et la somme des n premiers termes, abstraction faite des

deux premiers, tend vers une limite moindre que la limite de la somme des termes de la progression, c'est-à-dire moindre que l'unité. La somme totale tend donc vers une limite comprise entre 2 et 3.

Cette limite est un nombre incommensurable. Supposons, en effet, qu'elle soit égale à une fraction ordinaire $\frac{m}{n}$, on aurait

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots\cdots$$

Si nous écrivons d'abord les $n+1$ premiers termes, et si nous mettons les suivants sous la forme

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\cdots\right],$$

nous aurons

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \cdots\cdots + \frac{1}{1.2\ldots\ldots n}$$

$$+ \frac{1}{1.2\ldots\ldots n}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\cdots\right].$$

Multiplions ensuite tous les termes de l'égalité par le produit $1.2.3\ldots\ldots n$, le premier membre devient un nombre entier $1.2.3\ldots\ldots(n-1)m$; les $n+1$ premiers termes du second membre deviennent aussi des nombres entiers, dont, pour abréger, nous désignerons la somme par N; on obtient de la sorte l'égalité

$$1.2\ldots\ldots(n-1)m = \text{N} + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\cdots\right].$$

La quantité entre parenthèses est une fraction moindre que l'unité; car ses termes sont respectivement moindres que ceux de la progression

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots\cdots,$$

que l'on obtient en remplaçant chacun des facteurs $n+2$, $n+3$,..., par le facteur plus petit $n+1$, ce qui augmente les fractions; la limite de la somme des termes de cette progression étant $\frac{1}{n}$, la quantité entre parenthèses est moindre que $\frac{1}{n}$; c'est donc une fraction proprement dite. On aurait donc, dans l'égalité précédente, un nombre entier égal à un nombre fractionnaire, ce qui est impossible. Ainsi, la limite vers laquelle tend la somme des termes de la série proposée est un nombre incommensurable compris entre 2 et 3. Ce nombre joue un grand rôle en mathématiques; on le désigne par la lettre e.

79. Appelons R le reste de la série, ou l'erreur commise quand on prend les $n+1$ premiers termes,

$$R=\frac{1}{1.2\ldots\ldots n}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots\right];$$

la quantité entre parenthèses étant moindre que $\frac{1}{n}$, d'après ce qui vient d'être dit, on a

$$R<\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n}.$$

Ainsi, quand on prend $n+1$ termes, l'erreur commise est moindre que la n^e partie du dernier terme calculé.

Voici le calcul de e avec sept chiffres décimaux.

$$
\begin{array}{rl}
 & 2 \\
\dfrac{1}{1.2} = & 0,5 \\
\dfrac{1}{1.2.3} = & 0,1666\ 6667 \\
\dfrac{1}{1.2.3.4} = & 0,0416\ 6667 \\
\dfrac{1}{1.2\ldots\ldots 5} = & 0,0083\ 3333 \\
\dfrac{1}{1.2\ldots\ldots 6} = & 0,0013\ 8889 \\
\dfrac{1}{1.2\ldots\ldots 7} = & 0,0001\ 9841 \\
\dfrac{1}{1.2\ldots\ldots 8} = & 0,0000\ 2480 \\
\dfrac{1}{1.2\ldots\ldots 9} = & 0,0000\ 0276 \\
\dfrac{1}{1.2\ldots\ldots 10} = & 0,0000\ 0028 \\
\dfrac{1}{1.2\ldots\ldots 11} = & 0,0000\ 0003 \\
\hline
 & 2,7182\ 8184
\end{array}
$$

Les termes se déduisent les uns des autres par divisions successives. Nous avons pris les douze premiers termes; les trois premiers sont exacts, et nous avons calculé les autres avec huit décimales, par défaut ou par excès, de manière que l'erreur commise sur chacun d'eux soit moindre qu'une demi-unité du huitième ordre décimal; six ont été calculées par excès, trois par défaut. D'ailleurs la somme des termes

négligés est moindre que la 11e partie du dernier terme calculé, et par conséquent moindre aussi qu'une demi-unité du huitième ordre décimal. Pour corriger la somme obtenue, il faudrait donc la diminuer d'une quantité plus petite que 3 unités du huitième ordre décimal, et l'augmenter d'une quantité plus petite que 2 unités du même ordre, ce qui donne

$$e > 2,7182\,8181$$
$$e < 2,7182\,8186;$$

On a ainsi, par défaut, avec sept décimales exactes,

$$e = 2,7182\,818.$$

Remarques.

80. Remarque I. *La limite de la somme d'un nombre fini de grandeurs variables est égale à la somme de leurs limites.*

Considérons m grandeurs variables A, B, C, . . . , L, qui tendent simultanément vers les limites a, b, c, . . . , l. Si l'on appelle α, β, γ, . . . , λ les différences des grandeurs proposées à leurs limites, on a

$$\begin{aligned} A &= a + \alpha, \\ B &= b + \beta, \\ C &= c + \gamma, \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ L &= l + \lambda. \end{aligned}$$

En additionnant ces égalités et désignant par S la somme des grandeurs variables et par s celle des limites, il vient

$$S = s + (\alpha + \beta + \gamma + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \lambda).$$

Appelons p la plus grande des différences α, β,....., λ en valeur absolue ; leur somme sera moindre que mp. Or le nombre m restant fini, et la quantité p devenant plus petite que toute quantité donnée, puisque toutes les différences tendent vers zéro, le produit mp deviendra aussi plus petit que toute quantité donnée; donc la somme S tend vers la limite s.

REMARQUE II. *La limite du produit d'un nombre fini de facteurs variables est égale au produit de leurs limites.*

En conservant les mêmes notations que précédemment, on a

$$\begin{aligned} A-a&=\alpha,\\ B-b&=\beta,\\ C-c&=\gamma,\\ &\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\\ L-l&=\lambda. \end{aligned}$$

Multiplions les deux nombres de la première égalité par BC.....L, ceux de la seconde par aC..... L, ceux de la troisième par abD..... L,....., enfin ceux de la dernière par $abc.....k$, ce qui donne

$$\begin{aligned} ABC.....L-aBC.....L&=\alpha BC.....L,\\ aBC.....L-abC.....L&=\beta aC.....L,\\ abC.....L-abc.....L&=\gamma ab.....L,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ abc.....kL-abc.....kl&=\lambda ab.....k. \end{aligned}$$

Si l'on ajoute toutes ces égalités, les quantités intermédiaires se détruisent, et il vient

$$ABC.....L-abc.....l=\alpha BC.....L+\beta aC.....L+.....$$

Les valeurs absolues des quantités variables A, B, C, ... étant moindres qu'un nombre positif fixe M, la valeur absolue de chacun des termes du second membre est moindre que pM^{m-1}; la valeur absolue du second membre est donc moindre que mpM^{m-1}, c'est-à-dire que le produit du nombre fini mM^{m-1} par la quantité p qui tend vers zéro ; elle devient plus petite que toute quantité donnée; on en conclut que le produit ABC.....L tend vers la limite $abc.....l$.

Mais il est nécessaire, pour que ces propriétés subsistent, que le nombre des parties de la somme, ou le nombre des facteurs du produit, soit fini. Soit, par exemple, la somme des m quantités

$$\frac{a}{m}+\frac{a}{m}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{a}{m};$$

chacune d'elles tend vers zéro, quand m augmente indéfiniment; mais le nombre des parties devenant infiniment grand, on ne peut plus dire que la limite de la somme soit la somme des limites, ce qui donnerait ici zéro; et en effet cette somme est égale à a.

De même l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, dans laquelle m est un nombre entier, désigne le produit de m facteurs égaux à $1+\frac{1}{m}$; chacun de ces facteurs devient égal à l'unité, quand m augmente indéfiniment; la limite du produit n'est pas égale au produit des limites, c'est-à-dire à l'unité, parce que le nombre des facteurs devient infini. Nous nous proposons de déterminer cette limite.

Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, *quand* m *augmente indéfiniment.*

81. LEMME. *Le produit*

$$(1-a)(1-b)(1-c)\ldots\ldots(1-l),$$

dans lequel a, b, c, ... , l *sont des quantités positives plus petites que l'unité et dont la somme est aussi plus petite que l'unité, est plus grand que l'excès de l'unité sur cette somme.*

Considérons d'abord le produit $(1-a)(1-b)$ de deux facteurs. En effectuant la multiplication, on a

$$(1-a)(1-b)=1-(a+b)+ab;$$

le dernier terme étant positif, on a

$$(1-a)(1-b)>1-(a+b).$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette inégalité par le nombre positif $1-c$, on obtient l'inégalité

$$(1-a)(1-b)(1-c)>[1-(a+b)](1-c);$$

le second membre, qui est le produit de deux facteurs satisfaisant à la condition énoncée, est plus grand que la différence $1-(a+b+c)$. On a donc, à plus forte raison,

$$(1-a)(1-b)(1-c)>1-(a+b+c),$$

et ainsi de suite.

82. Considérons maintenant l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, quand m est un nombre positif entier. Si l'on développe cette puissance entière par la formule du binôme, on a

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{m}{1}\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\frac{1}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{1}{m^3}+\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-m+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\ldots\,m}\frac{1}{m^m}.$$

Dans chaque terme, l'exposant de m est égal au nombre des facteurs du numérateur; on divisera donc le numérateur par cette puissance de m, en divisant chacun de ces facteurs par m; on obtient ainsi l'expression

$$(1)\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{1\,.\,2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots\ldots m}.$$

Chacun des numérateurs ayant une valeur positive inférieure à l'unité, la valeur de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est plus petite que

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots\ldots+\frac{1}{1\,.\,2\ldots m},$$

c'est-à-dire que la somme des $m+1$ premiers termes de la série e (n° 78), somme que nous désignerons par S_{m+1}.

Quand m augmente, les facteurs $1-\frac{1}{m}$, $1-\frac{2}{m}$, ..., qui forment les numérateurs, vont en croissant; chaque terme augmente, ainsi que le nombre des termes : on en conclut que la valeur de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ augmente avec m, tout en restant inférieure à e; elle tend donc vers une limite inférieure ou égale à e. Nous allons démontrer que cette limite est le nombre e lui-même.

Le terme de rang $n+1$ dans le développement est

$$\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots n}.$$

En vertu du lemme précédent, le numérateur est plus grand que

$$1-\frac{1+2+\ldots+(n-1)}{m}=1-\frac{(n-1)n}{2m};$$

le terme est donc plus grand que

$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n}-\frac{1}{2m}\times\frac{1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-2)}.$$

Si dans le développement on remplace les termes, à partir du quatrième, par des quantités plus petites, on a

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^m>1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+\frac{1}{1\,.\,2\ldots m}$$
$$-\frac{1}{2m}\left[1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\ldots+\frac{1}{1\,.\,2\ldots(m-2)}\right],$$

c'est-à-dire

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m>S_{m+1}-\frac{1}{2m}S_{m-1}.$$

La valeur de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est donc comprise entre les deux quantités $S_{m+1}-\frac{1}{2m}S_{m-1}$ et S_{m+1}. Or, quand le nombre entier m augmente indéfiniment, ces deux quantités tendent vers la même limite e; on en conclut que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tend aussi vers la limite e.

83. Supposons maintenant que le nombre m soit positif, mais ait une valeur quelconque, entière ou fractionnaire. Désignons par m' le plus grand nombre entier contenu dans m; le nombre m est égal ou supérieur à m', mais il est plus petit que $m'+1$. Si dans l'expression proposée on

remplace la quantité $1+\frac{1}{m}$ par la quantité égale ou supérieure $1+\frac{1}{m'}$ et l'exposant m par l'exposant plus grand $m'+1$, on augmente la valeur de l'expression et l'on a

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{m'}\right)^{m'+1}.$$

Au contraire, si l'on remplace la quantité $1+\frac{1}{m}$ par la quantité plus petite $1+\frac{1}{m'+1}$ et l'exposant m par l'exposant égal ou inférieur m', on diminue la valeur de l'expression, et l'on a

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{m'+1}\right)^{m'}.$$

On obtient ainsi les inégalités

$$\left(1+\frac{1}{m'+1}\right)^{m'} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{m'}\right)^{m'+1}.$$

ou

$$\frac{\left(1+\frac{1}{m'+1}\right)^{m'+1}}{1+\frac{1}{m'+1}} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{m'}\right)^{m'} \times \left(1+\frac{1}{m'}\right).$$

Lorsque le nombre m augmente à l'infini, le nombre entier m' augmente aussi à l'infini, et les deux expressions $\left(1+\frac{1}{m'}\right)^{m'}$, $\left(1+\frac{1}{m'+1}\right)^{m'+1}$ tendent vers la limite e; d'ailleurs le diviseur $1+\frac{1}{m'+1}$, ainsi que le multiplicateur $1+\frac{1}{m'}$, tendent vers 1; les deux quantités extrêmes

tendent donc vers la même limite e, et, par conséquent, l'expression proposée $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, qui est comprise entre elles, tend vers cette même limite.

Lorsque le nombre m est négatif et augmente à l'infini en valeur absolue, l'expression tend encore vers la même limite. Posons, en effet, $m=-m'$, on a

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\left(1-\frac{1}{m'}\right)^{-m'}=\left(\frac{m'-1}{m'}\right)^{-m'}=\left(\frac{m'}{m'-1}\right)^{m'}$$

$$=\left(1+\frac{1}{m'-1}\right)^{m'}=\left(1+\frac{1}{m'-1}\right)^{m'-1}\times\left(1+\frac{1}{m'-1}\right).$$

Quand le nombre positif m', entier ou fractionnaire, augmente à l'infini, l'expression $\left(1+\frac{1}{m'-1}\right)^{m'-1}$ tend vers e; le multiplicateur $1+\frac{1}{m'-1}$ tend vers 1; donc l'expression proposée tend vers la limite e.

A l'expression précédente se ramène l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, dans laquelle α est une quantité, positive ou négative, qui tend vers zéro; car, si l'on pose $m=\frac{1}{\alpha}$, on a

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Quand α tend vers zéro, la valeur absolue de m augmente à l'infini. Ainsi l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend aussi vers la limite e quand α tend vers zéro, d'une manière quelconque.

CHAPITRE III

FRACTIONS CONTINUES

84. Expliquons d'abord comment on obtient ces sortes de fractions. Tout nombre commensurable peut être mis sous la forme d'une fraction ordinaire $\frac{A}{A_1}$, dans laquelle A et A_1 sont des nombres entiers. Si l'on divise A par A_1, que l'on appelle a_1 le quotient entier et A_2 le reste plus petit que le diviseur, on a

$$A = A_1 a_1 + A_2, \quad \text{ou} \quad \frac{A}{A_1} = a_1 + \frac{A_2}{A_1} = a_1 + \frac{1}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)}.$$

En divisant A_1 par A_2, appelant a_2 le quotient et A_3 le reste plus petit que A_2, on a de même

$$A_1 = A_2 a_2 + A_3, \quad \text{ou} \quad \frac{A_1}{A_2} = a_2 + \frac{A_3}{A_2} = a_2 + \frac{1}{\left(\frac{A_2}{A_3}\right)};$$

si l'on substitue cette valeur de $\frac{A_1}{A_2}$ dans l'expression précédente, il vient

$$\frac{A}{A_1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\left(\frac{A_2}{A_3}\right)}}.$$

En divisant A_2 par A_3, on a de même

$$A_2 = A_3 a_3 + A_4, \quad \text{ou} \quad \frac{A_2}{A_3} = a_3 + \frac{A_4}{A_3} = a_3 + \frac{1}{\left(\frac{A_3}{A_4}\right)},$$

et par suite

$$\frac{A}{A_1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\left(\frac{A_3}{A_4}\right)}}}.$$

L'opération se terminera nécessairement; car cette série de divisions est précisément celle que l'on effectue pour trouver le plus grand commun diviseur des deux nombres entiers A et A_1; après un certain nombre de divisions, on arrivera à un reste nul; supposons, par exemple, que l'on ait $A_3 = A_4 a_4$, ou $\frac{A_3}{A_4} = a_4$; l'expression précédente devient

$$\frac{A}{A_1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}};$$

c'est là ce qu'on appelle une *fraction continue*. D'après ce que nous venons de dire, tout nombre commensurable peut être converti en une fraction continue limitée.

85. Soit maintenant x un nombre incommensurable quelconque; en appelant a_1 sa partie entière, on a $x = a_1 + \frac{1}{x_1}$, x_1 étant un nombre incommensurable plus grand que l'unité. En désignant par a_2 la partie entière de x_1, on a de même $x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}$, x_2 étant aussi un nombre incommensurable

plus grand que l'unité ; si dans la valeur de x on remplace x_1 par sa valeur, il vient

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_2}}$$

En désignant par a_3 la partie entière de x_2, on a de même $x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3}$, x_3 étant un nombre incommensurable plus grand que l'unité, et par suite

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{x_3}}}.$$

On continuera de cette manière indéfiniment, et l'on obtiendra une fraction continue illimitée.

Les nombres entiers a_1, a_2, a_3, a_4,....., qui composent la fraction continue, et qui sont tous égaux ou supérieurs à l'unité, excepté le premier qui peut être égal à zéro, se nomment les *quotients incomplets* ; les nombres fractionnaires $a_1 + \frac{1}{x_1}$, $a_2 + \frac{1}{x_2}$, $a_3 + \frac{1}{x_3}$,..... sont les *quotients complets.*

86. On appelle *réduites* les valeurs que l'on obtient, quand on prend un certain nombre de quotients incomplets successifs, à partir du premier, et qu'on néglige les suivants. La première réduite est a_1 ou $\frac{a_1}{1}$. La seconde réduite est $a_1 + \frac{1}{a_2}$, ou $\frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}$. Pour avoir la troisième, il suffit de remplacer dans la seconde a_2 par $a_2 + \frac{1}{a_3}$, ce qui donne

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = \frac{a_1\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) + 1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{(a_1 a_2 + 1)a_3 + a_1}{a_2 a_3 + 1}.$$

On obtient le numérateur de la troisième réduite au moyen des numérateurs des deux réduites précédentes, en multipliant le numérateur de la seconde réduite par le quotient incomplet a_3 auquel on s'arrête, et ajoutant celui de la première. Le dénominateur se forme de la même manière au moyen des dénominateurs des deux réduites précédentes.

Cette loi est générale : nous allons démontrer que si elle est vraie pour une réduite d'ordre quelconque, elle l'est aussi pour la suivante. Désignons par $\frac{p_n}{q_n}$ la réduite d'ordre n. Nous admettons que l'on a

$$(1) \qquad p_n = p_{n-1}a_n + p_{n-2}, \quad q_n = q_{n-1}a_n + q_{n-2}.$$

Si, dans l'expression

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_{n-1}a_n + q_{n-2}},$$

on remplace a_n par $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$, on obtient la réduite suivante,

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + p_{n-2}}{q_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + q_{n-2}} = \frac{(p_{n-1}a_n + p_{n-2})a_{n+1} + p_{n-1}}{(q_{n-1}a_n + q_{n-2})a_{n+1} + q_{n-1}};$$

en vertu des hypothèses faites, il vient

$$(2) \qquad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n a_{n+1} + p_{n-1}}{q_n a_{n+1} + q_{n-1}}.$$

On conclut de là cette règle générale : *On forme le numérateur d'une réduite quelconque en multipliant le numérateur de la précédente par le quotient incomplet auquel on s'arrête, et ajoutant celui de la réduite antéprécédente. Même règle pour les dénominateurs.*

87. Des relations

$$p_n = p_{n-1}a_n + p_{n-2} \quad , \quad q_n = q_{n-1}a_n + q_{n-2},$$

que nous venons d'établir, on déduit

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = -(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2}).$$

Ainsi la quantité $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}$ conserve la même valeur numérique, quel que soit n; mais elle change de signe, quand on augmente n d'une unité; il en résulte que la quantité

$$(-1)^n (p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1})$$

reste constante. Pour $n = 2$, elle est égale à $+1$; on a donc, quel que soit n,

$$(3) \qquad p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n.$$

On conclut de cette relation que les deux nombres entiers p_n et q_n sont premiers entre eux, et, par conséquent, que les réduites, formées suivant la loi indiquée, sont des fractions irréductibles.

On en déduit aussi

$$(4) \qquad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}.$$

La valeur absolue de la différence de deux réduites consécutives est une fraction qui a pour numérateur l'unité et pour dénominateur le produit des dénominateurs des deux réduites; elle va sans cesse en diminuant. Cette différence

est alternativement positive ou négative; une réduite de rang pair est plus grande que la précédente, une réduite de rang impair est plus petite.

88. Désignons par R_m la réduite d'un ordre quelconque m plus grand que n et posons

$$b = a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cdots + \cfrac{1}{a_m}}.$$

Pour avoir la valeur de R_m, il suffit de remplacer dans l'expression (2) de R_{n+1} le quotient incomplet a_{n+1} par le quotient complet b; on a ainsi

$$R_m = \frac{p_n b + p_{n-1}}{q_n b + q_{n-1}},$$

d'où

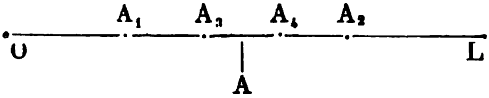
$$R_m - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n b}{q_{n-1}(q_n b + q_{n-1})},$$

$$R_m - \frac{p_n}{q_n} = -\frac{(-1)^n}{q_n(q_n b + q_{n-1})}.$$

Ces deux différences étant de signes contraires, et la valeur absolue de la seconde plus petite que celle de la première, on en conclut que la réduite R_m est comprise entre les deux réduites consécutives R_{n-1} et R_n, et plus rapprochée de celle-ci que de la précédente. Lorsque la fraction continue est limitée, ceci s'applique à la dernière réduite qui est la valeur même de la fraction.

89. Imaginons que sur une droite OL, à partir d'un point fixe O, on porte des longueurs OA_1, OA_2, OA_3, ... égales aux valeurs des réduites successives. La seconde réduite OA_2 est plus grande que la première OA_1. Pour avoir

la troisième OA_3, il faut retrancher de OA_2 une longueur A_2A_3 plus petite que A_2A_1; le point A_3 sera donc situé



entre A_1 et A_2. Pour avoir la quatrième OA_4, il faut ajouter à OA_3 une longueur A_3A_4 plus petite que A_3A_2; le point A_4 tombera donc entre les points A_2 et A_3, et ainsi de suite. Il en résulte que les réduites d'ordres impairs OA_1, OA_3, ... vont en augmentant, tandis que les réduites d'ordres pairs OA_2, OA_4, ... vont en diminuant, et que chacune des premières est plus petite que l'une quelconque des secondes. Lorsque la fraction continue est illimitée, les deux séries de réduites, allant les unes en augmentant, les autres en diminuant, et leur différence devenant aussi petite qu'on veut, tendent vers une limite commune OA; cette limite est ce qu'on appelle la valeur de la fraction continue.

Chacune des réduites R_m d'ordre supérieur à n, étant comprise entre les deux réduites consécutives R_n et R_{n+1}, il en est de même de leur limite. Si l'on prend pour valeur approchée de cette limite la réduite R_n, l'erreur commise est moindre que la différence $\frac{1}{q_n q_{n+1}}$ entre ces deux réduites, et par consequent moindre que $\frac{1}{q_n^2}$; la réduite R_n est approchée par excès ou par défaut, suivant que n est pair ou impair.

Par exemple, le nombre π s'exprime par la fraction continue illimitée

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cdots}}}},$$

dont les réduites successives, calculées par la loi indiquée, sont 3, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{103993}{33102}$, ... La seconde réduite est la valeur trouvée par Archimède; elle est approchée par excès, à moins de $\frac{1}{7 \times 106}$, ou de $\frac{1}{700}$. La quatrième est la valeur donnée par Métius; elle est aussi approchée par excès, à moins de $\frac{1}{113 \times 33102}$, ou de $\frac{1}{3 \times 10^6}$.

90. Une propriété importante des fractions continues, c'est que toute fraction ordinaire $\frac{\alpha}{\beta}$, qui approche de la valeur de la fraction continue plus qu'une réduite $\frac{p_n}{q_n}$, a ses deux termes respectivement plus grands que ceux de cette réduite. En effet, la fraction $\frac{\alpha}{\beta}$ est nécessairement comprise entre les deux réduites consécutives $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ et $\frac{p_n}{q_n}$; si n est pair,

on a
$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_n}{q_n},$$

d'où
$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},$$

c'est-à-dire
$$\frac{\alpha q_{n-1} - \beta p_{n-1}}{\beta q_{n-1}} < \frac{1}{q_n q_{n-1}};$$

le premier numérateur étant un nombre entier positif, le premier dénominateur est plus grand que le second, et par conséquent β est plus grand que q_n. En considérant les inégalités

$$\frac{q_n}{p_n} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}};$$

on démontrerait de même que α est plus grand que p_n.

Fractions continues périodiques.

91. Il est aisé de voir que la valeur d'une fraction continue périodique est une irrationnelle du second degré. Supposons d'abord que les quotients incomplets se reproduisent périodiquement à partir du premier a_1; en désignant par x la valeur de la fraction, on a

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x}}}.$$

Considérons la fraction limitée

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}},$$

et désignons par $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ et $\frac{p_n}{q_n}$ ses deux dernières réduites; en opérant comme si l'on formait la réduite suivante avec le quotient x, on obtient la valeur de la fraction proposée

$$x = \frac{p_n x + p_{n-1}}{q_n x + q_{n-1}};$$

il en résulte que l'inconnue x satisfait à l'équation du second degré

$$(5) \qquad q_n x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1}\ 0,$$

dont les coefficients sont des nombres entiers et les racines de signes contraires.

Si la période ne commence qu'à un certain rang, en appelant x la valeur de la fraction continue formée avec les périodes et y celle de la fraction proposée, on a

$$y = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{x}}},$$

d'où

$$(6) \qquad y = \frac{P_m x + P_{m-1}}{Q_m x + Q_{m-1}}.$$

Analyse indéterminée.

92. Proposons-nous de trouver les solutions entières de l'équation

$$(7) \qquad ax + by = c,$$

à deux inconnues x et y, et à coefficients entiers. On peut supposer les deux nombres a et b premiers entre eux; car, s'ils avaient un plus grand commun diviseur d, ce nombre d devrait diviser c. Réduisons la fraction $\frac{a}{b}$ en fraction continue et soit $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ l'avant-dernière réduite; la dernière est $\frac{a}{b}$, et l'on a

$$aq_{n-1} - bp_{n-1} = (-1)^n;$$

d'où, en multipliant les deux membres par $(-1)^n c$,

$$a[(-1)^n q_{n-1} c] + b[-(-1)^n p_{n-1} c] = c.$$

On connaît ainsi une solution particulière de l'équation,

$$x = (-1)^n q_{n-1} c \quad , \quad y = -(-1)^n p_{n-1} c.$$

Une fois que l'on connaît une solution $x = \alpha$, $y = \beta$, il est facile d'avoir toutes les autres; car, à cause de la relation $a\alpha + b\beta = c$, l'équation (7) devient

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0, \text{ ou } \frac{y - \beta}{x - \alpha} = \frac{a}{-b}.$$

La première fraction doit avoir ses deux termes équimultiples de ceux de la seconde qui est irréductible; on aura donc, en désignant par t un nombre entier arbitraire,

$$(8) \qquad x - \alpha = -bt \quad , \quad y - \beta = at.$$

Chaque valeur de t donne une solution de l'équation.

Soit, par exemple, l'équation

$$266x - 115y = 3.$$

La fraction ordinaire $\frac{266}{115}$ donne naissance à la fraction continue

$$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7}}},$$

dont les réduites successives sont $\frac{2}{1}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{37}{16}$, $\frac{266}{115}$ et l'on a

$$266 \times 16 - 115 \times 37 = 1.$$

L'équation proposée admet la solution

$$x = 16 \times 3 \ , \ y = 37 \times 3,$$

et les diverses solutions de cette équation sont représentées par les formules

$$x = 48 + 115t \ , \ y = 111 + 266t.$$

LIVRE IV.

LOGARITHMES.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

93. Lemme I. *Les puissances entières successives d'un nombre plus grand que l'unité vont en croissant et deviennent plus grandes que toute quantité donnée.*

Soit a un nombre positif supérieur à l'unité. On voit d'abord que les puissances successives vont en croissant; car on obtient a^{m+1} en multipliant a^m par a; le multiplicateur a étant plus grand que l'unité, le produit a^{m+1} est plus grand que le multiplicande a^m. Je dis maintenant que les puissances de a augmentent au delà de toute limite. Posons $a = 1 + \alpha$; en développant $(1 + \alpha)^m$ suivant la loi du binôme, nous aurons

$$a^m = (1 + \alpha)^m = 1 + \frac{m}{1}\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2 + \ldots\ldots$$

Tous les termes du développement sont positifs; si donc on

néglige le troisième terme et les termes suivants, on diminue le second membre, et l'on a

$$a^m > 1 + m\alpha.$$

Pour rendre la quantité a^m plus grande qu'une quantité donnée A, il suffit évidemment de rendre la quantité $1 + m\alpha$ plus grande que cette quantité; on déterminera donc l'exposant m de manière à satisfaire à l'inégalite

$$1 + m\alpha > A;$$

d'où

$$m > \frac{A - 1}{\alpha}.$$

Ainsi, lorsque l'exposant m surpassera $\frac{A-1}{\alpha}$, il est certain que la puissance a^m sera supérieure à la quantité A, si grande qu'elle soit. Donc les puissances successives du nombre a plus grand que l'unité augmentent à l'infini.

Soit, par exemple, $a = 1,1$; on peut affirmer que a^m surpassera 1000 si m est plus grand que $\frac{999}{0,1}$ ou que 9990. Mais on n'a pas ainsi les plus petites puissances de a supérieures à 1000.

94. **Lemme II.** *Les puissances entières successives d'un nombre plus petit que l'unité vont en décroissant et tendent vers zéro.*

Un nombre a plus petit que un peut être représenté par $\frac{1}{a'}$, le nombre a' étant plus grand que 1, et l'on a $a^m = \frac{1}{a'^m}$. Quand l'exposant m croît indéfiniment, le dénominateur augmentant à l'infini, la fraction diminue et tend vers zéro.

95. **Lemme III.** *Les racines d'un nombre plus grand que*

l'unité sont plus grandes que l'unité; elles diminuent à mesure que l'indice du radical augmente et tendent vers l'unité.

Nous remarquons d'abord que, lorsqu'un nombre positif a est plus grand que l'unité, sa racine $b = \sqrt[n]{a}$ est aussi plus grande que l'unité; car si le nombre b était plus petit que un, sa puissance b^n serait plus petite que un, et, par conséquent, ne serait pas égale à a.

Considérons maintenant deux racines consécutives

$$b = \sqrt[n]{a}, \quad b' = \sqrt[n+1]{a};$$

je dis que la racine b' est plus petite que b. On a, en effet,

$$b^n = b'^{n+1} = a$$

et, par suite,

$$\left(\frac{b}{b'}\right)^n = b'.$$

Puisque la racine b' est plus grande que un, le rapport $\frac{b}{b'}$ est aussi plus grand que un, et, par conséquent, b' est plus petit que b.

Nous allons démontrer maintenant que l'on peut rendre l'indice du radical assez grand pour que la valeur de la racine surpasse l'unité d'une quantité moindre qu'une quantité donnée α, aussi petite qu'on voudra. Il s'agit de déterminer n de manière que l'on ait

$$\sqrt[n]{a} < 1 + \alpha,$$

ou

$$(1 + \alpha)^n > a.$$

Or, d'après le lemme I, on peut toujours déterminer l'exposant n de manière que la puissance $(1+\alpha)^n$ surpasse le nombre donné a. Par exemple, si l'on veut que $\sqrt[n]{2}$ diffère de l'unité de moins de 0,001, il suffira de rendre n plus grand que $\frac{2-1}{0,001}$, c'est-à-dire plus grand que 1000. Ainsi, quand n augmente à l'infini, $\sqrt[n]{a}$ tend vers un.

96. Lemme IV. *Les racines d'un nombre plus petit que l'unité sont plus petites que l'unité ; elles augmentent avec l'indice du radical et tendent vers l'unité.*

Si l'on pose $a = \frac{1}{a'}$, a' étant plus grand que l'unité, on a $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a'}}$; quand n augmente indéfiniment, le dénominateur diminue, et, par conséquent, la fraction augmente et tend vers l'unité.

Corollaire. *Toute puissance fractionnaire d'un nombre plus grand que un est plus grande que un ; toute puissance fractionnaire d'un nombre plus petit que un est plus petite que un.*

Car $a^{\frac{m}{n}}$ signifie $\sqrt[n]{a^m}$; si a est plus grand que un, a^m est plus grand que un, et par conséquent $\sqrt[n]{a^m}$.

97 Théorème. *La fonction* a^x *varie d'une manière continue, quand* x *croît d'une manière continue.*

On appelle *fonction* en mathématiques une expression qui contient une lettre désignant une quantité variable. L'expression $2x^2 - 4x + 5$ est une fonction entière de la variable x. L'expression a^x, dans laquelle a désigne un nombre positif donné, est une fonction *exponentielle* de x ; on la nomme ainsi parce que la variable x est en exposant.

Considérons d'abord le cas où le nombre positif donné a est plus grand que l'unité. Nous allons démontrer que, dans ce cas, la fonction a^x croît avec la variable x, et qu'elle croît d'une manière continue. Si l'on donne à la variable x un accroissement positif h, la fonction devient a^{x+h}, et éprouve une variation marquée par

$$a^{x+h} - a^x = a^x (a^h - 1).$$

Mais la quantité a^h est plus grande que un, parce que toute puissance fractionnaire positive d'un nombre a plus grand que un est elle-même plus grande que l'unité (n° 96); donc la différence $a^{x+h} - a^x$ est positive, et par suite la quantité a^{x+h} est plus grande que a^x. Ainsi, la fonction a^x croît en même temps que la variable x.

Je dis maintenant que l'on peut assigner une fraction $\frac{1}{n}$ telle que, pour toutes les valeurs de h plus petites que $\frac{1}{n}$, la différence $a^{x+h} - a^x$ soit plus petite qu'une quantité donnée α, si petite qu'elle soit. En vertu du lemme III, on peut déterminer un nombre entier n assez grand pour que la quantité $a^{\frac{1}{n}}$, c'est-à-dire la racine $\sqrt[n]{a}$, surpasse l'unité d'une quantité moindre que la quantité donnée $\frac{\alpha}{a^x}$; mais, d'après ce qui précède, si l'exposant h est plus petit que $\frac{1}{n}$, la puissance a^h est plus petite que $a^{\frac{1}{n}}$, et, par conséquent, la différence $a^h - 1$ est moindre que $a^{\frac{1}{n}} - 1$, et, par suite, moindre

que $\frac{\alpha}{a^x}$; on a donc

$$a^x(a^h - 1) < \alpha,$$

ou

$$a^{x+h} - a^x < \alpha.$$

Ainsi, pour toutes les valeurs de h inférieures à $\frac{1}{n}$, la variation de la fonction est moindre que la quantité donnée α; c'est en cela que consiste la *continuité*.

Considérons actuellement le cas où le nombre positif donné a est plus petit que l'unité; si l'on pose $a = \frac{1}{a'}$, a' étant un nombre plus grand que un, on a

$$a^x = \frac{1}{a'^x};$$

Lorsque x croît d'une manière continue, a'^x croît, et, par conséquent, a^x décroît, d'une manière continue.

98. Corollaire. Voyons maintenant les valeurs par lesquelles passe la fonction exponentielle a^x, quand on fait croître x d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$. Supposons d'abord que le nombre donné a soit plus grand que un. Faisons croître x de 0 à $+\infty$; pour $x = 0$, on a $a^0 = 1$; d'après le lemme I, les puissances entières de a deviennent plus grandes que toute quantité donnée; ainsi, quand x croît de 0 à $+\infty$, la fonction a^x croît de 1 à $+\infty$. Faisons maintenant décroître x de 0 à $-\infty$, et pour cela posons $x = -x'$, la nouvelle variable x' étant positive; on a

$$a^x = \frac{1}{a^{x'}};$$

quand x' croît de o à $+\infty$, $a^{x'}$ croît de 1 à $+\infty$, et, par conséquent, a^x décroît de 1 à o. En résumé, lorsque la variable x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction a^x croît d'une manière continue de o à $+\infty$. Il est à remarquer que la fonction passe par toutes les valeurs positives et qu'elle ne passe qu'une fois par chacune d'elles, puisqu'elle va constamment en augmentant.

Supposons actuellement que le nombre donné a soit plus petit que un, et posons, comme précédemment, $a = \frac{1}{a'}$, a étant un nombre plus grand que un, d'où

$$a^x = \frac{1}{a'^x}.$$

Lorsque x croît de o à $+\infty$, a'^x croît de 1 à $+\infty$, et, par conséquent, a^x décroît de 1 à o; lorsque x décroît de o à $-\infty$, a'^x décroît de 1 à o, et, par conséquent, a^x croit de 1 à $+\infty$. Ainsi, quand x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction a^x décroît d'une manière continue de $+\infty$ à o. La fonction passe encore par toutes les valeurs positives et une seule fois par chacune d'elles.

99. Remarque. Nous pouvons maintenant donner d'une manière très-nette la signification de l'exposant incommensurable dont nous avons déjà dit quelques mots (n° 20). Soit $a^{\sqrt{2}}$, et, pour préciser, supposons que le nombre a soit plus grand que un; le nombre incommensurable $\sqrt{2}$ est la limite commune de deux nombres fractionnaires $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, qui diffèrent entre eux d'une quantité aussi petite qu'on veut, et dont les carrés comprennent 2; en remplaçant $\sqrt{2}$

par ces nombres approchés, on obtiendra deux séries de puissances fractionnaires $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{m+1}{n}}$, les premières plus petites que les secondes, et telles que leur différence peut être rendue plus petite qu'une quantité donnée; il existe donc entre ces deux séries de grandeurs une grandeur déterminée qui en est la limite commune; c'est cette limite que désigne $a^{\sqrt{2}}$.

CHAPITRE II.

DES LOGARITHMES.

Définition par la fonction exponentielle.

100. On appelle *logarithme* d'un nombre l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever un nombre positif donné a pour reproduire le nombre proposé; ce nombre constant a est appelé *base* du système de logarithmes.

Nous avons vu que, lorsque x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction a^x passe par toutes les valeurs positives et ne passe qu'une fois par chacune d'elles; il en résulte que tous les nombres positifs ont des logarithmes, et que chacun d'eux n'a qu'un logarithme. Si le nombre donné a est plus grand que un, les nombres plus grands que l'unité ont des logarithmes positifs, les nombres plus petits que l'unité des logarithmes négatifs. Si le nombre a était plus petit que un, les nombres plus grands que l'unité auraient au contraire des logarithmes négatifs, les nombres plus pe-

tits que l'unité des logarithmes positifs. Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes réels.

Nous désignerons le logarithme d'un nombre par la notation *log*. Soit donc $y = a^x$, nous dirons que l'exposant x est le logarithme du nombre y, et nous écrirons $x = \log y$. Puisque y varie d'une manière continue avec x, réciproquement x varie d'une manière continue avec y; ainsi le logarithme x est une fonction continue du nombre y. Quand la base a est plus grande que l'unité, si le nombre y croît de 0 à 1, puis de 1 à $+\infty$, le logarithme x croît de $-\infty$ à 0, puis de 0 à $+\infty$.

Propriétés des logarithmes.

Les logarithmes jouissent de propriétés très-remarquables que nous allons démontrer.

101. THÉORÈME I. *Le logarithme du produit de plusieurs nombres est égal à la somme des logarithmes de ces nombres.*

Soient deux nombres y et y', dont nous appellerons x et x' les logarithmes ; d'après la définition même des logarithmes, on a

$$a^x = y,$$
$$a^{x'} = y'.$$

Multiplions ces deux égalités membre à membre, il vient

$$a^{x+x'} = yy'.$$

L'exposant $x + x'$ est le logarithme du produit yy'; on a donc

$$\log(yy') = \log y + \log y'.$$

La même démonstration s'applique à un nombre quelconque de facteurs. Soient trois nombres y, y', y'', ayant

pour logarithmes x, x', x'' ; on a de même

$$a^x = y,$$
$$a^{x'} = y',$$
$$a^{x''} = y'',$$

et, en multipliant,

$$a^{x+x'+x''} = yy'y'';$$

donc

$$\log (yy'y'') = \log y + \log y' + \log y''.$$

102. Théorème II. *Le logarithme d'un quotient égale le logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.*

En divisant membre à membre les deux égalités

$$a^x = y,$$
$$a^{x'} = y',$$

on a

$$a^{x-x'} = \frac{y}{y'}.$$

L'exposant $x - x'$ est le logarithme du quotient $\frac{y}{y'}$. Donc

$$\log \frac{y}{y'} = \log y - \log y'.$$

103. Théorème III. *Le logarithme de la puissance d'un nombre égale le logarithme de ce nombre multiplié par l'indice de la puissance.*

Si l'on élève à m^e puissance (m étant un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, positif ou négatif) les deux membres de l'égalité

$$a^x = y,$$

il vient

$$a^{mx} = y^m.$$

Donc

$$\log (y^m) = m \log y.$$

104. Théorème IV. *Le logarithme de la racine d'un nombre égale le logarithme de ce nombre, divisé par l'indice de la racine.*

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème précédent; car $\sqrt[n]{y}$ s'écrit $y^{\frac{1}{n}}$, et l'on a

$$\log \sqrt[n]{y} = \frac{\log y}{n}.$$

L'emploi des logarithmes simplifie beaucoup les calculs numériques; car la multiplication est remplacée par une addition, la division par une soustraction, l'élévation à une puissance par une multiplication, l'extraction d'une racine par une division.

Définition des logarithmes par des progressions.

105. Si l'on prend les logarithmes des termes d'une progression géométrique

$$a : ar : ar^2 : ar^3 : \ldots\ldots,$$

dont la raison est r, on forme évidemment une progression arithmétique

$$\log a \,.\, \log a + \log r \,.\, \log a + 2 \log r \,.\, \log a + 3 \log r \ldots\ldots$$

ayant pour raison $\log r$.

En arithmétique, on a coutume de définir les logarithmes par deux progressions, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro

$$1 : a : a^2 : a^3 : \ldots\ldots$$
$$0 \,.\, b \,.\, 2b \,.\, 3b \ldots\ldots$$

et l'on appelle logarithme d'un terme quelconque de la pro-

gression géométrique le terme correspondant de la progression arithmétique. Afin d'avoir les logarithmes de tous les nombres avec une grande approximation, on insère un grand nombre de moyens entre deux termes consécutifs de la progression géométrique, et le même nombre de moyens entre deux termes consécutifs de la progression arithmétique.

Il est aisé de voir que cette définition des logarithmes par les progressions revient à la définition que nous avons donnée par les exponentielles. Considérons les deux progressions

$$1 : a : a^2 : a^3 : \ldots\ldots$$
$$0 . 1 . 2 . 3 \ldots\ldots$$

Si l'on insère $n - 1$ moyens entre deux termes consécutifs des deux progressions, la raison de la progression géométrique devient $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$, celle de la progression arithmétique $\frac{1}{n}$, en sorte que les deux progressions ainsi développées sont

$$1 : a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{2}{n}} : a^{\frac{3}{n}} : \ldots\ldots a^{\frac{m}{n}} : \ldots\ldots$$
$$0 . \frac{1}{n} . \frac{2}{n} . \frac{3}{n} \ldots\ldots \frac{m}{n} \ldots\ldots$$

Sous cette forme, on reconnaît qu'un nombre quelconque $a^{\frac{m}{n}}$ de la progression géométrique a pour logarithme l'exposant $\frac{m}{n}$ de la puissance à laquelle il faut élever le nombre constant a pour avoir le nombre proposé. La base a d'un système de logarithmes est le nombre qui a pour logarithme l'unité.

Changement de la base.

106. La base d'un système de logarithmes est un nombre positif constant, que l'on peut choisir à volonté. Supposons qu'on ait calculé les logarithmes des nombres dans le système dont la base est a, et qu'on veuille les calculer dans un autre système ayant pour base a'. Appelons x le logarithme d'un nombre quelconque y dans le premier système, x' le logarithme du même nombre dans le second système, on aura

$$a^x = y, \qquad a'^{x'} = y;$$

d'où

$$a^x = a'^{x'}.$$

Prenons les logarithmes des deux membres de cette égalité dans le premier système, en remarquant que le logarithme de a est l'unité, il vient

$$x = x' \log a',$$

d'où

$$x' = \frac{1}{\log a'} x.$$

Ainsi, les logarithmes des mêmes nombres dans les deux systèmes sont proportionnels, et l'on a la règle suivante : *pour passer d'un système de logarithmes à un autre, il suffit de multiplier les logarithmes du premier système par l'inverse du logarithme de la nouvelle base pris dans le premier système.*

Logarithmes népériens.

107. Les logarithmes ont été inventés au commencement du XVIIe siècle par l'Écossais *Néper*, qui prit pour base le

nombre incommensurable $e = 2{,}7182818\ldots\ldots$; les logarithmes de ce système ont été appelés logarithmes *hyperboliques*, ou, du nom de l'inventeur, logarithmes *népériens*. Ce sont ceux-là qui se présentent naturellement dans l'analyse mathématique; on les distingue ordinairement par la lettre L.

Mais les logarithmes népériens ne sont pas commodes dans les calculs numériques, parce qu'ils ne sont pas en harmonie avec notre numération décimale. C'est pourquoi *Briggs*, contemporain de Néper, proposa de remplacer la base e par la base *dix* de notre système de numération. Ce sont les logarithmes de Briggs dont on fait habituellement usage dans les calculs numériques ; on les a nommés pour cette raison *logarithmes vulgaires;* nous les désignerons par le signe *log*.

On appelle *module* d'un système de logarithmes le nombre constant par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens pour avoir les logarithmes du système considéré. Soit a la base d'un système de logarithmes; d'après ce qui a été dit précédemment, son module M sera

$$M = \frac{1}{La},$$

c'est-à-dire l'inverse du logarithme népérien de la base. Le module des logarithmes vulgaires est $M = 0{,}434294819\ldots$

Lorsqu'on passe d'un système dont la base est a à un système dont la base est a', le multiplicateur constant $\frac{1}{\log a'}$ s'appelle *module relatif* du premier système au second.

108. Il est bon de faire voir pourquoi Néper a choisi le

nombre incommensurable e pour base de son système de logarithmes. Considérons les deux progressions

$$1 : (1 + \alpha) : (1 + \alpha)^2 : (1 + \alpha)^3 : \ldots\ldots$$
$$0 \,.\quad \beta \quad.\quad 2\beta \quad.\quad 3\beta \quad \ldots\ldots,$$

dans lesquelles α et β sont des quantités très-petites, afin que les termes des deux progressions croissent par degrés très-petits, et que l'on ait ainsi les logarithmes de tous les nombres avec une grande approximation. Néper appelait module des logarithmes définis par ces deux progressions le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$, ou plutôt la limite de ce rapport, quand α et β tendent simultanément vers zéro, et il distinguait chaque système de logarithmes par son module. L'idée lui vint alors d'adopter le système dont le module est l'unité, celui qu'il regardait comme le plus simple. Si l'on fait $\beta = \alpha$, les deux progressions deviennent

$$1 : 1 + \alpha : (1 + \alpha)^2 : (1 + \alpha)^3 : \ldots\ldots$$
$$1 \,.\quad \alpha \quad.\quad 2\alpha \quad.\quad 3\alpha \quad \ldots\ldots$$

Telles sont les deux progressions par lesquelles Néper définissait son système de logarithmes. Calculons la base de ce système, c'est-à-dire le nombre qui a pour logarithme l'unité; supposons d'abord que le terme $m\alpha$ de la progression arithmétique soit égal à l'unité; le terme correspondant de la progression géométrique est $(1 + \alpha)^m$; puisque $m\alpha = 1$, on a $\alpha = \frac{1}{m}$ et $(1 + \alpha)^m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$; lorsque α tend vers zéro, m augmente indéfiniment, et le nombre $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ tend vers la limite e, qui est la base des logarithmes népériens.

Si aucun terme de la progression arithmétique n'est égal à l'unité, deux termes consécutifs $m\alpha$ et $(m+1)\alpha$ comprendront l'unité; la base a sera comprise entre les deux termes correspondants $(1+\alpha)^m$ et $(1+\alpha)^{m+1}$ de la progression géométrique. On a

$$m\alpha < 1 < (m+1)\alpha,$$

et par suite

$$\frac{1}{m+1} < \alpha < \frac{1}{m}.$$

La base est plus grande que $(1+\alpha)^m$, et à plus forte raison plus grande que $\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m$; elle est plus petite que $(1+\alpha)^{m+1}$ et à plus forte raison plus petite que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$.
La base est donc comprise entre les deux quantités

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m, \quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1+\frac{1}{m+1}}, \quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \times \left(1+\frac{1}{m}\right).$$

Chacune de ces quantités ayant pour limite e, quand m augmente indéfiniment, la base cherchée est égale à e.

Logarithmes vulgaires.

199. Dans un système quelconque, les puissances de la base $a^1, a^2, a^3, \ldots$, ont évidemment pour logarithmes les nombres

entiers 1, 2, 3,..... Dans le système vulgaire, ce sont les puissances de 10, savoir 10, 100, 1000,....., qui ont pour logarithmes les nombres entiers successifs. Les logarithmes ont été calculés en décimales; la partie entière d'un logarithme s'appelle *caractéristique*.

Les nombres plus petits que l'unité ont leurs logarithmes négatifs; les logarithmes négatifs étant incommodes dans la pratique, on leur substitue des logarithmes qui ont leur partie décimale positive et leur caractéristique seulement négative. Soit le nombre 0,03564 plus petit que l'unité; son logarithme est négatif et a pour valeur

$$-1,4480623.$$

Écrivons ce logarithme de la manière suivante

$$-2+1-0,4480623=-2+0,5519377,$$

ou plus simplement

$$\bar{2},5519377.$$

Sous cette forme, le logarithme a sa partie décimale positive; le signe —, placé au-dessus de la partie entière, indique que la caractéristique seule est négative. *La caractéristique négative du logarithme d'un nombre décimal plus petit que l'unité est égale au rang du premier chiffre significatif, à partir de la virgule.* En effet, soit m le rang du premier chiffre significatif à partir de la virgule dans le nombre proposé y; le produit $y \times 10^m$ étant compris entre 1 et 10, son logarithme a zéro pour caractéristique, avec une partie décimale positive; pour revenir au nombre y, il faut diviser par 10^m, c'est-à-dire retrancher m du logarithme; le logarithme de y aura donc une caractéristique négative $\bar{m}$, suivie d'une partie décimale positive.

Dans la première partie de cet ouvrage (livre IV, ch. III), nous avons expliqué l'usage des tables de Callet. Nous nous sommes occupés aussi des questions relatives aux intérêts composés et aux annuités. Nous y renvoyons le lecteur.

Résolution des équations exponentielles.

110. On appelle équation *exponentielle* une équation de la forme

$$a^x = b,$$

dans laquelle a et b sont deux quantités positives données, l'exposant x l'inconnue qui doit vérifier l'égalité. Il est facile de résoudre une semblable équation au moyen des logarithmes. Si l'on prend les logarithmes des deux membres, on a

$$x \log a = \log b;$$

d'où

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

On obtient ainsi la valeur de l'inconnue.

Exemples.

1°
$$7^x = 1254,$$

$$x = \frac{\log 1254}{\log 7} = \frac{3,0982975}{0,8450980\,4} = 3,666197.$$

2°
$$3^x = 0,462$$

$$x = \frac{\log 0,462}{\log 3} = -0,702878.$$

On peut encore résoudre des équations exponentielles plus compliquées que la précédente. Soit l'équation

$$a^{b^x} = c,$$

dans laquelle le premier membre signifie que le nombre a est élevé à une puissance marquée par b^x, les trois lettres a, b, c désignant d'ailleurs des nombres positifs donnés. En prenant les logarithmes des deux membres, on a

$$b^x \times \log a = \log c,$$

d'où

$$b^x = \frac{\log c}{\log a}.$$

On est ramené ainsi à l'équation exponentielle ordinaire. Pour que la question soit possible, il faut que les nombres a et c soient tous deux plus grands ou tous deux plus petits que un, afin que le second membre ait une valeur positive. Si l'on prend une seconde fois les logarithmes, on a

$$x \log b = \log \log c - \log \log a;$$

d'où

$$x = \frac{\log \log c - \log \log a}{\log b}.$$

LIVRE V.

DÉRIVÉES.

CHAPITRE PREMIER.

DÉRIVÉES.

111. Lorsque deux quantités variables x et y sont liées l'une à l'autre, de telle sorte que la variation de l'une entraîne la variation de l'autre, on dit que ces deux quantités sont fonctions l'une de l'autre. Si l'on regarde y comme une fonction de x, on indique cette liaison par le symbole $y = f(x)$. Nous supposerons dans ce qui suit que, lorsque la variable x varie d'une manière continue entre certaines limites, la fonction y varie aussi d'une manière continue. A une variation très-petite h de la variable correspond une variation très-petite k de la fonction; quand la première variation tend vers zéro, la seconde tend aussi vers zéro. En général, le rapport $\frac{k}{h}$ de la variation de la fonction à la variation de la variable tend vers une limite finie et déterminée; cette limite est ce qu'on appelle la *dérivée* de la fonction proposée. La dérivée est une nouvelle fonction de x que nous représenterons par le symbole y' ou $f'(x)$.

En mathématiques, on donne le nom d'*accroissements* aux variations très-petites des grandeurs continues, que ces variations soient positives ou négatives.

Considérons, par exemple, la fonction $y=x^2$. Si l'on donne à la variable x l'accroissement h, la fonction devient

$$(x+h)^2=x^2+2xh+h^2;$$

elle éprouve la variation ou l'accroissement

$$k=(x+h)^2-x^2=2xh+h^2;$$

on peut rendre h assez petit pour que chacun des termes $2xh$ et h^2, et par conséquent leur somme k, ait une valeur aussi petite qu'on veut; ainsi la fonction y varie d'une manière continue avec x. En divisant par h, on a

$$\frac{k}{h}=2x+h.$$

Quand on fait tendre h vers zéro, le rapport $\frac{k}{h}$ de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable tend vers la limite $2x$; on en conclut que la fonction proposée admet une dérivée $y'=2x$.

112. Considérons encore la fonction plus générale $y=ax^m$, dans laquelle l'exposant m est entier et positif, et le coefficient a constant. Si l'on donne à la variable x l'accroissement h, la fonction devient

$$a(x+h)^m=ax^m+\frac{m}{1}ax^{m-1}h+\frac{m(m-1)}{1.2}ax^{m-2}h^2+\ldots\ldots+ah^m;$$

elle éprouve l'accroissement

$$k=a(x+h)^m-ax^m=max^{m-1}h+\frac{m(m-1)}{1.2}ax^{m-2}h^2+\ldots\ldots+ah^m;$$

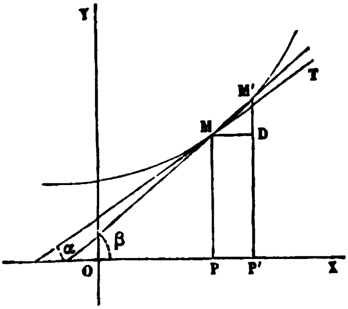
on peut rendre h assez petit pour que chacun des termes du second membre, et par conséquent leur somme k, ait une valeur aussi petite qu'on veut; ainsi la fonction y varie d'une manière continue avec x. En divisant par h, on a

$$\frac{k}{h} = max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} ax^{m-2}h + \ldots\ldots + ah^{m-1}.$$

Quand on fait tendre h vers zéro, tous les termes du second membre, à partir du second, tendent vers zéro; comme ils sont en nombre fini, leur somme tend aussi vers zéro. Le rapport $\frac{k}{h}$ tend donc vers la limite max^{m-1}; on en conclut que la fonction proposée admet une dérivée $y' = max^{m-1}$. Ainsi, *on obtient la dérivée de la fonction ax^m en multipliant cette fonction par l'exposant de x, et diminuant ensuite l'exposant d'une unité.*

113. En général, les fonctions continues admettent des dérivées; à cette propriété analytique des fonctions continues correspond la propriété géométrique des courbes qui les représentent d'admettre une tangente en chacun de leurs points.

Soit $y = f(x)$ la fonction proposée. Traçons dans un plan



deux droites fixes OX et OY, l'une horizontale, l'autre verticale; à partir du point O portons sur la première une longueur OP égale à une valeur quelconque de la variable x; au point P élevons une perpendiculaire sur laquelle nous prendrons une longueur PM égale

à la valeur correspondante de la fonction y, et opérons de même pour chaque valeur de x; la fonction étant continue, le lieu des points M ainsi obtenus formera une courbe qui représentera la marche de la fonction. Afin d'étendre ce mode de représentation à toutes les valeurs, on convient de porter les valeurs positives de x à droite du point O, les valeurs négatives à gauche; et, de même, on porte la valeur de y sur la perpendiculaire, au-dessus si elle est positive, au-dessous si elle est négative.

Cela posé, donnons à la variable x un accroissement $PP'=h$, la fonction éprouvera un accroissement k représenté par la différence M'D entre les deux perpendiculaires ou *ordonnées* voisines MP et M'P'. Traçons la sécante MM'; dans le triangle rectangle MM'D, le rapport $\frac{k}{h}$ est égal à la tangente de l'angle M'MD ou de l'angle β que fait cette sécante avec l'axe horizontal OX. Faisons maintenant diminuer l'accroissement h jusqu'à zéro, le point M' se rapprochera indéfiniment du point M; si la fonction $f(x)$ admet une dérivée, c'est-à-dire si le rapport $\frac{k}{h}$ tend vers une limite $f'(x)$, l'angle β tendra vers un angle limite α défini par l'équation

$$\operatorname{tang} \alpha = f'(x),$$

et la sécante MM', tournant autour du point M, tendra vers la droite MT qui fait avec l'axe horizontal OX l'angle α; cette position limite MT de la sécante est ce qu'on appelle la *tangente* à la courbe au point M.

114. Nous avons appelé dérivée d'une fonction continue $y=f(x)$ la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, quand ces deux accroisse-

ments tendent vers zéro. Cette dérivée $y'=f'(x)$ est une nouvelle fonction continue de x, qui admet une dérivée; cette dérivée de la *première dérivée* est la *seconde dérivée* de la fonction proposée; nous la représenterons par le symbole y'' ou $f''(x)$. La seconde dérivée $y''=f''(x)$ est une nouvelle fonction continue de x; sa dérivée est la *troisième dérivée* de la fonction proposée; nous la représenterons par y''' ou $f'''(x)$. En continuant de cette manière, on obtient les dérivées des différents ordres de la fonction proposée.

Dérivée d'une somme.

115. Soient u, v, w diverses fonctions continues de la variable x. Nous supposons que ces fonctions ont des dérivées que nous convenons de représenter par les notations u', v', w', accentuant simplement les lettres qui désignent les fonctions. Désignons par le symbole Δx l'accroissement que l'on donne à la variable x, et par Δu, Δv, Δw les accroissements ou variations qui en résultent pour les fonctions u, v, w.

La somme algébrique

$$y=u+v-w$$

des fonctions proposées est une nouvelle fonction de la variable x. En désignant par Δy la variation qu'éprouve cette fonction, on a évidemment

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v-\Delta w.$$

Chacune des fonctions u, v, w étant continue, on peut attribuer à la variable x un accroissement Δx assez petit pour que chacun des accroissements Δu, Δv, Δw, et par conséquent leur somme Δy, ait une valeur aussi petite qu'on veut;

ainsi la nouvelle fonction y varie aussi d'une manière continue avec x.

Si l'on divise tous les termes par Δx, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Supposons maintenant que l'accroissement Δx de la variable tende vers zéro, les accroissements correspondants Δu, Δv, Δw, Δy des fonctions tendront aussi vers zéro; le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tendra vers une limite qui, par définition, est la dérivée de la fonction u, dérivée que nous représenterons par u'; les rapports $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta w}{\Delta x}$ tendront de même vers des limites qui sont les dérivées des fonctions v et w; on en conclut que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend aussi vers une limite égale à $u' + v' - w'$; la fonction y admet donc une dérivée, et l'on a

$$y' = u' + v' - w'.$$

Ainsi, *la dérivée d'une somme algébrique est la somme des dérivées des diverses fonctions qui la composent.*

Dérivée d'une fonction entière.

116. Toute fonction entière du degré m est de la forme

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m.$$

C'est la somme algébrique des termes qui la composent; chacun des termes étant une fonction continue de x ayant une dérivée, leur somme, d'après le théorème précédent, est aussi une fonction continue de x, admettant une dérivée, et cette

dérivée est égale à la somme des dérivées des différents termes. Nous avons vu (n° 112) que, pour trouver la dérivée de la fonction entière élémentaire ax^m, il faut multiplier par l'exposant de x et diminuer ensuite cet exposant d'une unité : en appliquant cette règle à chacun des termes du polynôme, on a

$$f'(x) = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1}.$$

Le degré de chaque terme s'abaissant d'une unité, la dérivée est une fonction entière du degré $m-1$. Le terme constant A_m n'entre pas dans la dérivée, et, en effet, quand x varie, l'accroissement k de la constante étant nul, on a $\frac{k}{h} = 0$, et la dérivée est nulle.

En prenant la dérivée de cette première dérivée, on obtient la seconde dérivée du polynôme proposé

$$f''(x) = m(m-1)A_0x^{m-2} + (m-1)(m-2)A_1x^{m-3} + \ldots + 2A_{m-2};$$

c'est une fonction entière du degré $m-2$.

La troisième dérivée, ou la dérivée de la seconde dérivée,

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)A_0x^{m-3} + \ldots\ldots$$

est du degré $m-3$, et ainsi de suite, chaque opération diminuant le degré d'une unité.

La dérivée de l'ordre m est du degré zéro ; c'est une constante. Les dérivées suivantes sont nulles. Ainsi un polynôme du degré m a m dérivées.

Exemple.

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x + 6.$$

En appliquant la règle énoncée plus haut, on obtient les

dérivées successives

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 10x - 7, \\ f''(x) &= 6x + 10, \\ f'''(x) &= 6. \end{aligned}$$

Il est à remarquer que le terme constant du polynôme proposé n'entre pas dans la dérivée; que les deux derniers termes n'entrent pas dans la seconde dérivée, etc. Le premier terme entre seul dans la dernière dérivée.

Développement d'une fonction entière $f(x)$ suivant les puissances croissantes de h quand on remplace h par $x + h$.

117. Si dans la fonction entière

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m,$$

on remplace la variable x par $x+h$, il vient

$$f(x+h) = A_0(x+h)^m + A_1(x+h)^{m-1} + A_2(x+h)^{m-2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + A_{m-1}(x+h) + A_m;$$

en développant chaque terme suivant la loi du binômè, on a

$$\begin{array}{ll|l|l}
f(x+h)=A_0x^m & +mA_0x^{m-1} & \frac{h}{1}\quad +m(m-1)A_0x^{m-2} & \frac{h^2}{1.2}+\ldots+m(m-1)\ldots2.1.A_0\frac{h^m}{1.2\ldots m}\\
\quad +A_1x^{m-1} & +(m-1)A_1x^{m-2} & +(m-1)(m-2)A_1x^{m-3} & \ldots\ldots\ldots\ldots\\
\quad +A_2x^{m-2} & +(m-2)A_2x^{m-3} & +(m-2)(m-3)A_2x^{m-4} & \\
\quad \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
\quad \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
\quad +A_{m-1}x & +A_{m-1} & & \\
\quad +A_m & & &
\end{array}$$

Dans la première colonne verticale nous retrouvons le polynôme proposé $f(x)$. Dans la seconde colonne, qui contient h en facteur, nous trouvons la première dérivée $f'(x)$; et en effet on voit, d'après la règle du binôme, que l'on

obtient ce second polynôme en multipliant chacun des termes du polynôme proposé par l'exposant de x et diminuant cet exposé d'une unité. Le polynôme écrit dans la troisième colonne, et qui contient $\frac{h^2}{1.2}$ en facteur, se déduit du précédent suivant la même loi; c'est la dérivée de la première dérivée, ou la seconde dérivée $f''(x)$ du polynôme proposé. Le polynôme suivant, coefficient de $\frac{h^3}{1.2.3}$, est la troisième dérivée $f'''(x)$, et ainsi de suite. Enfin, dans le dernier terme, le coefficient de $\frac{h^m}{1.2\ldots\ldots m}$ est la dérivée d'ordre m. Le développement de $f(x+h)$ suivant les puissances croissantes de h s'écrira donc

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+f^{(m)}(x)\frac{h^m}{1.2\ldots\ldots m}.$$

Dérivée d'un produit.

118 Considérons d'abord le produit $y=uv$ de deux fonctions continues u et v d'une même variable x; nous supposons toujours que les fonctions u et v ont des dérivées. Si l'on donne à la variable x l'accroissement Δx, les fonctions u, v, y éprouvent des accroissements correspondants Δu, Δv, Δy, et l'on a

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v),$$

ou, en effectuant la multiplication et supprimant dans les deux membres les quantités égales y et uv,

$$\Delta y=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\times\Delta v.$$

On peut rendre l'accroissement Δx de la variable assez petit pour que les accroissements Δu et Δv, et par conséquent Δy, soient aussi petits qu'on veut ; ainsi la nouvelle fonction est aussi une fonction continue de la variable x. Divisons tous les termes par Δx, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \times \Delta v.$$

Si l'accroissement Δx de la variable x tend vers zéro, les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, tendent vers des limites qui sont les dérivées u', v' des fonctions u, v ; le troisième terme du second membre devient nul, parce que le premier facteur $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tend vers une valeur finie u', tandis que le second facteur tend vers zéro. On en conclut que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend lui-même vers une limite égale à $uv' + vu'$; la fonction y admet donc une dérivée, et l'on a

$$y' = uv' + vu'.$$

Ainsi, *la dérivée d'un produit de deux facteurs égale le premier facteur multiplié par la dérivée du second, plus le second multiplié par la dérivée du premier.*

Lorsqu'une fonction est multipliée par un facteur constant a, il est clair que sa dérivée est multipliée par le même facteur. Soit $y = au$; on a évidemment $\Delta y = a\Delta u$, et par suite $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\frac{\Delta u}{\Delta x}$; on en déduit $y' = au'$.

119. Considérons maintenant le produit $y = uvw$ de trois fonctions continues et admettant des dérivées. Si l'on regarde

le produit uv des deux premières fonctions comme ne formant qu'un seul facteur, la nouvelle fonction y, d'après le théorème précédent, sera aussi continue et admettra une dérivée

$$y' = (uv)w' + w(uv)'.$$

Si l'on développe la dérivée $(uv)'$ du produit uv, il vient

$$y' = uvw' + w(uv' + vu')$$

ou

$$y' = uvw' + uwv' + vwu'.$$

Ainsi, *la dérivée d'un produit de plusieurs facteurs est égale à la somme des produits que l'on obtient en multipliant la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres.*

Exemples.

1° $$y = (2x - 5)\ (4x^2 + 7x - 3),$$

$$y' = (2x - 5)\ (8x + 7) + (4x^2 + 7x - 3)2 = 24x^2 - 12x - 41.$$

2° $$y = x^3(x^2 + 1)\ (3x - 1),$$

$$\begin{aligned} y' &= x^3(x^2 + 1)3 + x^3(3x - 1)2x + (x^2 + 1)\ (3x - 1)3x^2 \\ &= 18x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 3x^2. \end{aligned}$$

Dérivée d'un quotient.

120. Soit le quotient $y = \dfrac{u}{v}$ de deux fonctions continues et admettant des dérivées. On a

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

et par suite

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

On peut rendre Δx assez petit pour que Δu et Δv et par conséquent Δy soient aussi petits qu'on veut; ainsi la nouvelle fonction y varie aussi d'une manière continue avec x. Si l'on divise par Δx, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Quand Δx tend vers zéro, les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent vers des limites qui sont les dérivées u' et v' des fonctions u et v; d'ailleurs le dénominateur a pour limite v^2; on en conclut que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers une limite égale à $\frac{vu'-uv'}{v^2}$; la fonction y admet donc une dérivée, et l'on a

$$y' = \frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

Ainsi, *la dérivée d'un quotient égale le dénominateur multiplié par la dérivée du numérateur, moins le numérateur multiplié par la dérivée du dénominateur, cette différence étant divisée par le carré du dénominateur.*

Exemples.

1°
$$y = \frac{x-1}{x+1},$$

$$y' = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

2°
$$y=\frac{5x^2-3x+4}{x^2-1},$$

$$y'=\frac{(x^2-1)(10x-3)-(5x^2-3x+4)2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^2-18x+3}{(x^2-1)^2}.$$

3°
$$y=\frac{a^2-x^2}{a^4+a^2x^2+x^4},$$

$$y'=\frac{-2x(a^4+a^2x^2+x^4)-(a^2-x^2)(2a^2x+4x^3)}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2}$$

$$=\frac{2x(x^4-2a^2x^2-2a^4)}{(x^4+a^2x^2+a^4)^2}.$$

Dérivée d'une puissance.

121. Nous avons déjà trouvé (n°112) la dérivée de la fonction $y=x^m$, quand l'exposant est entier et positif; cette dérivée est $y'=mx^{m-1}$. Nous verrons que la même règle s'étend à un exposant quelconque.

Considérons d'abord le cas où l'exposant m est de la forme $\frac{1}{n}$, n étant un nombre entier positif. On a $y=x^{\frac{1}{n}}$, et par suite $x=y^n$; x est une fonction entière de y; la fonction proposée y de x doit être regardée comme la fonction inverse de celle-ci. A une série de valeurs très-voisines de y correspondent des valeurs très-voisines de x; réciproquement à ces valeurs très-voisines de x, nous faisons correspondre la série des valeurs données primitivement à y; de cette manière, y est une fonction continue de x. Il est facile de trouver la dérivée de la fonction inverse, au moyen de la dérivée de la fonction directe; on a en effet

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)};$$

le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ a pour limite la dérivée de la fonction entière $x=y^n$, c'est-à-dire ny^{n-1}; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers une limite égale à $\frac{1}{ny^{n-1}}$; si l'on remplace y par $x^{\frac{1}{n}}$, cette expression devient $\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$. Ainsi, la fonction irrationnelle $y=x^{\frac{1}{n}}$ admet une dérivée $y'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=mx^{m-1}$.

122. Supposons maintenant que l'exposant m soit de la forme $\frac{p}{n}$. Si l'on pose $u=x^{\frac{1}{n}}$, la fonction proposée $y=x^{\frac{p}{n}}$ devient $y=u^p$; c'est une fonction entière de la quantité u, qui est elle-même une fonction irrationnelle de la variable x, de la forme considérée précédemment. Quand on donne à x un accroissement très-petit Δx, u éprouve un accroissement très-petit Δu, et par suite y un accroissement très-petit Δy; ainsi y est une fonction continue de x. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ a pour limite la dérivée de la fonction $u=x^{\frac{1}{n}}$, c'est-à-dire $\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ a pour limite la dérivée de la fonction $y=u^p$, dans laquelle on regarde u comme la variable indépendante, c'est-à-dire pu^{p-1}. On en conclut que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend lui-même vers une limite égale

$$pu^{p-1}\times\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Si l'on remplace u par sa valeur $x^{\frac{1}{n}}$, cette expression devient $\frac{p}{n}x^{\frac{p}{n}-1}$. Ainsi, la fonction proposée $y=x^{\frac{p}{n}}$ de la variable x admet une dérivée

$$y'=\frac{p}{n}x^{\frac{p}{n}-1}=mx^{m-1}.$$

123. Supposons enfin l'exposant m négatif, et soit $m=-n$, n étant un nombre positif, entier ou fractionnaire. On a

$$y=x^{-n}=\frac{1}{x^n};$$

en appliquant la règle du quotient, on obtient la dérivée

$$y'=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}=mx^{m-1}.$$

La même règle, comme on le voit, s'applique a tous les exposants.

Exemples.

1° $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, $\quad y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2° $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$, $\quad y'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$.

3° $y=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$, $\quad y'=-2x^{-3}=-\frac{1}{x^3}$.

4° $y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, $\quad y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

124. Considérons maintenant la fonction $y=u^m$ que l'on obtient en élevant à une puissance quelconque m une fonc-

tion continue u de la variable x et admettant une dérivée. Quand on donne à la variable x un accroissement très-petit Δx, u éprouve un accroissement très-petit Δu, et par suite y un accroissement très-petit Δy; ainsi y est une fonction continue de x. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ a pour limite la dérivée u' de la fonction u; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ a pour limite la dérivée de la fonction $y=u^m$, dans laquelle on regarde u comme la variable indépendante, c'est-à-dire mu^{m-1}. On en conclut que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend lui-même vers une limite égale à $mu^{m-1}\times u'$, et par conséquent que y, considérée comme une fonction de x, admet une dérivée

$$y'=mu^{m-1}\times u'.$$

Ainsi, *on obtient la dérivée de la puissance d'une fonction en multipliant par l'exposant, diminuant l'exposant d'une unité, et multipliant le résultat par la dérivée de cette fonction.*

COROLLAIRE. *La dérivée d'une racine carrée égale la dérivée de la fonction placée sous le signe radical divisée par deux fois le radical;* car, en appliquant la règle précédente à la fonction

$$y=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$y'=\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}u'=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Exemples.

1° $$y=\sqrt{2x^3-4x^2+5},\qquad y'=\frac{6x^2-8x}{2\sqrt{2x^3-4x^2+5}}.$$

2° $$y=x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2},$$

$$y'=(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}+2x^2\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^4+a^2x^2-4x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

3° $$y=(a+bx^m)^n,$$

$$y'=n(a+bx^m)^{n-1}\,mbx^{m-1}=mnbx^{m-1}(a+bx^m)^{n-1}.$$

4° $$y=a+\frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{c}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{d}{x^2}=a+bx^{-\frac{2}{3}}-cx^{-\frac{4}{3}}+dx^{-2},$$

$$y'=-\frac{2}{3}bx^{-\frac{5}{3}}+\frac{4}{3}cx^{-\frac{7}{3}}-2dx^{-3}=-\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}}+\frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}}-\frac{2d}{x^3}.$$

5° $$y=\sqrt[4]{\left(a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right)^3}=\left(a-bx^{-\frac{1}{2}}+(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}},$$

$$y'=\frac{3}{4}\left(a-bx^{-\frac{1}{2}}+(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}\times\left(\frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}x(c^2-x^2)^{-\frac{1}{3}}\right).$$

Dérivée de la fonction exponentielle.

125. Nous avons vu (n° 97) que la fonction exponentielle

$$y=a^x,$$

dans laquelle a est un nombre positif constant, varie d'une manière continue avec x. Si l'on donne à la variable x l'accroissement h, la fonction éprouve un accroissement

$$k=a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1),$$

et le rapport des deux accroissements est

$$\frac{k}{h}=a^x\frac{a^h-1}{h}.$$

Lorsque h est très-petit, la différence a^h-1 est très-petite; posons donc

$$a^h-1=\alpha,$$

d'où

$$a^h=1+\alpha,$$

et, en prenant les logarithmes népériens des deux membres,

$$h\mathrm{L}a=\mathrm{L}(1+\alpha),$$

$$h=\frac{\mathrm{L}(1+\alpha)}{\mathrm{L}a}.$$

Remplaçons h par sa valeur, l'expression du rapport devient

$$\frac{k}{h}=a^x\frac{\alpha\,\mathrm{L}a}{\mathrm{L}(1+\alpha)}=\frac{a^x\mathrm{L}a}{\frac{1}{\alpha}\mathrm{L}(1+\alpha)}=\frac{a^x\mathrm{L}a}{\mathrm{L}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Lorsque h tend vers zéro, α tend aussi vers zéro, et la quantité $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ devient égale à e (n° 83); mais $\mathrm{L}e=1$; le rapport $\frac{k}{h}$ tend donc vers une limite égale à $a^x\mathrm{L}a$, et par conséquent la fonction proposée admet une dérivée

$$y'=a^x\mathrm{L}a.$$

Ainsi, *pour avoir la dérivée d'une fonction exponentielle, il suffit de multiplier cette fonction par le logarithme népérien de la base.*

Considérons en particulier la fonction exponentielle $y=e^x$;

puisque $Le = 1$, on a $y' = e^x$. Ainsi, *la dérivée de la fonction e^x est cette fonction elle-même*. La fonction e^x jouit de la propriété caractéristique de se reproduire elle-même par la dérivation.

Dérivée de la fonction logarithmique.

126. La fonction $y = \log x$ est l'inverse de la fonction exponentielle $x = a^y$; à chaque valeur réelle et positive de x correspond une valeur réelle de y, et une seule, et quand x varie d'une manière continue, y varie aussi d'une manière continue. On a évidemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)};$$

le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ a pour limite la dérivée de la fonction exponentielle $x = a^y$, c'est-à-dire $a^y La$; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers une limite égale à $\frac{1}{a^y La}$, ou plus simplement à $\frac{1}{xLa}$. Ainsi, la fonction proposée $y = \log x$ admet une dérivée

$$y' = \frac{1}{xLa}.$$

Dans le système népérien, la fonction $y = Lx$ admet pour dérivée $\frac{1}{x}$.

Dérivée du sinus.

127. On a défini en trigonométrie les fonctions circulaires. La fonction

$$y = \sin x$$

varie d'une manière continue avec l'arc x; quand x croît de o à $\frac{\pi}{2}$, y croît de o à 1; x croissant ensuite de $\frac{\pi}{2}$ à π, y décroît de 1 à o. Lorsqu'on donne à la variable x un accroissement h, la fonction éprouve un accroissement

$$k = \sin(x+h) - \sin x.$$

Si l'on transforme en produit cette différence de sinus, on a

$$k = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

et par suite

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Quand l'accroissement h de la variable tend vers zéro, le rapport $\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ du sinus à l'arc $\frac{h}{2}$ tend vers l'unité, tandis que le second facteur se réduit à $\cos x$; le rapport $\frac{k}{h}$ tend donc vers une limite égale à $\cos x$, et par conséquent la fonction proposée admet une dérivée

$$y' = \cos x.$$

Ainsi, *la dérivée du sinus est le cosinus.*

Dérivée du cosinus.

128. La fonction

$$y = \cos x$$

varie aussi d'une manière continue avec x. On a de la même manière

$$\frac{k}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

et par suite

$$\lim\frac{k}{h}=-\sin x.$$

Ainsi, *la dérivée du cosinus est le sinus pris en signe contraire.*

Au moyen de ce qui précède, on obtient aisément les dérivées successives du sinus et du cosinus :

$$\begin{array}{ll} y=\sin x, & y=\cos x, \\ y'=\cos x, & y'=-\sin x, \\ y''=-\sin x, & y''=-\cos x, \\ y'''=-\cos x, & y'''=\sin x, \\ y^{(\text{iv})}=\sin x, & y^{(\text{iv})}=\cos x, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On voit que les dérivées se reproduisent périodiquement de quatre en quatre. Après deux dérivations, les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ se reproduisent avec des signes contraires.

Dérivées de la tangente et de la sécante.

129. La fonction

$$y=\operatorname{tang} x,$$

étant égale au quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$ de deux fonctions continues, qui ont des dérivées, admet aussi une dérivée que l'on obtiendra d'après la règle du n° 120 ; on a ainsi

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

De même la cotangente

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

a pour dérivée

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

La sécante pouvant se mettre sous la forme

$$y = \text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x},$$

on obtiendra sa dérivée par la règle des quotients

$$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

De même la cosécante

$$y = \text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x}$$

a pour dérivée

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Dérivées des fonctions circulaires inverses.

130. La définition des fonctions circulaires inverses exige quelques explications, parce qu'à chaque valeur de la va-

riable correspondent une infinité d'arcs. Considérons d'abord la fonction

$$y = \text{arc tang}\, x.$$

Pour définir la fonction d'une manière précise, on donne la valeur y_0 de l'arc pour une valeur particulière x_0 de la tangente. Quand la tangente x varie d'une manière continue à partir de x_0, l'un des arcs correspondants varie d'une manière continue à partir de y_0 ; cet arc variable est la fonction y. Par exemple, si l'on suppose que y s'annule avec x, la fonction y variera de o à $+\frac{\pi}{2}$, quand x variera de o $+\infty$, et de o à $-\frac{\pi}{2}$, quand x variera de o à $-\infty$.

La fonction proposée est l'inverse de la fonction directe

$$x = \text{tang}\, y.$$

Nous avons vu que le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ tend vers une limite égale à $\frac{1}{\cos^2 y}$, le rapport inverse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers une limite égale à $\cos^2 y$, et l'on a

$$y' = \cos^2 y.$$

Mais on sait que

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2};$$

on en conclut

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

131. Soit la fonction inverse

$$y = \text{arc sin}\, x.$$

On en déduit

$$x = \sin y.$$

Nous avons vu que le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ tend vers une limite égale à $\cos y$; le rapport inverse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers une limite égale à $\frac{1}{\cos y}$, et l'on a

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Puisque $\sin y = x$, on a $\cos y = \pm\sqrt{1 - x^2}$; si l'on remplace $\cos y$ par sa valeur, il vient

$$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - x^2}}.$$

Il faudra mettre devant le radical le signe de $\cos y$; si l'arc se termine dans le premier ou dans le quatrième quadrant, on prendra le signe $+$; s'il se termine dans le second ou dans le troisième, on prendra le signe $-$.

122. On obtient de la même manière la dérivée de la fonction inverse

$$y = \operatorname{arc} \cos x.$$

On a, en effet,

$$x = \cos y.$$

Le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ tendant vers une limite égale à $-\sin y$, le rapport inverse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers une limite égale à $-\frac{1}{\sin y}$. On a donc

$$y' = -\frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\pm\sqrt{1 - x^2}}.$$

On mettra devant le radical le signe de $\sin y$.

Résumé.

133. Nous avons trouvé les dérivées des fonctions simples que l'on considère ordinairement en mathématiques ; il est nécessaire de les apprendre par cœur ; le tableau suivant permet de les embrasser d'un coup d'œil.

$y = x^m$, $\quad y' = mx^{m-1}$, m étant quelconque,

$y = a^x$, $\quad y' = a^x \mathrm{L}a$,

$y = e^x$, $\quad y' = e^x$,

$y = \log x$, $\quad y' = \dfrac{1}{x\mathrm{L}a}$,

$y = \mathrm{L}x$, $\quad y' = \dfrac{1}{x}$,

$y = \sin x$, $\quad y' = \cos x$,

$y = \cos x$, $\quad y' = -\sin x$,

$y = \operatorname{tang} x$, $\quad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

$y = \operatorname{arc} \sin x$, $\quad y' = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$,

$y = \operatorname{arc} \cos x$, $\quad y' = \dfrac{-1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$,

$y = \operatorname{arc} \operatorname{tang} x$, $\quad y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Dérivée d'une fonction de fonction.

134. A l'aide des fonctions simples que nous venons d'énumérer, on peut former une infinité de fonctions composées. Soit y une fonction $f(u)$ de la quantité u, qui est elle-même une fonction $\varphi(x)$ de la variable x ; par l'intermédiaire de la variable u, y pourra être considérée comme une fonction

de x; c'est ce qu'on appelle une *fonction de fonction.* Nous supposons que u est une fonction continue de x admettant une dérivée u' ou $\varphi'(x)$, et que $f(u)$ est une fonction continue de u admettant une dérivée $f'(u)$. Si l'on donne à x un accroissement très-petit Δx, il en résulte pour u un accroissement très-petit Δu, et par suite pour y un accroissement très-petit Δy; ainsi y est une fonction continue de la variable x. On a évidemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Quand l'accroissement Δx tend vers zéro, le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tend vers la limite u', le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ tend vers la limite $f'(u)$; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers une limite égale au produit $f'(u)\times u'$; on en conclut que y, considérée comme fonction de x, admet une dérivée

$$y'=f'(u)\times u'.$$

Ainsi, *la dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées des fonctions qui la composent.*

Nous avons eu déjà l'occasion de considérer des fonctions de fonctions, quand nous avons cherché la dérivée d'une puissance fractionnaire $y=x^{\frac{p}{n}}$, ou d'une puissance $y=u^m$ d'une fonction de x (nos 122 et 124); le mode de raisonnement que nous avons employé alors est le même que celui qui nous a servi pour établir le théorème général.

135. Ce théorème peut être généralisé : soit y une fonction $F(v)$ de la quantité v, qui est une fonction $f(u)$ de la quantité u, qui est elle-même une fonction $\varphi(x)$ de la va-

riable x ; par l'intermédiaire des quantités v et u, y pourra être considérée comme une fonction de la variable x. Nous supposons que les fonctions $F(v)$, $f(u)$, $\varphi(x)$ sont continues et admettent des dérivées $F'(v)$, $f'(u)$, $\varphi'(x)$. Si l'on donne à x un accroissement très-petit Δx, il en résulte pour u un accroissement très-petit Δu, et par suite pour v un accroissement très-petit Δv, et aussi pour y un accroissement très-petit Δy ; ainsi y est une fonction continue de x. On a évidemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta v}\times\frac{\Delta v}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Quand Δx tend vers zéro, les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta u}$, $\frac{\Delta y}{\Delta v}$ tendent respectivement vers des limites u', $f'(u)$, $F'(v)$; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers une limite égale au produit $F'(v)\times f'(u)\times u'$. On en conclut que y, considérée comme fonction de x, admet une dérivée

$$y'=F'(v)\times f'(u)\times u'.$$

136. Puisque les fonctions simples que nous avons étudiées ont des dérivées, il résulte du théorème précédent que les fonctions composées que l'on formera en combinant ces fonctions simples d'une manière quelconque admettront aussi des dérivées. En voici quelques exemples.

1° $y=\sin x^2$. Si l'on pose $u=x^2$, on a $y=\sin u$, et l'on voit que y est une fonction de fonction. L'application du théorème donne

$$y'=\cos u\times u'=2x\cos x^2.$$

2° $y=e^{\sin x}$. Si l'on pose $u=\sin x$, on a encore une fonc-

tion de fonction $y = e^u$, qui admet pour dérivée

$$y' = e^u \times u' = e^{\sin x} \cos x.$$

3° $y = e^{\sin x^2}$. Si l'on pose $u = x^2$, $v = \sin u$, on a une fonction de fonction $y = e^v$ plus compliquée que les précédentes ; le même théorème donne

$$y' = e^v \cdot \cos u \cdot 2x = 2xe^{\sin x^2} \cos x^2.$$

4° $y = \mathrm{L}(x + \sqrt{1 + x^2})$. En posant $u = x + \sqrt{1 + x^2}$, on a la fonction de fonction $y = \mathrm{L}u$, qui admet pour dérivée

$$y' = \frac{1}{u} \times u' = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

5° $y = x^x$. En remarquant que, d'après la définition même des logarithmes, on a identiquement $x = e^{\mathrm{L}x}$, on pourra mettre cette fonction sous la forme $y = e^{x\mathrm{L}x}$; si l'on pose $u = x\mathrm{L}x$, on a la fonction de fonction $y = e^u$, qui admet pour dérivée

$$y' = e^u u' = e^u(1 + \mathrm{L}x) = x^x(1 + \mathrm{L}x).$$

Par l'habitude, on arrive à décomposer les fonctions complexes par la pensée, sans employer les lettres auxiliaires u et v.

Exercices.

Trouver les dérivées des fonctions suivantes :

1° $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, *Rép.* : $y' = \dfrac{x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

2° $y = \tan x - \cot x$, $y' = \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

3° $y = x(\mathrm{L}x - 1)$, $y' = \mathrm{L}x$.

4° $y = e^x(x - 1)$, $y' = xe^x$.

5° $y = x\sin x + \cos x$, $y' = x\cos x$.

6° $y = -x\cos x + \sin x$, $y' = x\sin x$.

7° $y = \frac{1}{2}\mathrm{L}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, $y' = \frac{1}{x^2-1}$.

8° $y = \mathrm{L}(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

9° $y = \mathrm{L}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$, $y' = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

10° $y = \arccos\left(\frac{a-2x}{a}\right)$, $y' = \frac{1}{\pm\sqrt{ax-x^2}}$.

11° $y = \frac{1}{6}\mathrm{L}\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $y' = \frac{1}{x^3-1}$.

12° $y = \mathrm{arc\,séc}\,x$, $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE LA VARIATION DES FONCTIONS.

137. Soit $f(x)$ une fonction continue, admettant une dérivée $f'(x)$. Nous avons appelé dérivée d'une fonction la limite du rapport de l'accroissement k de la fonction à l'accroissement h de la variable, quand ces accroissements tendent vers zéro.

Lorsque h est très-petit, le rapport $\frac{k}{h}$ diffère très-peu de sa limite; on a donc

$$\frac{k}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

d'où

$$k = h[f'(x) + \varepsilon],$$

ε étant une quantité très-petite qui s'annule avec h. Quand la dérivée $f'(x)$ n'est pas nulle, on peut déterminer une quantité positive α telle que, si l'on attribue à h une valeur positive quelconque inférieure à α, la quantité ε soit moindre que $f'(x)$ en valeur absolue. C'est alors la quantité $f'(x)$ qui donne son signe à la quantité placée entre parenthèses ; h étant positive, il en résulte que la variation k de la fonction a le signe de la dérivée $f'(x)$. Si la dérivée est positive, k est positive, et, par suite, pour toute valeur de h inférieure à α, $f(x+h)$ est plus grande que $f(x)$. Si la dérivée est négative, k est négative et par suite $f(x+h)$ plus petite que $f(x)$. Ainsi, *quand la variable croît à partir d'une valeur* x, *si pour cette valeur la dérivée est positive, la fonction commence par croître ; si la dérivée est négative, la fonction commence par décroître.*

Supposons maintenant que la dérivée d'une fonction reste positive pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et x_1, la quantité x_1 étant plus grande que x_0 ; il est évident, d'après ce qui précède, que si x croît de x_0 à x_1, la fonction ira en croissant dans tout cet intervalle. Au contraire, si la dérivée est négative pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et x_1, la fonction ira en décroissant.

Cette proposition subsiste, même quand la dérivée s'annule dans l'intervalle de x_0 à x_1; il suffit qu'elle ne change pas de signe. Supposons, par exemple, que la dérivée, restant positive de x_0 à x_1, s'annule pour une valeur intermédiaire a ; appelons α une quantité positive très-petite ; quand x varie de x_0 à $a - \alpha$, la dérivée étant positive, la fonction croît ; x variant ensuite de $a + \alpha$ à x_1, et la dérivée restant positive,

la fonction croît encore; comme l'intervalle 2α est aussi petit qu'on veut et que la fonction est continue, on en conclut que la fonction va sans cesse en croissant, quand x croît de x_0 à x_1.

138. Lorsqu'une fonction, après avoir augmenté, décroît ensuite, elle passe par un *maximum*, c'est-à-dire par une valeur plus grande que les valeurs voisines. Au contraire, lorsqu'une fonction, après avoir diminué, croît ensuite, elle passe par un *minimum*, c'est-à-dire par une valeur plus petite que les valeurs voisines.

Dans le premier cas, la fonction commençant par croître, la dérivée est d'abord positive; la fonction décroissant ensuite, la dérivée devient négative. Ainsi, quand la fonction passe par un maximum, la dérivée change de signe, de positive devenant négative.

Dans le second cas, la fonction commençant par décroître, la dérivée est d'abord négative; la fonction croissant ensuite, la dérivée devient positive. Ainsi, quand la fonction passe par un minimum, la dérivée change de signe, de négative devenant positive.

Les réciproques sont vraies : lorsque la dérivée change de signe, la fonction passe par un maximum ou par un minimum. Si la dérivée de positive devient négative, la fonction, croissant d'abord pour décroître ensuite, passe par un maximum. Si la dérivée de négative devient positive, la fonction, décroissant d'abord pour croître ensuite, passe par un minimum.

Ordinairement, la dérivée d'une fonction continue est aussi finie et continue; elle change de signe en passant par la valeur intermédiaire zéro. On obtiendra donc, en général,

les valeurs de x qui rendent la fonction maximum ou minimum en cherchant les valeurs de x qui annulent la dérivée, et qui en outre lui font éprouver un changement de signe.

Exemples.

139. QUESTION I. ***Étudier la variation du volume d'un cylindre circulaire droit dont la surface totale est constante.***

Appelons x le rayon de la base, y la hauteur, et représentons la surface totale donnée par $2\pi a^2$, nous avons la relation

$$2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi a^2,$$

ou plus simplement

$$x^2 + xy = a^2.$$

Le volume V du cylindre a pour expression

$$V = \pi x^2 y,$$

et si l'on remplace y par sa valeur $y = \frac{a^2 - x^2}{x}$ tirée de la relation précédente,

$$V = \pi x(a^2 - x^2) = \pi(a^2 x - x^3);$$

c'est une fonction de la variable indépendante x.

Les valeurs de x et de y devant rester positives, le rayon x de la base ne pourra varier que de o à a. Quand x varie de o à a, on voit que le volume part de zéro pour revenir à zéro, en passant par une suite de valeurs finies et positives; il commence par croître pour décroître ensuite, et par conséquent passe certainement par un maximum. Pour étudier d'une manière complète la variation de cette fonction, prenons sa dérivée

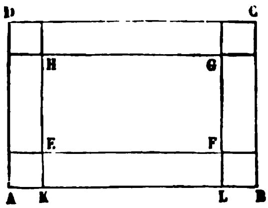
$$V' = \pi(a^2 - 3x^2) = 3\pi\left(\frac{a^2}{3} - x^2\right).$$

La dérivée est positive pour les valeurs positives de x infé-

rieures à $\frac{a}{\sqrt{3}}$, négative pour les valeurs de x supérieures à $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Si donc on fait croître x de o à $\frac{a}{\sqrt{3}}$, le volume ira en augmentant de zéro à une certaine valeur maximum; x croissant ensuite de $\frac{a}{\sqrt{3}}$ à a, le volume ira en diminuant de cette valeur maximum à zéro.

Pour $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, on a $y=\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Ainsi, parmi tous les cylindres qui ont même surface totale, le plus grand est celui dont la hauteur est égale au diamètre de la base.

140. QUESTION II. *Étant donnée une feuille de carton rectangulaire* ABCD, *si, après avoir mené des parallèles aux quatre côtés à la même distance, on enlève les petits carrés dans les angles, et qu'on relève les portions rectangulaires telles que* EKLF, *on forme une boîte à fond rectangulaire* EFGH. *Étudier la variation du volume de cette boîte.*



Appelons $2a$ et $2b$ les côtés AB et AD de la feuille de carton, x la distance variable AK à laquelle on mène les parallèles; le fond de la boîte est un rectangle ayant pour côtés $EF=2(a-x)$, $EH=2(b-x)$, et pour surface $4(a-x)(b-x)$; la hauteur de la boîte est x; le volume a donc pour expression

$$V=4x(a-x)(b-x).$$

Si l'on suppose $a>b$, x peut varier de o à b; le volume part de zéro pour revenir à zéro, en conservant des valeurs finies; il

commence par croitre pour décroître ensuite, et par conséquent passe par un maximum. La dérivée de cette fonction est

$$V' = 4[3x^2 - 2(a+b)x + ab].$$

La parenthèse est un polynôme entier du second degré. Si dans ce polynôme on remplace x par zéro, on a un résultat positif $+ab$; si l'on remplace x par b, on a un résultat négatif $-b(a-b)$; ainsi le polynôme a ses deux racines réelles, la plus petite x' comprise entre o et b, la plus grande x'' supérieure à b, et l'on écrira

$$V' = 12(x-x')(x-x'').$$

Quand x croît de o à x', la dérivée étant positive, le volume augmente de zéro à une certaine valeur maximum; x croissant ensuite de x' à b, la dérivée devient négative et le volume diminue de cette valeur maximum jusqu'à zéro.

Le volume acquiert sa valeur maximum pour la valeur

$$x = x' = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{3}.$$

141. QUESTION III. *Étudier la variation de la surface totale d'un cylindre circulaire droit inscrit dans une sphère donnée.*

Si l'on appelle x le rayon de la base et $2y$ la hauteur du cylindre, on a

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

$$S = 2\pi x^2 + 4\pi xy;$$

d'où

$$S = 2\pi\left(x^2 + 2x\sqrt{r^2 - x^2}\right).$$

Le rayon x peut varier de o à r. La fonction S, que l'on veut étudier, a pour dérivée

$$S' = \frac{4\pi\left[x\sqrt{r^2-x^2} + (r^2 - 2x^2)\right]}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Quand x croît de o à $\frac{r}{\sqrt{2}}$, la dérivée est positive et la fonction croît de zéro à $3\pi r^2$. Faisons maintenant croître x de $\frac{r}{\sqrt{2}}$ à r; on a

$$S' = \frac{4\pi\left[x\sqrt{r^2-x^2}-(2x^2-r^2)\right]}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

La parenthèse est la différence de deux quantités positives; si l'on multiplie et si l'on divise par la somme, il vient

$$S' = \frac{4\pi\left[x^2(r^2-x^2)-(2x^2-r^2)^2\right]}{\left[x\sqrt{r^2-x^2}+(2x^2-r^2)\right]\sqrt{r^2-x^2}},$$

$$S' = \frac{4\pi(-5x^4+5r^2x^2-r^4)}{\left[x\sqrt{r^2-x^2}+(2x^2-r^2)\right]\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Le dénominateur étant positif, il suffit d'examiner le signe du numérateur, qui est un polynôme entier du second degré en x^2. Quand, dans ce polynôme pris sous sa première forme, on remplace x^2 par $\frac{r^2}{2}$, on obtient un résultat positif; quand on remplace x^2 par r^2, on obtient un résultat négatif; on en conclut que les deux racines du trinôme sont réelles, que la plus petite x'^2 est inférieure à $\frac{r^2}{2}$ et la plus grande x''^2 comprise entre $\frac{r^2}{2}$ et r^2. On a donc

$$S' = \frac{-20\pi(x^2-x'^2)(x^2-x''^2)}{\left[2\sqrt{r^2-x^2}+(2x^2-r^2)\right]\sqrt{r^2-x^2}}.$$

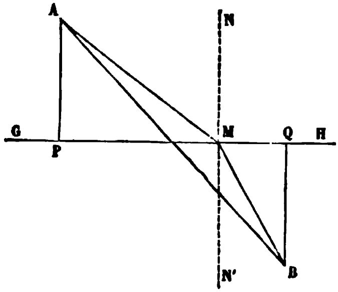
Quand x varie de $\frac{r}{\sqrt{2}}$ à x'', la dérivée est positive, et la

fonction continue a croitre de $3\pi r^2$ jusqu'à une valeur maximum; x variant ensuite de x'' à r, la dérivée est négative, et la fonction décroît de la valeur maximum à $2\pi r^2$. Le maximum de la surface est donné par la valeur

$$x = x'' = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

142. QUESTION IV. *Soit* GH *la ligne de séparation de deux milieux; la lumière se meut dans ces deux milieux avec des vitesses différentes* v *et* v'. *Quel chemin doit suivre le rayon lumineux pour aller du point* A *au point* B *dans le temps le plus court?*

Nous pouvons déterminer la position des points A et B par leurs distances AP et BQ à la droite GH, et par la distance PQ; nous désignerons ces trois longueurs connues par a, b, c. Si la vitesse était la même dans les deux milieux, il est clair que la lumière suivrait le chemin le plus court, c'est-à-dire la droite AB; mais la vitesse v



dans le milieu supérieur étant plus grande que la vitesse v' dans le milieu inférieur, il y a avantage à ce que la lumière parcoure une plus grande longueur dans le premier milieu et une moindre dans le second; elle suivra donc une ligne brisée telle que AMB. Appelons x la distance cherchée PM; la lumière parcourt dans les deux milieux les longueurs

$$AM = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad MB = \sqrt{b^2 + (c - x)^2};$$

elle emploie à les parcourir les temps

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v}, \qquad \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v'};$$

elle met donc, pour aller de A en B, en suivant le chemin AMB, le temps

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v}+\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v'}.$$

Ce temps est une fonction de x, considérée comme variable indépendante ; elle a pour dérivée

$$t'=\frac{x}{v\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v'\sqrt{b^2+(c-x^2)}}.$$

Au point M menons une perpendiculaire NN′ à GH ; l'angle AMN est l'angle d'incidence i, l'angle BMN′ l'angle de réfraction i'. Comme on a

$$\sin i=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AM}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$\sin i'=\frac{\mathrm{QM}}{\mathrm{BM}}=\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

il en résulte cette expression de la dérivée

$$t'=\frac{\sin i}{v}-\frac{\sin i'}{v'}.$$

Quand le point M se déplace de P vers Q, l'angle i augmente de zéro à une certaine valeur, tandis que l'angle i' diminue au contraire d'une certaine valeur à zéro ; il y a donc un point, et un seul, pour lequel la dérivée s'annule : avant, elle est négative ; au delà, elle devient positive. La fonction que l'on étudie diminue jusque-là pour augmenter ensuite.

Le minimum a lieu, quand on a

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin i'}{v'},$$

ou

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{v}{v'}.$$

C'est par cette considération du temps minimum que Fermat a trouvé pour la première fois la loi de la réfraction de la lumière.

143. QUESTION V. *Étudier la variation de la surface d'un secteur sphérique de volume constant.*

Appelons x le rayon du secteur, y la hauteur de la calotte qui lui sert de base, et supposons que le volume soit égal à celui d'une sphère de rayon donné a; nous aurons la relation

$$\frac{2}{3}\pi x^2 y = \frac{4}{3}\pi a^3,$$

ou plus simplement

$$x^2 y = 2a^3, \quad y = \frac{2a^3}{x^2}.$$

La surface du secteur a pour expression

$$S = \pi x\sqrt{y(2x - y)} + 2\pi xy,$$

et, si l'on remplace y par sa valeur,

$$S = 2\pi a\left[\frac{2a^2}{x} + \sqrt{a\left(x - \frac{a^3}{x^2}\right)}\right].$$

La hauteur y de la calotte étant plus petite que le diamètre $2x$, le rayon x est plus grand que a; ainsi la va-

riable x peut croître à partir de a indéfiniment. La surface a pour dérivée

$$S' = \frac{\pi a^2 [x^3 + 2a^3 - 4a\sqrt{a(x^3 - a^3)}]}{x^2\sqrt{a(x^3 - a^3)}}.$$

Le numérateur est la différence de deux quantités; si l'on multiplie les deux termes de la fraction par la somme, on a

$$S' = \frac{\pi a^2 (x^6 - 12a^3x^3 + 20a^6)}{x^2\sqrt{a(x^3 - a^3)}[x^3 + 2a^3 + 4a\sqrt{a(x^3 - a^3)}]}.$$

Le dénominateur étant positif, il suffit d'examiner le signe du trinôme

$$x^6 - 12a^3x^3 + 20a^6,$$

qui est du second degré par rapport à x^3, et qui, décomposé en facteurs, s'écrit

$$(x^3 - 2a^3)(x^3 - 10a^3).$$

Quand x croît de a à $a\sqrt[3]{2}$, la dérivée étant positive, la surface croît; x croissant de $a\sqrt[3]{2}$ à $a\sqrt[3]{10}$, la dérivée est négative, et la surface décroît; x croissant ensuite indéfiniment au delà de $a\sqrt[3]{10}$, la dérivée est positive, et la surface augmente.

Examinons maintenant les formes successives par lesquelles passe le secteur. Lorsque $x = a$, on a $y = 2a$, $S = 4\pi a^2$; le secteur se réduit à une sphère de rayon a. Le rayon x croissant de a à $a\sqrt[3]{2}$, y décroît de $2a$ à $a\sqrt[3]{2}$; le secteur, qui est plus grand qu'un hémisphère, s'ouvre de plus en plus, jusqu'à ce qu'il arrive à la forme d'un hémisphère; la surface augmente de la valeur initiale $4\pi a^2$ au *maximum*

$3\pi a^2\sqrt[3]{4}$. Le rayon croissant ensuite de $a\sqrt[3]{2}$ à $a\sqrt[3]{10}$, y décroît de $a\sqrt[3]{2}$ à $\frac{a\sqrt[3]{10}}{5}$; le secteur, qui est maintenant moindre qu'un hémisphère, s'allonge, jusqu'à ce que la hauteur de la calotte ne soit que le cinquième du rayon; sa surface diminue du maximum $3\pi a^2\sqrt[3]{4}$ au *minimum* $\pi a^2\sqrt[3]{100}$. Le rayon x croissant ensuite au delà de $a\sqrt[3]{10}$ indéfiniment, y diminue et tend vers zéro; le secteur continue à s'allonger, et sa surface augmente indéfiniment.

On peut remarquer que la valeur minimum $\pi a^2\sqrt[3]{100}$, par laquelle passe la surface pour $x = a\sqrt[3]{10}$, est plus grande que la valeur initiale $4\pi a^2$. Ainsi, c'est quand le secteur a la forme d'une sphère que sa surface est la plus petite possible. Nous remarquerons encore que la surface passe *une* seule fois par toute valeur comprise entre la valeur initiale $4\pi a^2$ et le minimum $\pi a^2\sqrt[3]{100}$, *trois fois* par toute valeur comprise entre ce minimum et le maximum $3\pi a^2\sqrt[3]{4}$, et *une* seule fois par toute valeur plus grande que ce maximum.

144. QUESTION VI. *Étudier la variation du volume d'un secteur sphérique dont la surface totale est constante.*

On peut déduire cette question de la précédente. Il sera plus commode de prendre pour variable, non pas le rayon x du secteur ou la hauteur y de la calotte, mais le rapport $\frac{x}{y}$ de ces deux longueurs, rapport que nous désignerons par z. Cette nouvelle variable caractérisera la forme du solide et aura la même valeur pour tous les solides semblables.

Quand x croît de a à ∞, y décroît de $2a$ à 0, et par consé-

quent z croît de $\frac{1}{2}$ à ∞. Donnons à la nouvelle variable deux valeurs z et z'. Soient S et S′ les surfaces totales des solides correspondants, quand le volume V reste constant ; imaginons que l'on change les dimensions du second solide en le laissant semblable à lui-même, de manière que sa surface, qui était S′, devienne égale à S ; son volume, qui était V, acquerra la valeur V′ donnée par la relation

$$\left(\frac{V'}{V}\right)^2 = \left(\frac{S}{S'}\right)^3.$$

Ainsi, quand on passe d'une forme à une autre en laissant constant, soit le volume, soit la surface, on voit que la surface dans le premier cas, le volume dans le second cas, varient en sens contraires ; si la surface augmente, le volume diminue, ou inversement. A un minimum de la surface correspondra un maximum du volume et à un maximum de la surface un minimum du volume.

La variable z croissant de $\frac{1}{2}$ à 1, le secteur passe de la forme d'une sphère entière à celle d'un hémisphère et le volume diminue ; z croissant de 1 à 5, le volume augmente ; z croissant à partir de 5 indéfiniment, le volume diminue et tend vers zéro. Le volume a passé d'abord par un minimum, puis par un maximum.

La plupart des questions géométriques se correspondent ainsi deux à deux (voyez la première partie, n° 190).

Exercices.

1° Étudier la variation de la surface d'un trapèze inscrit dans un demi-cercle.

2° Étudier la variation de la surface totale d'un cône circulaire droit inscrit dans une sphère donnée.

3° Étudier la variation du volume d'un parallélipipède rectangle à base carrée dont la surface totale est donnée.

4° Étudier la variation du volume d'une niche de surface donnée.

5° On fait mouvoir une lumière sur une droite verticale; étudier la variation de la quantité de lumière reçue par une portion très-petite du plan horizontal.

6° On fait mouvoir une lumière sur un cercle; étudier la variation de la quantité de lumière reçue par une portion très-petite d'un diamètre fixe.

7° Sur les faces d'un cube on place six pyramides régulières de même hauteur; la surface totale étant donnée, étudier la variation du volume du solide ainsi formé.

8° Sur les faces d'un tétraèdre régulier on place quatre pyramides composées chacune de trois triangles isocèles égaux; la surface totale étant donnée, étudier la variation du volume du solide ainsi formé.

9° Un aréomètre est formé d'un cylindre de rayon donné terminé par deux cônes égaux; la surface totale étant donnée, étudier la variation du volume.

10° Étudier la variation de la surface d'un segment de cercle dont l'arc a une longueur donnée.

11° Un triangle est formé par trois arcs de cercle égaux entre eux et de longueur donnée; étudier la variation de la surface.

12° Un polygone régulier est formé par n arcs de cercle égaux entre eux et de longueur donnée; étudier la variation de la surface.

CHAPITRE III.

DÉRIVÉES D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES.

145. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des fonctions d'une seule variable; nous allons dire quelques mots des fonctions de plusieurs variables. Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes x et y (on nomme variables *indépendantes* des quantités qui varient d'une manière tout à fait arbitraire et indépendamment l'une de l'autre). Si, regardant y comme une constante, nous prenons la dérivée de la fonction par rapport à la variable x, nous aurons ce qu'on appelle la *dérivée partielle* de la fonction par rapport à x. De même, si, regardant x comme constante, nous prenons la dérivée par rapport à la variable y, nous aurons la dérivée partielle par rapport à y. Telles sont les deux dérivées partielles du premier ordre de la fonction proposée ; nous les désignerons par les notations f'_x et f'_y, l'indice indiquant la lettre par rapport à laquelle on prend la dérivée.

Si l'on prend deux fois successivement la dérivee, soit deux fois par rapport à x, soit une fois par rapport à x et une seconde fois par rapport à y, soit deux fois par rapport à y, on obtient trois dérivées partielles du second ordre que nous désignerons par les notations f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}. Et ainsi de suite.

Par exemple, soit la fonction

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 4y + 2.$$

En prenant les dérivées par rapport à x ou par rapport à y,

on a les deux dérivées partielles du premier ordre

$$f'_x = 6x - 5y - 3,$$
$$f'_y = -5x + 2y + 4.$$

En prenant la dérivée une seconde fois, soit par rapport à x, soit par rapport à y, on forme les trois dérivées partielles du second ordre

$$f''_{x^2} = 6, \quad f''_{xy} = -5, \quad f''_{y^2} = 2.$$

Les dérivées suivantes sont nulles.

Théorème sur les fonctions homogènes.

146. On dit qu'une fonction entière de x, y, z,..., est *homogène* et du degré m, lorsque la somme des exposants de ces lettres dans chacun des termes est constante et égale à m. Afin de préciser, nous supposerons que la fonction contient trois lettres x, y, z. Chacun des termes est de la forme $Ax^n y^p z^q$, et l'on peut écrire

$$f(x, y, z) = \Sigma Ax^n y^p z^q.$$

En prenant la dérivée par rapport à chacune des lettres, on a

$$f'_x = \Sigma nAx^{n-1} y^p z^q,$$
$$f'_y = \Sigma pAx^n y^{p-1} z^q,$$
$$f'_z = \Sigma qAx^n y^p z^{q-1}.$$

Si l'on multiplie ces dérivées respectivement par x, y, z, il vient

$$xf'_x = \Sigma nAx^n y^p z^q,$$
$$yf'_y = \Sigma pAx^n y^p z^q,$$
$$zf'_z = \Sigma qAx^n y^p z^q.$$

On en déduit

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = \Sigma(n+p+q)\mathrm{A}x^n y^p z^q.$$

La somme des exposants $n+p+q$ étant constante et égale à m, on a

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = m\Sigma\mathrm{A}x^n y^p z^q,$$

ou

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = mf(x, y, z).$$

Dérivées des fonctions composées.

147. Soit une fonction $f(u, v)$ de deux quantités u et v qui sont elles-mêmes des fonctions de la variable x; il est clair que y est en définitive une fonction de la variable x. On demande sa dérivée. Si l'on donne à la variable x l'accroissement Δx, il en résulte pour u et v les accroissements Δu et Δv, pour y l'accroissement Δy, et l'on a

$$\Delta y = f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v),$$

ou

$$\Delta y = f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v) + f(u, v+\Delta v) - f(u, v).$$

En divisant par Δx, on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$+ \frac{f(u, v+\Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \times \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Supposons maintenant que Δx tende vers zéro, les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent vers les dérivées u' et v' des fonctions u et v. Dans le rapport

$$\frac{f(u, v+\Delta v) - f(u, v)}{\Delta v},$$

le numérateur est l'accroissement qu'éprouve la fonction $f(u, v)$, quand on donne à la variable v l'accroissement Δv, u restant constante; la limite de ce rapport est donc la dérivée partielle $f'_v(u, v)$ de la fonction $f(u, v)$ par rapport à v, et le second terme a pour limite

$$f'_v(u, v) \times v'.$$

Considérons maintenant le rapport

$$\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u};$$

le numérateur est l'accroissement qu'éprouve la fonction $f(u, v+\Delta v)$ quand on donne à la variable u l'accroissement Δu; ce rapport, en vertu du principe établi au n° 137, est donc égal à

$$f'_u(u, v+\Delta v)+\varepsilon,$$

la quantité ε s'évanouissant avec Δu. D'autre part, $f'_u(u, v)$ étant une fonction continue de v, on a

$$f'_u(u, v+\Delta v) = f'_u(u, v)+\varepsilon',$$

la quantité ε' s'évanouissant avec Δv; il en résulte que le rapport considéré est égal à

$$f'_u(u, v)+\varepsilon+\varepsilon'.$$

Si maintenant on fait tendre Δx vers zéro, Δu et Δv tendent simultanément vers zéro, ainsi que ε et ε', et le rapport a pour limite $f'_u(u, v)$. La limite du premier terme est donc

$$f'_u(u, v) \times u'.$$

On a de la sorte

$$y' = f'_u(u, v) \times u' + f'_v(u, v) \times v'.$$

Ainsi, *la dérivée d'une fonction de deux fonctions* u *et* v *d'une même variable* x *égale la dérivée partielle de la fonction proposée par rapport à* u *multipliée par la dérivée de* u, *plus la dérivée partielle par rapport à* v *multipliée par la dérivée de* v.

Exemples.

1° Prenons comme exemple la fonction $y = x^x$, dont nous avons déjà trouvé la dérivée (n° 136). Si l'on pose $u = x$, $v = x$, on a $y = u^v$; d'où, en appliquant le théorème précédent,

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v \mathrm{L}u \,.\, v' = x^x + x^x \mathrm{L}x = x^x(1 + \mathrm{L}x).$$

2° $y = (\sin x)^{4x}$. Posant $u = \sin x$, $v = 4x$, on aura de même $y = u^v$; d'où

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v \mathrm{L}u \,.\, v' = 4x \cos x (\sin x)^{4x-1} + 4(\sin x)^{4x} \mathrm{L}(\sin x).$$

Dérivées des fonctions implicites.

148. On dit qu'une fonction est *implicite*, lorsqu'elle est liée à la variable par une équation non résolue. Ainsi l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

dans laquelle le premier membre est une fonction quelconque des deux variables x et y, définit une fonction implicite y de x. Si l'on pouvait résoudre l'équation, on en déduirait $y = \varphi(x)$ et la fonction deviendrait *explicite*.

On obtient aisément la dérivée d'une fonction implicite. En effet, prenons la dérivée de la fonction $f(x, y)$, dans laquelle nous regardons x comme la variable indépendante,

et y comme une fonction de x; cette dérivée, d'après le théorème précédent, est égale à

$$f'_x + f'_y \times y'.$$

Comme la fonction $f(x, y)$ est constamment nulle, sa dérivée est aussi constamment nulle, et l'on a l'équation

$$f'_x + f'_y \times y' = 0,$$

d'où l'on déduit

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Telle est l'expression de la dérivée de la fonction implicite y.

Exemples.

1° Considérons la fonction implicite y définie par l'équation

$$x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0.$$

On a, d'après la formule que nous venons d'établir,

$$y' = -\frac{2x - 4y + 2}{-4x + 2y} = \frac{2y - x - 1}{y - 2x}.$$

L'équation proposée, étant du second degré par rapport à y, peut être résolue, ce qui donne

$$y = 2x \pm \sqrt{3x^2 - 2x}.$$

La fonction devenant ainsi explicite, on trouve directement sa dérivée,

$$y' = 2 \pm \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x}}.$$

En remplaçant y par sa valeur dans la première expression de y', on obtient la seconde.

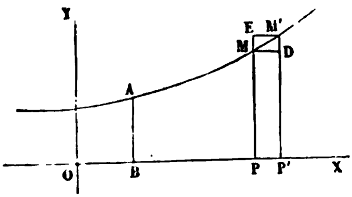
$$2^\circ \quad 3x^5 - 4xy + y^3 = 0, \qquad y' = -\frac{15x^4 - 4y}{-4x + 3y^2}.$$

CHAPITRE IV.

DES FONCTIONS PRIMITIVES.

149. On appelle *fonction primitive* d'une fonction donnée une fonction dont la fonction proposée est la dérivée. Nous démontrerons d'abord l'existence de la fonction primitive, que l'on puisse ou non l'exprimer au moyen des signes de l'algèbre.

Soit $y = f(x)$ la fonction proposée; représentons cette fonction par une courbe, comme nous l'avons expliqué au n° 113, en portant sur la ligne horizontale OX, à partir du point O, des longueurs égales aux diverses valeurs de la variable x, et élevant des perpendiculaires ou ordonnées égales aux valeurs correspondantes de y. Considérons



l'aire ABMP comptée à partir d'une ordonnée fixe AB jusqu'à une ordonnée mobile MP ; cette aire est une fonction de x; car si l'on fait croître x, l'ordonnée MP s'éloignant, l'aire augmente ; nous désignerons cette fonction par F (x). Je vais démontrer que la fonction F (x), ainsi définie, est une fonction primitive de la fonction proposée $f(x)$. Concevons, en effet, que l'on donne à x un accroissement PP$' = h$; l'accroissement k de la fonction F (x) sera l'aire du trapèze curviligne MPP$'$M$'$; par les points M et M$'$

menons les horizontales MD, M'E; l'aire du trapèze curviligne est comprise entre celles des rectangles MPP'D, EPP'M'; ces rectangles ayant pour mesures $MP \times h$, $M'P' \times h$, on a, si la fonction $f(x)$ croit,

$$MP \times h < k < M'P' \times h,$$

et, en divisant par h,

$$MP < \frac{k}{h} < M'P'.$$

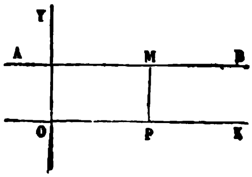
Quand h tend vers zéro, l'ordonnée M'P' devient égale à MP, et, par conséquent, le rapport $\frac{k}{h}$ tend vers une limite qui est égale à l'ordonnée MP. Ainsi la fonction $F(x)$ admet une dérivée qui est la fonction proposée $f(x)$; cette fonction $F(x)$ est donc une fonction primitive de $f(x)$.

Il résulte de là qu'une fonction continue quelconque a une fonction primitive, que l'on peut représenter par une aire plane. Si à la fonction primitive $F(x)$ on ajoute un constante arbitraire C, on aura encore une fonction primitive $F(x)+C$; car la constante ne donne rien dans la dérivée.

Nous verrons, par ce qui suivra, que l'addition de cette constante arbitraire donne toutes les fonctions primitives de la fonction proposée.

150. Démontrons d'abord que, lorsqu'une fonction continue a sa dérivée constamment nulle, cette fonction est constante.

Imaginons la fonction figurée par une ligne. Si l'on désigne par α l'angle que fait la tangente à la ligne en un point quelconque avec l'horizontale OX, nous savons (n° 113) que la dérivée de la fonction est égale à tang α. Puisque



la dérivée est constamment nulle, l'angle α est lui-même constamment nul. Ainsi la ligne en chacun de ses points a sa tangente horizontale; ce ne peut être qu'une ligne droite horizontale AB. L'ordonnée MP de chacun des points de cette ligne droite est constante; on en conclut que la fonction proposée a une valeur constante.

Soient maintenant deux fonctions $F(x)$ et $\varphi(x)$, ayant même dérivée $f(x)$, je dis que ces deux fonctions ne peuvent différer que par une constante. En effet, on a, par hypothèse,

$$\varphi'(x) = f(x),$$
$$F'(x) = f(x);$$

si l'on retranche ces deux égalités l'une de l'autre, il vient

$$\varphi'(x) - F'(x) = 0.$$

Mais $\varphi'(x) - F'(x)$ est la dérivée de la fonction $\varphi(x) - F(x)$; puisque cette dérivée est constamment nulle, la fonction est constante; donc

$$\varphi(x) - F(x) = C.$$

Nous avons dit (n° 149) que, lorsqu'on a trouvé une fonction primitive $F(x)$ de la fonction proposée, et que l'on y ajoute une constante arbitraire, on obtient une nouvelle fonction primitive $F(x) + C$. Il résulte de ce qui précède que l'on forme ainsi toutes les fonctions primitives de la fonction proposée, puisque toute autre fonction primitive ne diffère de la première que par une constante. Cette fonction primitive $F(x) + C$, renfermant une constante arbitraire, s'appelle, pour cette raison, fonction primitive *générale* de la fonction proposée.

On peut déterminer la constante de manière que la fonc-

tion primitive ait une valeur donnée A pour une valeur donnée a de x; on posera

$$F(a)+C=A,$$

d'où

$$C=A-F(a).$$

Si l'on veut, par exemple, que la fonction primitive s'annule pour $x=a$, on posera

$$F(a)+C=0;$$

d'où

$$C=-F(a),$$

et la fonction primitive sera $F(x)-F(a)$.

La représentation géométrique de la fonction primitive montre bien que cette fonction renferme une constante arbitraire; car on peut compter l'aire à partir d'une ordonnée initiale AB quelconque (n° 149), et quand on change la position de cette ordonnée initiale, on modifie évidemment l'aire d'une quantité constante. Déterminer la constante de manière que la fonction primitive s'annule pour $x=a$, c'est compter l'aire à partir de l'ordonnée initiale qui correspond à $x=a$.

151. La recherche des fonctions primitives est une opération très-compliquée; nous nous bornerons aux cas les plus simples. Considérons d'abord une fonction entière

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-1}x+A_m;$$

sa fonction primitive est

$$\frac{A_0x^{m+1}}{m+1}+\frac{A_1x^m}{m}+\frac{A_2x^{m-1}}{m-1}+\ldots\ldots+\frac{A_{m-1}x^2}{2}+A_mx+C;$$

car, en prenant la dérivée de ce polynôme, on retrouve le polynôme proposé. Ainsi, *pour avoir la fonction primitive d'une fonction entière, on augmente tous les exposants d'une unité, et*

on divise chaque terme par l'exposant ainsi augmenté. Cette opération élève le degré d'une unité.

Par exemple, le polynôme

$$x^2 - 5x + 7$$

a pour fonction primitive générale

$$\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C.$$

Si l'on veut que la fonction primitive s'annule pour $x = 0$, on fera $C = 0$.

La même règle s'applique aux exposants quelconques.

Exemples.

1°
$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$
$$F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C.$$

2°
$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2},$$
$$F(x) = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

3°
$$f(x) = -\frac{2}{3} ax^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3} bx^{-\frac{7}{3}} - 2dx^{-3},$$
$$F(x) = ax^{-\frac{2}{3}} - bx^{-\frac{4}{3}} + dx^{-2} + C.$$

Voici encore d'autres cas où l'on peut trouver immédiatement la fonction primitive :

1° $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = Lx + C.$

2° $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, $F(x) = \text{arc tang}\, x + C.$

3° $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \text{arc}\sin x + C.$

4° $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \text{arc}\cos x + C.$

5° $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x + C.$

6° $f(x) = a^x$, $F(x) = \dfrac{a^x}{La} + C.$

7° $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x + C.$

8° $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x + C.$

9° $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \text{tang}\, x + C.$

10° $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, $F(x) = -\cot x + C.$

11° $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $F(x) = \text{séc}\, x + C.$

12° $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$, $F(x) = -\text{coséc}\, x + C.$

Souvent le théorème sur les fonctions de fonctions permet de trouver la fonction primitive.

1° $f(x) = \dfrac{1}{x+a}$, $F(x) = L(x+a) + C.$

2° $f(x) = \dfrac{1}{(x+a)^m} = (x+a)^{-m}$, $F(x) = \dfrac{-1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C.$

3° $f(x) = \dfrac{1}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\,\dfrac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$, $F(x) = \dfrac{1}{a}\,\text{arc tang}\,\dfrac{x}{a} + C.$

4° $f(x) = \dfrac{x}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2x}{a^2+x^2}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}L(a^2+x^2) + C.$

On voit ici que, le numérateur $2x$ étant la dérivée du dé-

nominateur a^2+x^2, la fonction $\frac{2x}{a^2+x^2}$ est la dérivée de $L(a^2+x^2)$.

5° $f(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $F(x)=\sqrt{a^2+x^2}+C$.

6° $f(x)=e^{ax}$, $F(x)=\frac{e^{ax}}{a}+C$.

7° $f(x)=\cos ax$, $F(x)=\frac{\sin ax}{a}+C$.

8° $f(x)=\frac{Lx}{x}$, $F(x)=\frac{1}{2}(Lx)^2+C$.

9° $f(x)=\frac{1}{xLx}$, $F(x)=LLx+C$.

10° $f(x)=\frac{1}{x(Lx)^m}$, $F(x)=\frac{-1}{(m-1)(Lx)^{m-1}}+C$.

11° $f(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$, $F(x)=\text{arc tang}(e^x)+C$.

CHAPITRE V.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES.

152. Nous avons effectué (n° 117) le développement de $f(x_0+h)$ suivant les puissances entières et croissantes de h, quand la fonction est entière, et nous avons trouvé

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{1}+f''(x_0)\frac{h^2}{1.2}+\ldots\ldots$$
$$+f^{(m)}(x_0)\frac{h^m}{1.2\ldots\ldots m},$$

m étant le degré de la fonction. Le développement s'arrête à

la dérivée d'ordre m; les dérivées suivantes sont nulles. La même forme de développement s'applique à une fonction continue quelconque; mais alors la suite se prolonge indéfiniment et constitue une série.

Supposons que la fonction $f(x)$ reste finie et continue, ainsi que ses $n+1$ premières dérivées, quand x varie de x_0 à x_0+h. Considérons le polynôme

$$f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{1}+f''(x_0)\frac{h^2}{1.2}+\ldots\ldots+f^n(x_0)\frac{h^n}{1.2\ldots\ldots n},$$

du degré n par rapport à h, et représentons par

$$\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots\ldots(n+1)}\mathrm{R}$$

la différence qui existe entre $f(x_0+h)$ et ce polynôme, nous aurons

$$(1)\quad f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{1}+f''(x_0)\frac{h^2}{1.2}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+f^n(x_0)\frac{h^n}{1.2\ldots\ldots n}+\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots\ldots(n+1)}\mathrm{R}.$$

Si l'on pose $x_1=x_0+h$, d'où $x_1-x_0=h$, et si l'on fait passer tous les termes dans le premier membre, on écrira

$$(2)\quad f(x_1)-f(x_0)-\frac{x_1-x_0}{1}f'(x_0)-\frac{(x_1-x_0)^2}{1.2}f''(x_0)-\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots-\frac{(x_1-x_0)^n}{1.2\ldots\ldots n}f^n(x_0)-\frac{(x_1-x_0)^{n+1}}{1.2\ldots\ldots(n+1)}\mathrm{R}=0.$$

La quantité inconnue R dépend des deux quantités x_0 et x_1.

Considérons la fonction

$$(3)\quad \varphi(x)=f(x_1)-f(x)-\frac{(x_1-x)}{1}f'(x)-\frac{(x_1-x)^2}{1.2}f''(x)-\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots-\frac{(x_1-x)^n}{1.2\ldots\ldots n}f^n(x)-\frac{(x_1-x)^{n+1}}{1.2\ldots\ldots(n+1)}\mathrm{R}.$$

Pour former cette fonction, nous avons remplacé x_0 par la variable x dans l'expression (2), excepté dans la quantité R que nous laissons constante; pour abréger, nous la désignerons par $\varphi(x)$. Si l'on en prend la dérivée, on remarque que les termes se détruisent deux à deux; les deux derniers termes subsistent seuls, et l'on a

$$\varphi'(x) = -\frac{(x_1 - x)^n}{1.2\ldots\ldots n} f^{n+1}(x) + \frac{(x_1 - x)^n}{1.2\ldots\ldots n} \mathrm{R},$$

ou, plus simplement,

$$\varphi'(x) = \frac{(x_1 - x)^n}{1.2\ldots\ldots n} [\mathrm{R} - f^{n+1}(x)]. \tag{4}$$

D'après les hypothèses faites, la fonction $\varphi(x)$ et sa dérivée $\varphi'(x)$ restent finies et continues, quand x varie de x_0 à x_1. Pour $x = x_0$, la fonction $\varphi(x)$ se réduit à l'expression (2), qui est égale à zéro; pour $x = x_1$, les deux premiers termes se détruisent, les suivants deviennent nuls, et la fonction est aussi égale à zéro. Ainsi, quand x varie de x_0 à x_1, la fonction $\varphi(x)$ part de zéro pour revenir à zéro; comme elle reste finie et continue, elle passe par un maximum en valeur absolue; la dérivée $\varphi'(x)$ change donc de signe, et comme elle reste elle-même finie et continue, elle change de signe en passant par zéro. On en conclut que la dérivée s'annule pour une valeur de x comprise entre x_0 et x_1, c'est-à-dire entre x_0 et $x_0 + h$; cette valeur de x, qui annule la dérivée, peut être représentée par $x_0 + \theta h$, θ étant une fraction plus petite que l'unité, et l'on a $\varphi'(x_0 + \theta h) = 0$. On en déduit, en vertu de l'équation (4),

$$\mathrm{R} = f^{n+1}(x_0 + \theta h).$$

L'égalité (1) devient ainsi

$$(5)\qquad f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{1}+f''(x_0)\frac{h^2}{1.2}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+f^n(x_0)\frac{h^n}{1.2\ldots n}+\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}f^{n+1}(x_0+\theta h).$$

Lorsque le terme complémentaire tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment, la formule donne naissance à une série convergente; c'est la série de Taylor.

153. On peut obtenir le terme complémentaire sous une forme plus générale. Si l'on représente le terme complémentaire par

$$\frac{h^{p+1}}{1.2\ldots n(p+1)}\mathrm{R},$$

p étant un nombre entier quelconque, on a, comme précédemment,

$$f(x_1)-f(x_0)-\frac{x_1-x_0}{1}f'(x_0)-\frac{(x_1-x_0)^2}{1.2}f''(x_0)-\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots-\frac{(x_1-x_0)^n}{1.2\ldots n}f^n(x_0)-\frac{(x_1-x_0)^{p+1}}{1.2\ldots n(p+1)}\mathrm{R}=0.$$

La fonction

$$\varphi(x)=f(x_1)-f(x)-\frac{x_1-x}{1}f'(x)-\frac{(x_1-x)^2}{1.2}f''(x)-\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots-\frac{(x_1-x)^n}{1.2\ldots n}f^n(x)-\frac{(x_1-x)^{p+1}}{1.2\ldots n(p+1)}\mathrm{R}$$

s'annule encore pour $x=x_0$ et $x=x_1$; sa dérivée

$$\varphi'(x)=\frac{(x_1-x)^p}{1.2\ldots n}[\mathrm{R}-(x_1-x)^{n-p}f^{n+1}(x)]$$

s'annule par conséquent pour une valeur intermédiaire $x_0+\theta h$; on en déduit

$$\mathrm{R}=h^{n-p}(1-\theta)^{n-p}f^{n+1}(x_0+\theta h),$$

et, par suite, le terme complémentaire

$$\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n(p+1)}(1-\theta)^{n-p}f^{n+1}(x_0+\theta h).$$

Le nombre entier p est arbitraire. Si l'on fait $p=n$, on retrouve la première forme; si l'on fait $p=0$, on obtient une seconde forme

$$(6)\qquad \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n}(1-\theta)^n f^{n+1}(x_0+\theta h),$$

qui est souvent utile dans les applications*.

154. De la formule (5), dans laquelle on remplace x_0 par o et h par x, on déduit

$$(7)\qquad f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1}+f''(0)\frac{x^2}{1.2}+\ldots..$$
$$+f^n(0)\frac{x^n}{1.2\ldots..n}+\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots..(n+1)}f^{n+1}(\theta x).$$

On peut aussi mettre le terme complémentaire sous la forme

$$(8)\qquad \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots..n}(1-\theta)^n f^{n+1}(\theta x).$$

Lorsque le terme complémentaire tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment, la fonction est développée en série convergente, suivant les puissances entières et croissantes de x.

155. Appliquons cette formule au développement de la fonction e^x. Toutes les dérivées de cette fonction sont égales à la fonction elle-même e^x, et se réduisent par conséquent à

* Le principe de cette ingénieuse démonstration de la série de Taylor est dû à M. Homersham Cox (VI[e] volume du *Journal de Cambridge*); M. Rouché, professeur à l'École centrale, l'a perfectionnée d'une manière notable et lui a donné la forme simple sous laquelle nous l'avons présentée.

l'unité pour $x=0$; on a donc

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots\ldots n}$$
$$+ \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots\ldots(n+1)} \times e^{\theta x}.$$

Supposons d'abord que la variable x ait une valeur positive. Soit p un nombre entier plus grand que x; donnons à n une valeur plus grande que p. Le terme complémentaire peut se mettre sous la forme

$$\frac{x^p}{1.2\ldots\ldots p} \times e^{\theta x} \times \frac{x^{n-p+1}}{(p+1)(p+2)\ldots\ldots(n+1)};$$

le premier facteur reste constant, quand n augmente; le second est moindre que e^x; le troisième, qui est le produit de $n-p+1$ facteurs

$$\frac{x}{p+1} \cdot \frac{x}{p+2} \ldots\ldots \frac{x}{n+1}$$

plus petits que $\frac{x}{p}$, est plus petit que $\left(\frac{x}{p}\right)^{n-p+1}$, et tend vers zéro quand n augmente indéfiniment; le terme complémentaire tend donc aussi vers zéro. Considérons la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots;$$

d'après ce que nous venons de dire, la différence entre la somme des $n+1$ premiers termes de cette série et la fonction e^x, différence qui est égale au terme complémentaire, tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment. On en conclut que la série est convergente, et que la somme de ses $n+1$ premiers termes tend vers une limite égale à e^x. On écrira donc

$$(9) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Supposons maintenant que x ait une valeur négative $-x'$; soit p un nombre entier plus grand que x' et donnons à n une valeur plus grande que p. La valeur absolue du terme complémentaire est égale à

$$\frac{x'^p}{1.2\ldots\ldots p} \times e^{-\theta x'} \times \frac{x'^{n-p+1}}{(p+1)(p+2)\ldots\ldots(n+1)};$$

le premier facteur conservant une valeur constante quand n augmente, le second étant plus petit que l'unité, et le troisième tendant vers zéro, on en conclut, comme précédemment, que le terme complémentaire tend vers zéro. Ainsi, la fonction e^x est développable en une série (9), convergente pour toutes les valeurs de x, positives ou négatives.

On obtient de la même manière le développement des fonctions $\sin x$ et $\cos x$ en séries convergentes pour toutes les valeurs de x,

$$(10)\qquad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

$$(11)\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots$$

Séries logarithmiques.*

156. Considérons encore la fonction $L(1+x)$. On a

$$f'(x) = (1+x)^{-1},$$
$$f''(x) = -1\,(1+x)^{-2},$$
$$f'''(x) = 1.2\,(1+x)^{-3},$$
$$f^{\text{IV}}(x) = -1.2.3\,(1+x)^{-4},$$

et la formule (7) donne

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots \mp \frac{x^n}{n} \pm \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

Le terme complémentaire est

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}.$$

Lorsque la valeur de x est positive et inférieure ou égale à l'unité, le terme complémentaire, qui est plus petit que $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment, et la fonction se développe en série convergente.

Supposons maintenant que x ait une valeur négative $-x'$, moindre que l'unité en valeur absolue. Nous prendrons le terme complémentaire sous sa seconde forme (8)

$$-\frac{x'^{n+1}(1-\theta)^n}{(1-\theta x')^{n+1}} = -\frac{x'^{n+1}}{1-\theta x'}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x'}\right)^n.$$

La fraction $\frac{1-\theta}{1-\theta x'}$ étant plus petite que l'unité et le dénominateur $1-\theta x'$ plus grand que $1-x'$, la valeur absolue du terme complémentaire est plus petite que

$$\frac{x'^{n+1}}{1-x'};$$

elle tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment. La fonction $L(1+x)$ se développe donc en une série

$$(12) \qquad L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots,$$

convergente pour les valeurs de x comprises entre -1 exclusivement et $+1$ inclusivement.

Calcul des logarithmes népériens.

157. De la série précédente, on déduit des séries qui ser-

vent au calcul des tables de logarithmes. Cherchons la différence entre les logarithmes de deux nombres entiers consécutifs n et $n+1$. Puisque

$$L(n+1)-Ln=L\frac{n+1}{n}=L\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

si dans la série (12) on remplace x par la fraction $\frac{1}{n}$, on a

$$(13)\qquad L(n+1)-Ln=\frac{1}{n}-\frac{1}{2.n^2}+\frac{1}{3.n^3}-\cdots\cdots$$

Mais cette série ne converge pas assez rapidement, et il faudrait prendre un très grand nombre de termes pour avoir les logarithmes avec une certaine approximation.

On arrive à une série beaucoup plus rapidement convergente de la manière suivante : si l'on retranche l'une de l'autre les deux séries

$$L(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$$

$$L(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\cdots$$

les termes de degrés pairs se détruisent, ceux de degrés impairs s'ajoutent, et l'on a

$$L(1+x)-L(1-x)=L\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right).$$

Posons maintenant

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n},$$

d'où

$$x=\frac{1}{2n+1},$$

et remplaçons x par sa valeur, nous obtiendrons la série

$$(14) \qquad L\frac{n+1}{n} = L(n+1) - Ln$$

$$= 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\cdots\right],$$

qui converge d'autant plus rapidement que le nombre n est plus grand.

158. C'est au moyen de la série (14) que l'on calcule les logarithmes népériens.

En faisant $n=1$ dans cette série, on a

$$L2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3.3^3} + \frac{2}{5.3^5} + \frac{2}{7.3^7} + \cdots\cdots$$

On commencera par réduire en décimales les fractions $\frac{2}{3}, \frac{2}{3^3}, \frac{2}{3^5}, \frac{2}{3^7}, \ldots\ldots$, en divisant successivement par 9; puis on les divisera par les nombres impairs 1, 3, 5, 7,..... Les dix premiers termes donnent, avec dix décimales exactes,

$$L2 = 0{,}6931471806.$$

Si dans la série (14) on fait $n=2$, on a

$$L3 - L2 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3.5^3} + \frac{2}{5.5^5} + \cdots\cdots,$$

on abrége le calcul en remarquant que diviser par 25 revient à diviser par 100 et à multiplier par 4. Les sept premiers termes donnent, avec dix décimales exactes,

$$L3 = 1{,}0986122887.$$

On obtient L4 en doublant L2,

$$L4 = 1{,}3862943612.$$

On calcule ensuite L5 par la série

$$L5 - L4 = \frac{2}{9} + \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \cdots\cdots$$

on obtient les fractions $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{9^3}$, $\frac{2}{9^5}$, ..., en divisant par 3 les fractions déjà calculées $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3^5}$, $\frac{2}{3^9}$,..... Les cinq premiers termes donnent, avec dix décimales exactes,

$$L5 = 1{,}6094379124.$$

On obtiendra L6 en ajoutant L3 et L2. On calcule L7 par la série en faisant $n=6$, et ainsi de suite indéfiniment.

Calcul des logarithmes vulgaires. *

159. Quand on veut calculer les logarithmes vulgaires, il faut d'abord chercher le module. Pour cela, on calcule le logarithme népérien de 2, au moyen de la série

$$L2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3.3^3} + \frac{2}{5.3^5} + \frac{2}{7.3^7} + \cdots\cdots,$$

comme nous l'avons expliqué dans le numéro précédent, ce qui donne

$$L2 = 0{,}6931471806.$$

En doublant ce logarithme, on obtient le logarithme népérien de 4,

$$L4 = 1{,}3862943612.$$

On détermine ensuite le logarithme népérien de 5 au moyen de la série

$$L5 - L4 = \frac{2}{9} + \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \cdots\cdots,$$

en remarquant que ces nouvelles fractions se déduisent de celles qui ont servi au calcul de L2, comme nous l'avons expliqué. Une fois qu'on a trouvé L2 et L5, l'addition de ces deux logarithmes donne

$$L10 = 2,30258\,50930.$$

On sait que le module M des logarithmes vulgaires est égal à $\frac{1}{L10}$ (n°107); divisant 1 par L10, on aura la valeur de ce module

$$M = 0,43429\,44819.$$

En le doublant, on a

$$2M = 0,86858\,89638.$$

On obtient les logarithmes vulgaires en multipliant par le module les logarithmes népériens. La série (14) devient ainsi

$$(15)\qquad \log(n+1) - \log n = 2M\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\cdots\right].$$

C'est cette série que l'on emploie pour calculer les logarithmes vulgaires, en séparant les termes et l'écrivant sous la forme

$$\log(n+1) - \log n = \frac{2M}{2n+1} + \frac{2M}{3(2n+1)^3} + \frac{2M}{5(2n+1)^5} + \cdots\cdots$$

On obtiendra le logarithme vulgaire de 2, en multipliant par M le logarithme népérien de 2 qui a servi à trouver le module. On calculera log 3 par la série

$$\log 3 - \log 2 = \frac{2M}{5} + \frac{2M}{3.5^3} + \frac{2M}{5.5^5} + \cdots\cdots;$$

on calculera d'abord les fractions $\frac{2M}{5}, \frac{2M}{5^3}, \frac{2M}{5^5}, \ldots$, en divisant successivement par 25, plus simplement en multipliant par 4 et divisant par 100; on divisera ces fractions respectivement par 1, 3, 5..... ; en ajoutant les résultats, on aura log 3. On aura log 4 en doublant log 2. On obtiendra log 5, et en multipliant par M le logarithme népérien de 5 qui a servi à trouver le module. On trouvera log 6 en ajoutant log 2 et log 3. On calculera log 7 par la série

$$\log 7 - \log 6 = \frac{2M}{13} + \frac{2M}{3.13^3} + \frac{2M}{5.13^5} + \ldots\ldots$$

On aura log 8 en ajoutant log 4 et log 2, log 9 en doublant log 3; on sait d'ailleurs que log 10 = 1. On calculera log 11 par la série, et ainsi de suite indéfiniment.

La série (15) convergeant de plus en plus rapidement à mesure que l'on s'élève dans l'échelle des nombres entiers, les calculs deviendront bientôt très-simples. On aura, par exemple, le logarithme de 101 avec huit décimales exactes au moyen de deux termes seulement

$$\log 101 - 2 = \frac{2M}{201} + \frac{2M}{3.201^3}.$$

On calculera d'abord le premier terme en divisant le nombre connu 2M par 201; puis on déduira le second terme du premier en divisant celui-ci par 3.201^2 ou par 121203.

Le premier terme de la série suffira pour le logarithme de 1001,

$$\log 1001 - 3 = \frac{2M}{2001},$$

et à plus forte raison au delà.

160. C'est ainsi que l'on procède pour calculer les tables des logarithmes des nombres entiers. Les petites tables de Lalande contiennent les logarithmes des nombres entiers de 1 à 10000, avec cinq décimales; celles de Callet, les logarithmes des nombres entiers de 1 à 100 000, avec sept décimales. Pour avoir le logarithme d'un nombre fractionnaire $n+h$, compris, soit entre 1 000 et 10 000, soit entre 10000 et 100 000, on cherche dans les tables le logarithme de la partie entière n, et on y ajoute la différence tabulaire

$$\Delta = \log(n+1) - \log n$$

multipliée par la fraction h (1re partie, n° 225). L'accroissement vrai du logarithme est

$$\delta = \log(n+h) - \log n = \log\frac{n+h}{n} = \log\left(1+\frac{h}{n}\right);$$

la proportion donne l'accroissement approché

$$h\Delta = h\log\frac{n+1}{n} = h\log\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

l'erreur commise est

$$(16)\qquad \delta - h\Delta = \log\left(1+\frac{h}{n}\right) - h\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Nous allons démontrer d'abord que cette erreur est positive. Si, dans le développement de $L(1+x)$, on s'arrête au premier terme, on a

$$(17)\qquad L(1+x) = \frac{x}{1+\theta x},$$

la lettre θ désignant un nombre positif plus petit que l'unité; cette expression montre que, lorsque la variable x est positive, la valeur de $L(1+x)$ est plus grande que $\frac{x}{1+x}$. Cela

posé, considérons la fonction $\frac{L(1+x)}{x}$, dont la dérivée est

$$\frac{\frac{x}{1+x}-L(1+x)}{x^2};$$

cette dérivée étant négative, la valeur de la fonction diminue, quand la variable positive x augmente. Si donc nous attribuons à x les deux valeurs $\frac{h}{n}$ et $\frac{1}{n}$, dont la seconde est plus grande que la première, nous aurons

$$\frac{L\left(1+\frac{h}{n}\right)}{\frac{h}{n}} > \frac{L\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}},$$

ou plus simplement

$$L\left(1+\frac{h}{n}\right) > hL\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

et par suite

$$\delta > h\Delta.$$

Cherchons maintenant une limite de l'erreur. D'après l'équation (17), on a

$$\Delta = ML\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{M}{n+\theta},$$

$$\delta = ML\left(1+\frac{h}{n}\right) = \frac{Mh}{n+\theta' h},$$

θ et θ' désignant des nombres positifs plus petits que l'unité; on en déduit

$$\frac{\delta}{h\Delta} = \frac{n+\theta}{n+\theta' h} < \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n},$$

et, par suite,

$$\delta - h\Delta < \frac{h\Delta}{n},$$

et, comme l'accroissement h de la variable est plus petit que l'unité,

$$\delta - h\Delta < \frac{\Delta}{n}. \tag{18}$$

Avec les tables de Lalande, le nombre n étant égal ou supérieur à 10^3 et la différence tabulaire moindre que $\frac{44}{10^5}$, l'erreur commise est plus petite que $\frac{44}{10^5 \times 10^3}$, et par conséquent plus petite que $\frac{5}{10^7}$, ou que $\frac{1}{2.10^6}$, c'est-à-dire qu'une demi-unité du sixième ordre décimal; elle n'affecte donc pas les cinq premiers chiffres décimaux du logarithme. Avec les tables de Callet, le nombre n étant égal ou supérieur à 10^4 et la différence tabulaire moindre que $\frac{435}{10^7}$, l'erreur commise est plus petite que $\frac{435}{10^7 \times 10^4}$, et par conséquent plus petite que $\frac{5}{10^9}$, ou que $\frac{1}{2.10^8}$, c'est-à-dire qu'une demi-unité du huitième ordre décimal; elle n'affecte donc pas les sept premiers chiffres décimaux du logarithme.

LIVRE VI

THÉORIE DES ÉQUATIONS

CHAPITRE PREMIER.

CALCUL DES QUANTITÉS IMAGINAIRES.

Définition.

161. Nous avons expliqué, dans la première partie de l'*Algèbre* (livre III, chap. II), comment la résolution de l'équation du second degré conduit à des expressions de la forme $a+b\sqrt{-1}$, auxquelles on a donné le nom de *quantités imaginaires*. Si l'on représente par la lettre i le symbole $\sqrt{-1}$, les quantités imaginaires s'écrivent sous la forme $a+bi$, les lettres a et b désignant des quantités réelles, positives ou négatives.

Soit r un nombre positif, α un angle, on peut toujours poser

$$a=r\cos\alpha, \qquad b=r\sin\alpha.$$

En ajoutant les carrés, on en déduit

$$(1) \qquad r=\sqrt{a^2+b^2},$$

et par suite

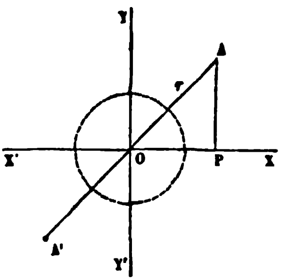
$$(2) \qquad \cos\alpha=\frac{a}{r}, \quad \sin\alpha=\frac{b}{r}.$$

De cette manière la quantité imaginaire $a+bi$ se met sous la forme

$$r(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

Le nombre positif r s'appelle le *module*, l'angle α l'*argument* de la quantité imaginaire. Le module r donné par l'équation (1) a une valeur parfaitement déterminée. Mais l'argument α peut recevoir une infinité de valeurs. L'angle α étant donné par son sinus et son cosinus, d'après les équations (2), a une valeur et une seule de o à 2π; on peut ensuite augmenter ou diminuer cet angle d'un multiple quelconque de 2π; de sorte que si l'on représente par α_0 la première valeur de α, et par k un nombre entier quelconque, positif ou négatif, toutes les valeurs de α seront comprises dans la formule $\alpha=\alpha_0+2k\pi$.

162. Traçons dans un plan deux droites rectangulaires OX et OY. On peut figurer la quantité imaginaire par une longueur OA égale à son module r et portée dans une direction qui fasse avec la droite fixe OX un angle égal à son argument α. On compte l'angle α à partir de OX, en tournant dans un sens convenu, par exemple, de OX vers OY. Si l'on fait varier l'angle α de o à 2π,



la droite OA tourne autour du point O, à partir de la position OX, et décrit tout le plan.

Les quantités réelles sont des cas particuliers des quantités imaginaires. Quand $\alpha = 0$, la quantité imaginaire devient une quantité réelle positive r, elle est figurée par une longueur égale à r portée sur l'axe OX dans le sens OX. Quand $\alpha = \pi$, la quantité imaginaire devient une quantité réelle négative $-r$; elle est figurée par une longueur égale à son module r portée sur l'axe fixe, dans le sens inverse OX'.

Quand $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la quantité imaginaire, qui se réduit à ri, est figurée par une longueur égale à r portée sur la perpendiculaire OY à l'axe OX. Quand $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, la quantité imaginaire, qui se réduit à $-ri$, est figurée par une longueur égale à r portée sur la perpendiculaire, mais dans le sens inverse OY'.

En général, quand on ajoute π à l'argument, $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ changeant de signes, la quantité imaginaire $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ change de signe. Ainsi, deux quantités imaginaires égales et de signes contraires sont figurées par deux longueurs égales OA et OA' portées en sens inverse l'une de l'autre.

Si du point A on abaisse une perpendiculaire AP sur l'axe X'X, on a

$$a = r\cos\alpha = \text{OP}, \qquad b = r\sin\alpha = \text{PA}.$$

On voit par là que la partie réelle a de la quantité imaginaire est égale à la projection OP de la droite OA sur l'axe fixe OX et le coefficient b de i à la projection PA de la même

droite sur l'axe OY. Écrire la quantité imaginaire sous la forme $a + bi$ revient à remplacer la ligne droite OA par la ligne brisée OPA.

163. On estime la grandeur d'une quantité imaginaire par la longueur de la droite OA qui la représente, c'est-à-dire par le module de la quantité imaginaire. Lorsque le module est petit, on dit que la quantité imaginaire est petite. Lorsque le module devient nul, on dit que la quantité imaginaire elle-même devient nulle. Puisque le module r est égal à $\sqrt{a^2+b^2}$, pour que le module soit nul, il est nécessaire et il suffit que les deux quantités réelles a et b soient nulles séparément.

Deux quantités imaginaires sont dites égales, lorsqu'elles sont représentées par la même droite OA dans la même direction, c'est-à-dire lorsque leurs modules sont égaux et que leurs arguments sont égaux ou diffèrent d'un nombre entier de circonférences. Il est clair que si deux quantités imaginaires $a+bi$, $a'+b'i$ sont égales, on a séparément $a=a'$, $b=b'$.

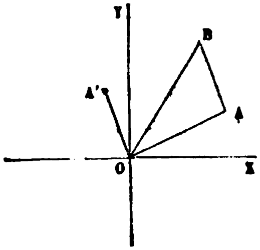
Addition.

164. On a étendu aux quantités imaginaires les règles ordinaires du calcul algébrique, comme si la lettre i désignait une quantité réelle, en convenant de remplacer ensuite dans le résultat i^2 par -1.

Proposons-nous d'abord d'additionner deux quantités imaginaires $a+bi$, $a'+b'i$. On a, en groupant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i.$$

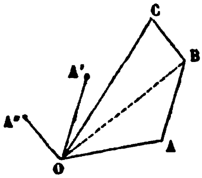
Si l'on figure les deux quantités imaginaires proposées par des grandeurs géométriques OA, OA′, comme nous l'avons expliqué, il est facile de voir que l'addition consiste à porter ces deux longueurs l'une à la suite de l'autre, chacune dans sa direction. A partir du point A, extrémité de la grandeur OA, menons une droite AB égale et parallèle à OA′, et joignons OB ; la droite OB représentera la somme des deux quantités imaginaires. Car, la projection de la ligne droite OB sur chacun des axes OX et OY étant égale à la somme des projections des deux parties de la ligne brisée OAB, les deux projections de la ligne OB sont égales à $a + a'$ et à $b + b'$. Cette droite figure donc la quantité imaginaire



$$(a + a') + (b + b')i.$$

Nous remarquons que dans le triangle OAB la longueur du côté OB est plus petite que la somme des deux autres côtés OA et AB, et plus grande que leur différence. Il en résulte *que le module de la somme des deux quantités imaginaires est plus petit que la somme des modules de ces deux quantités et plus grand que leur différence.*

Ce que nous venons de dire s'étend à l'addition d'un nombre quelconque de quantités imaginaires. Soit à additionner trois quantités imaginaires figurées par les grandeurs géométriques OA, OA′, OA″ ; à partir du point A menons une droite AB égale et parallèle à OA′, et, à partir du point B, une droite BC égale



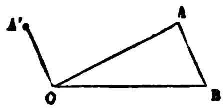
et parallèle à OA″; la droite OB étant la somme des deux premières quantités, la droite OC sera la somme des deux quantités OB et OA″, et par conséquent la somme des trois quantités proposées. La droite OC étant moindre que la ligne brisée OABC, il est évident que *le module de la somme de plusieurs quantités imaginaires est plus petit que la somme des modules de ces quantités.*

Soustraction.

165. La soustraction n'offre aucune difficulté. D'une quantité imaginaire $a+bi$ retrancher une quantité imaginaire $a'+b'i$, c'est trouver une troisième quantité imaginaire qui, ajoutée à la seconde, reproduise la première. La différence cherchée est

$$(a-a')+(b-b')i.$$

Soient OA et OA′ les deux grandeurs géométriques qui figurent les quantités imaginaires proposées. A la droite OA ajoutons une droite AB égale et parallèle à OA′, mais de sens contraire; la droite OB figurera la différence cherchée; car si à cette quantité OB on ajoute OA′ ou BA, on reproduit OA.



Multiplication.

166. En effectuant le produit de deux quantités imaginaires $a+bi$, $a'+b'i$, d'après la règle ordinaire de la multiplication des polynômes, on a

$$(a+bi)(a'+b'i)=aa'+bb'i^2+(ab'+ba')i;$$

si l'on remplace ensuite i^2 par -1, il vient

$$(a+bi)(a'+b'i) = (aa'-bb') + (ab'+ba')i.$$

Le produit est une quantité imaginaire de la même forme que les quantités proposées.

Si l'on a à effectuer le produit d'un nombre quelconque de facteurs imaginaires, on calculera le produit des deux premiers facteurs, comme nous venons de l'indiquer ; on multipliera ce produit par le troisième facteur, et ainsi de suite ; le produit final sera de la même forme.

Supposons les deux facteurs mis sous la forme

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha');$$

le produit sera

$$rr'[(\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha') + i(\sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha')],$$

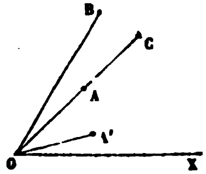
ou plus simplement

$$rr'[\cos(\alpha+\alpha') + i\sin(\alpha+\alpha')].$$

Ainsi, *le produit de deux quantités imaginaires est une quantité imaginaire qui a pour module le produit des modules et pour argument la somme des arguments.*

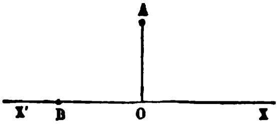
La même règle s'étend à un nombre quelconque de facteurs, et il est clair que le produit ne change pas quand on change l'ordre des facteurs.

Il est facile de donner à cette opération un sens géométrique. Multiplier la grandeur géométrique OA par la grandeur géométrique OA′ revient à multiplier la longueur OA par le nombre abstrait qui mesure la longueur OA′, puis à faire tourner la droite OC ainsi obtenue d'un angle COB égal à l'angle XOA′. On voit, en effet, que la grandeur géo-



métrique OB a son module égal au produit des modules et son argument égal à la somme des arguments.

Si l'on applique cette règle au produit $i \times i$, on remarque que la quantité imaginaire i est figurée par une longueur OA égale à l'unité portée sur la perpendiculaire à l'axe fixe X'X; il faut multiplier cette longueur par l'unité, puis la faire tourner d'un angle droit autour du point O, ce qui donne une longueur OB portée sur OX'; ce résultat est égal à -1. Ceci est bien d'accord avec la convention fondamentale $i^2 = -1$.



Deux quantités imaginaires $a + bi$, $a - bi$, qui ne diffèrent que par le signe de i, sont dites *conjuguées*. On a

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Le produit de ces quantités est réel et égal au carré du module de chacune d'elles.

Il est évident que le produit de plusieurs facteurs réels et positifs ne peut devenir nul que si l'un des facteurs au moins devient nul. La même propriété a lieu quand les facteurs sont imaginaires; car, le module du produit étant égal au produit des modules des facteurs, pour que ce module devienne nul, il est nécessaire et il suffit que le module de l'un des facteurs devienne nul.

Division.

167. Diviser une quantité imaginaire $a + bi$ par une quantité imaginaire $a' + b'i$, c'est chercher une quantité imaginaire $x + yi$ qui, multipliée par le diviseur, reproduise le dividende. On doit donc avoir

$$a + bi = (a' + b'i)(x + yi),$$

ou, en effectuant le produit,

$$a + bi = (a'x - b'y) + (b'x + a'y)i,$$

et par suite, en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires,

$$a'x - b'y = a,$$
$$b'x + a'y = b.$$

On déduit de là

$$x = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}, \qquad y = \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}.$$

On a ainsi

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2} i.$$

168. On ne change pas la valeur d'une fraction $\frac{A}{B}$, formée de quantités imaginaires A et B, quand on multiplie ses deux termes par une même quantité imaginaire C; car, en désignant par Q le quotient que nous venons de trouver, on a

$$A = B \times Q;$$

si l'on multiplie par C ces deux quantités égales, il vient

$$AC = B \times Q \times C = BC \times Q,$$

d'où

$$\frac{AC}{BC} = Q = \frac{A}{B}.$$

Il en résulte une manière commode d'effectuer le calcul du quotient de deux quantités imaginaires; car, si l'on multiplie les deux termes de la fraction

$$\frac{a + bi}{a' + b'i}$$

par la quantité $a'-b'i$, conjuguée du dénominateur, on a

$$\frac{a+bi}{a'+b'i}=\frac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2};$$

le dénominateur devient réel et la question est ramenée à une multiplication; on retrouve ainsi le résultat obtenu précédemment

$$\frac{a+bi}{a'+b'i}=\frac{(aa'+bb')+(ba'-ab')i}{a'^2+b'^2}.$$

Quand on met les deux quantités imaginaires sous la forme $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$, on peut écrire immédiatement le quotient de ces deux quantités

$$\frac{r}{r'}[\cos(\alpha-\alpha')+i\sin(\alpha-\alpha')];$$

car, en multipliant ce quotient par le diviseur, on retrouve le dividende. Ainsi, *le quotient a pour module le quotient des modules et pour argument la différence des arguments.*

Puissances.

169. Commençons par former les puissances successives de i. On a d'abord $i^2=-1$. La troisième puissance i^3 étant égale à la deuxième i^2 multipliée par i, il vient

$$i^3=i^2\times i=-1\times i=-i.$$

La quatrième étant égale à la troisième multipliée par i, on a de même

$$i^4=i^3\times i=-i\times i=-i^2=-(-1)=+1,$$

et ainsi de suite,

$$i^5=i^4\times i=i,$$
$$i^6=i^5\times i=i\times i=i^2=-1.$$

On obtient de la sorte la série des puissances

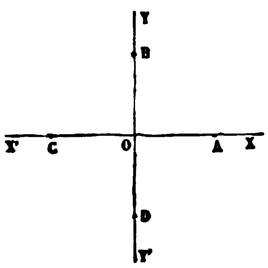
$$i^0 = +1,\quad i^1 = +i,\quad i^2 = -1,\quad i^3 = -i,$$
$$i^4 = +1,\quad i^5 = +i,\quad i^6 = -1,\quad i^7 = -i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La quatrième puissance i^4 étant égale à i^0, il est clair que les mêmes résultats se reproduisent périodiquement de quatre en quatre, et l'on a en général

$$i^{4m} = 1,\quad i^{4m+1} = i,\quad i^{4m+2} = -1,\quad i^{4m+3} = -i.$$

Les puissances paires sont réelles, les puissances impaires imaginaires.

Ces résultats sont évidents géométriquement. Les longueurs OA et OB, égales à l'unité, portées sur OX et OY, représentent la premiere $+1$, la seconde $+i$. Multiplier une grandeur géométrique par i, c'est la faire tourner d'un angle droit autour du point O. En multipliant ainsi plusieurs fois successivement la grandeur OA par i, on obtient les quatre grandeurs OB, OC, OD, OA, ou $+i, -1, -i, +1$, qui se reproduisent périodiquement.



170. Si, d'après la convention générale sur le calcul des quantités imaginaires, on applique la formule du binôme au développement de $(a+bi)^m$, on a

$$(a+bi)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}bi + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2i^2 + \ldots\ldots$$

En remplaçant les puissances successives de i par les valeurs

trouvées précédemment, il vient

$$(a+bi)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}bi - \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3i + \ldots\ldots;$$

les termes sont alternativement réels et imaginaires. Réunissons enfin les termes réels et les termes imaginaires, nous aurons

$$(a+bi)^m = \left[a^m - \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 - \ldots\right]$$
$$+\left[ma^{m-1}b - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots\right]i.$$

Il en résulte que le développement de $(a+bi)^m$ est une quantité imaginaire de la forme ordinaire $A+Bi$. Les termes, qui composent chacune des parties, sont affectés alternativement du signe $+$ et du signe $-$.

Il est clair que le développement de $(a-bi)^m$ ne diffère de celui de $(a+bi)^m$ qu'en ce que le signe de i est changé. Nous avons trouvé

$$(a+bi)^m = A+Bi;$$

on aura donc

$$(a-bi)^m = A-Bi.$$

Applications.

1° $(1+i)^5 = 1+5i-10-10i+5+i = -4-4i.$

2° $(1-i)^5 = -4+4i.$

3° $(3+2i)^6 = 3^6+6.3^5.2i-15.3^4.2^2-20.3^3.2^3i+15.3^2.2^4$
$+6.3.2^5i-2^6 = -2035-828i.$

4° $(3-2i)^6 = -2035+828i.$

171. Lorsque la quantité $a+bi$ est mise sous la forme $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, on peut écrire immédiatement

$$(a+bi)^m=r^m(\cos m\alpha+i\sin m\alpha);$$

car la m^e puissance d'une quantité est le produit de m facteurs égaux à cette quantité, et l'on sait que le module du produit est égal au produit des modules des facteurs et son argument à la somme des arguments.

Supposons que dans un polynôme entier

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots\ldots+A_m,$$

à coefficients réels ou imaginaires, on donne à la variable x une valeur imaginaire $a+bi$; une puissance $(a+bi)^m$, comme nous l'avons expliqué, prenant une valeur de la forme $A+Bi$, un terme quelconque du polynôme, qui est le produit d'une puissance de x par un coefficient réel ou imaginaire, prend une valeur de la même forme; en réunissant les parties réelles fournies par les différents termes du polynôme, ainsi que les parties imaginaires, on obtiendra finalement un résultat de la forme $A+Bi$.

Racines.

172. Proposons-nous d'abord d'extraire la racine carrée de la quantité $a+bi$; il s'agit de trouver une quantité de la forme $x+yi$ qui, élevée au carré, reproduise la quantité proposée. On doit donc avoir

$$(x+yi)^2=a+bi,$$

ou, en développant le carré,

$$(x^2-y^2)+2xyi=a+bi,$$

et, par suite,

$$x^2-y^2=a,\quad 2xy=b.$$

On remplacera le système de ces deux équations par le système équivalent

$$y=\frac{b}{2x},\quad x^4-ax^2-\frac{b^2}{4}=0.$$

L'inconnue x devant être réelle, on déduit de la dernière équation

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

On a ainsi

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right).$$

Comme les valeurs de x et de y sont de même signe ou de signes contraires suivant que b est positif ou négatif, on devra dans cette dernière expression donner au facteur de i le même signe que celui de b.

On a par exemple,

$$\sqrt{i}=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

173. Proposons-nous maintenant d'extraire la racine m^e de $a+bi$, c'est-à-dire de trouver une quantité imaginaire de la même forme, qui, élevée à la m^e puissance, reproduise la quantité proposée. Posons

$$a+bi=\text{R}(\cos\alpha+i\sin\alpha),$$

et représentons l'inconnue par $r(\cos\omega+i\sin\omega)$, on doit avoir

$$r^m(\cos m\omega+i\sin m\omega)=\text{R}(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

Pour que ces deux quantités imaginaires soient égales, il est nécessaire que leurs modules soient égaux et que leurs

arguments soient égaux ou diffèrent d'un multiple quelconque de 2π. On aura donc

$$r^m = R, \quad m\omega = \alpha + 2k\pi,$$

d'où

$$r = R^{\frac{1}{m}}, \quad \omega = \frac{\alpha + 2k\pi}{m},$$

et les diverses valeurs de l'inconnue sont données par la formule

$$R^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{m}\right),$$

dans laquelle la lettre k désigne un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

174. Il est aisé de voir, d'après cette formule, que l'inconnue admet m racines distinctes. En effet, si l'on donne à k les m valeurs consécutives

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ m-1,$$

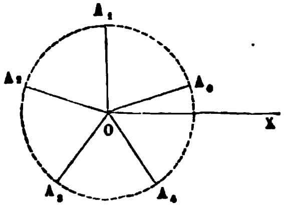
on obtient m valeurs qui ont même module $R^{\frac{1}{m}}$ et pour arguments les arcs

$$\frac{\alpha}{m},\quad \frac{\alpha}{m}+\frac{2\pi}{m},\quad \frac{\alpha}{m}+2\frac{2\pi}{m},\quad \frac{\alpha}{m}+3\frac{2\pi}{m},\ldots\ldots,\frac{\alpha}{m}+(m-1)\frac{2\pi}{m}.$$

Comme ces arguments sont plus petits que 2π et qu'ils diffèrent entre eux, les m quantités qui leur correspondent sont distinctes. Si l'on donnait à k les valeurs m, $m+1$, $m+2$,...., en négligeant un multiple de 2π, on retrouverait les arguments déjà obtenus et les mêmes racines se reproduiraient dans le même ordre. Si l'on donnait à k les valeurs négatives $-1, -2, -3$,..., on retrouverait encore les mêmes racines, mais dans un ordre inverse. Ainsi, la racine m^e d'une

quantité donnée admet m valeurs distinctes et n'en admet que m.

Du point O comme centre, avec un rayon égal à $R^{\frac{1}{m}}$, décrivons un cercle; prenons l'angle XOA_0 égal à $\frac{\alpha}{m}$ et, à partir du point A_0, divisons la circonférence en m parties égales; les m valeurs de la racine seront figurées par les rayons OA_0, OA_1, OA_2....., qui vont du centre aux différents points de division de la circonférence. Ces m quantités forment une étoile régulière à m rayons.



L'extraction de la racine revient à la résolution de l'équation binôme $x^m = A$. Nous étudierons avec plus de détails en trigonométrie les propriétés des racines de cette équation.

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

Étude des fonctions entières.

Nous nous sommes déjà occupé des fonctions entières au chapitre des dérivées; nous avons dit qu'une fonction entière de x varie d'une manière continue avec x (nos 112 et 116); à cause de l'importance du sujet, nous allons reprendre en détail l'étude des fonctions entières. Nous supposerons pour le moment que tous les coefficients sont réels, et que l'on n'attribue à la variable x que des valeurs réelles.

175. THÉORÈME I. *Quand un polynôme entier, à coefficients réels, ne contient pas de terme constant, on peut assigner un nombre β tel que, pour toutes les valeurs réelles de* x *com-*

prises entre $-\beta$ et $+\beta$, la valeur du polynôme soit comprise entre $-\alpha$ et $+\alpha$, α étant un nombre donné, si petit qu'il soit.

Soit

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots\ldots + gx^m$$

un polynôme entier en x, à coefficients réels, ne renfermant pas de terme constant, et ordonné suivant les puissances croissantes de x. Désignons par x' la valeur absolue de la variable réelle x, par y' celle du polynôme, et soit M le plus grand coefficient en valeur absolue; on a évidemment

$$y' < M(x' + x'^2 + \ldots\ldots + x'^m) = \frac{Mx'(1 - x'^m)}{1 - x'}.$$

Supposons que le nombre x' soit inférieur à l'unité, le second membre sera plus petit que $\frac{Mx'}{1-x'}$, et l'on aura, à plus forte raison,

$$y' < \frac{Mx'}{1 - x'}.$$

La valeur de y' sera plus petite que la quantité positive donnée α, si la quantité $\frac{Mx'}{1-x'}$ est plus petite que α; en résolvant l'inégalité

$$\frac{Mx'}{1-x'} < \alpha,$$

on trouve

$$x' < \frac{\alpha}{M + \alpha}.$$

Appelons β cette quantité $\frac{\alpha}{M+\alpha}$. On conclut de là que, pour toutes les valeurs réelles de x comprises entre $-\beta$ et $+\beta$, la valeur du polynôme y est comprise entre $-\alpha$ et $+\alpha$,

Par exemple, on est certain que la valeur du polynôme

$$2x - 3x^2 + 7x^3 + 9x^4 - 4x^5$$

est comprise entre $-0,1$ et $+0,1$ quand la variable x est comprise entre $-\frac{1}{91}$ et $+\frac{1}{91}$, ou, plus simplement, entre $-0,01$ et $+0,01$.

176. Théorème II. *Quand un polynôme entier, à coefficients réels, est ordonné par rapport aux puissances croissantes de* x, *on peut assigner un nombre* β *tel que, pour toutes les valeurs réelles de* x *comprises entre* $-\beta$ *et* $+\beta$, *le polynôme ait le signe de son premier terme.*

Soit

$$ax^n + bx^{n+1} + cx^{n+2} + \ldots\ldots + gx^m$$

le polynôme proposé ; mettons-le sous la forme

$$x^n(a + bx + cx^2 + \ldots\ldots + gx^{m-n}).$$

D'après le théorème précédent, on peut assigner un nombre β tel que, pour toutes les valeurs réelles de x comprises entre $-\beta$ et $+\beta$, la va eur du polynôme

$$bx + cx^2 + \ldots\ldots + gx^{m-n}$$

soit comprise entre $-a$ et $+a$. Pour ces valeurs de x, la quantité placée entre parenthèses conservera le signe de a, et, par conséquent, le polynôme proposé aura le signe de son premier terme ax^n. Lorsque le premier exposant n est pair, ce signe est le même pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\beta$ et $+\beta$; mais lorsque n est impair, la valeur du polynôme a le signe du coefficient a pour les valeurs de x comprises entre 0 et $+\beta$ et le signe contraire pour les valeurs de x comprises entre 0 et $-\beta$.

Considérons, par exemple, le polynôme

$$2x - 3x^2 + 7x^3 + 9x^4 - 4x^5.$$

Le polynôme a le signe de son premier terme pour les valeurs de x comprises entre $-\frac{2}{11}$ et $+\frac{2}{11}$; x variant de $-\frac{2}{11}$ à o, le polynôme a une valeur négative; x variant de o à $+\frac{2}{11}$, il a une valeur positive.

177. THÉORÈME III. *Quand un polynôme entier, à coefficients réels, est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de* x, *on peut assigner un nombre* B *tel que, pour toutes les valeurs réelles de* x *plus grandes que* B *en valeur absolue, le polynôme ait le signe de son premier terme.*

Soit le polynôme

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m.$$

En mettant x^m en facteur, on l'écrit sous la forme

$$x^m\left(A_0 + A_1\frac{1}{x} + A_2\frac{1}{x^2} + \ldots\ldots + A_m\frac{1}{x^m}\right).$$

Le polynôme placé entre parenthèses est ordonné par rapport aux puissances croissantes de la variable $\frac{1}{x}$; d'après le théorème précédent, on peut assigner un nombre β tel que, pour les valeurs de $\frac{1}{x}$ comprises entre $-\beta$ et $+\beta$, ce polynôme ait le signe de son premier terme A_0. Soit $B = \frac{1}{\beta}$; aux valeurs réelles de $\frac{1}{x}$ dont la valeur absolue est plus petite que β, correspondent les valeurs réelles de x dont la valeur absolue est plus grande que B; pour toutes ces valeurs de x, le polynôme proposé aura le signe de son premier

terme $A_0 x^m$. Ainsi, quand x croît de $+B$ à $+\infty$, ou décroît de $-B$ à $-\infty$, le polynôme conserve le signe de son premier terme. Lorsque le degré m du polynôme est pair, le polynôme a le même signe pour ces deux séries de valeurs de x; mais lorsque m est impair, il a le signe du coefficient A_0 pour les valeurs positives de x, et le signe contraire pour les valeurs négatives.

Considérons, par exemple, le polynôme

$$2x^5 - 13x^4 - 18x^3 + 9x^2 - 12x + 7,$$

que nous mettrons sous la forme

$$x^5\left(2 - 13\frac{1}{x} - 18\frac{1}{x^2} + 9\frac{1}{x^3} - 12\frac{1}{x^4} + 7\frac{1}{x^5}\right).$$

On prendra ici $\beta = \frac{2}{18+2} = \frac{1}{10}$, d'où $B = 10$. Quand x croît de $+10$ à $+\infty$, le polynôme reste positif; il est négatif quand x décroît de -10 à $-\infty$.

178. THÉORÈME IV. *Étant donné un polynôme entier en* x, *à coefficients réels, on peut assigner un nombre* B *tel que, pour toutes les valeurs réelles de* x *dont la valeur absolue est plus grande que* B, *la valeur absolue du polynôme soit plus grande qu'un nombre donné* A, *si grand qu'il soit.*

Soit le polynôme

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_m,$$

ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x. Supposons que le premier coefficient A_0 soit positif; donnons d'abord à x des valeurs positives; en vertu du théorème précédent, on peut assigner un nombre B tel que, pour toutes les valeurs réelles de x plus grandes que B, le polynôme

$$y - A = A_0 x^m + A x^{m-1} + \ldots\ldots + (A_m - A)$$

ait le signe de son premier terme, c'est-à-dire soit positif; pour toutes ces valeurs de x, la valeur du polynôme proposé y sera plus grande que A. La même démonstration s'applique aux valeurs négatives de x, lorsque le polynôme est de degré pair; mais, s'il est de degré impair, on posera $x=-x'$ et l'on considérera le polynôme

$$y'=-y=A_0x'^m-A_1x'^{m-1}+\ldots\ldots-A_m.$$

179. THÉORÈME V. *Une fonction entière, à coefficients réels, est continue pour toutes les valeurs réelles de la variable.*

Une fonction réelle $f(x)$ est dite *continue* entre les limites x_0 et x_1, lorsque, la variable x ayant une valeur quelconque comprise entre ces limites, on peut assigner un nombre β tel que, pour toutes les valeurs de h comprises entre $-\beta$ et $+\beta$, la valeur de la différence $f(x+h)-f(x)$ soit comprise entre $-\alpha$ et $+\alpha$, α étant un nombre donné, si petit qu'il soit. S'il s'agit d'une fonction entière du degré m,

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots\ldots+A_m,$$

la différence $k=f(x+h)-f(x)$ se développe en un polynôme entier et du degré m par rapport à h (n° 117), savoir

$$k=\frac{f'(x)}{1}h+\frac{f''(x)}{1.2}h^2+\ldots\ldots+\frac{f^m(x)}{1.2\ldots m}h^m.$$

Quelle que soit la valeur attribuée à x, on peut, en vertu du théorème I, assigner un nombre β tel que, pour toutes les valeurs de h comprises entre $-\beta$ et $+\beta$, la valeur de ce polynôme k, qui n'a pas de terme indépendant de h, soit comprise entre $-\alpha$ et $+\alpha$, α étant un nombre donné, aussi petit que l'on veut. On conclut de là que la fonction est continue pour toutes les valeurs réelles de x.

180. D'après le théorème IV, quand la valeur absolue de la

variable x augmente à l'infini, celle de la fonction entière augmente aussi à l'infini. Supposons, pour fixer les idées, que le premier coefficient A_0 soit positif, et faisons croître x d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$. Lorsque le degré m est impair, la fonction varie d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$; mais elle ne va pas sans cesse en croissant; elle éprouve en général des alternatives de croissance et de décroissance. Lorsque m est pair, la fonction part de $+\infty$, décroît d'abord, puis, après diverses alternatives de croissance et de décroissance, revient à $+\infty$.

Le signe de la première dérivée $f'(x)$ indique si la fonction $f(x)$ croît ou décroît, quand la variable x croît. Cette dérivée, étant un polynôme entier en x, conserve toujours le signe de son premier terme, quand la valeur absolue de x dépasse une certaine limite B′ (n° 177); x croissant de $-\infty$ à $-B'$ ou de $+B'$ à $+\infty$, la fonction ira sans cesse en croissant, ou sans cesse en décroissant.

Propriétés des équations.

181. THÉORÈME VI. *Lorsque deux nombres réels, substitués dans un polynôme entier, à coefficients réels, donnent des résultats de signes contraires, le polynôme a au moins une racine réelle comprise entre ces deux nombres.*

Ceci résulte de la continuité de la fonction. Soit x_0 plus petit que x_1, et supposons, par exemple, que le polynôme $f(x)$ ait une valeur négative pour $x=x_0$, une valeur positive pour $x=x_1$. Si l'on imagine que x croisse d'une manière continue de x_0 à x_1, la fonction variera d'une manière continue, allant d'une valeur négative à une valeur positive; comme

elle reste finie, elle devra nécessairement dans l'intervalle passer par la valeur intermédiaire zéro. Ainsi, la fonction $f(x)$ s'annule pour une valeur de x comprise entre x_0 et x_1 ; cette valeur de x est racine de l'équation $f(x) = 0$.

Il est possible que la fonction passe plusieurs fois par zéro dans l'intervalle de x_0 à x_1 ; dans ce cas, l'équation admet plusieurs racines réelles entre x_0 et x_1.

Toute fonction finie et continue, dans l'intervalle considéré, jouit évidemment de la même propriété.

182. THÉORÈME VII. *Une équation algébrique de degré impair, à coefficients réels, a au moins une racine réelle.*

On appelle équation algébrique l'équation que l'on obtient en égalant à zéro une fonction entière $f(x)$. Nous supposerons le polynôme ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x; nous supposerons aussi que le premier coefficient soit positif; autrement, on changerait les signes de tous les termes. Quand on donne à x une valeur négative très-grande en valeur absolue, le polynôme prend une valeur de même signe que celle de son premier terme, c'est-à-dire une valeur négative, puisque ce premier terme est de degré impair; au contraire, si l'on donne à x une valeur positive très-grande, le polynôme prend une valeur positive. Ainsi, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, le polynôme $f(x)$ change de signe et s'annule au moins une fois; donc l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine réelle.

Cette racine réelle a un signe contraire à celui du dernier terme de l'équation. Supposons d'abord que le dernier terme, c'est-à-dire le terme indépendant de x, soit négatif; pour $x = 0$, le polynôme, se réduisant à son dernier terme, a une valeur négative; pour une valeur très-grande positive, il a

une valeur positive; donc le polynôme change de signe, quand x varie de o à $+\infty$ et, par conséquent, l'équation admet une racine positive. Supposons maintenant que le dernier terme soit positif; pour $x=-\infty$, le polynôme est négatif; pour $x=0$, il est positif; il change donc de signe quand x varie de $-\infty$ à o et, par conséquent, l'équation admet une racine négative.

On peut affirmer, par exemple, que l'équation

$$x^3-5x^2+4x-7=0$$

a au moins une racine réelle positive, et que l'équation

$$x^3-5x^2-4x+7=0$$

a au moins une racine réelle négative.

183. Théorème VIII. *Une équation algébrique de degré pair, à coefficients réels, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles.*

Pour $x=0$, le polynôme, se réduisant à son dernier terme, a une valeur négative. D'ailleurs, une valeur de x très-grande en valeur absolue, positive ou négative, rend le polynôme positif, puisque son premier terme, qui est de degré pair, reste toujours positif. Ainsi, le polynôme change de signe quand x varie de o à $+\infty$, et aussi quand x varie de o à $-\infty$; donc l'équation admet au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

Par exemple, l'équation

$$x^4-5x^3-7x^2+3x-2=0$$

admet au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

Il est un cas où l'on ne sait pas si l'équation admet des racines réelles : c'est celui où l'équation, étant de degré pair,

a son dernier terme positif; car, dans ce cas, le polynôme a des valeurs positives pour $x=0$ et pour des valeurs de x très-grandes, positives ou négatives. Ainsi, on ne sait pas si l'équation

$$x^4-5x^3-7x^2+3x+2=0$$

admet des racines réelles.

184. Théorème IX. *Si la quantité* a *est racine d'une équation algébrique, le premier membre est divisible par* x—a.

Soit $f(x)$ un polynôme entier du degré m, à coefficients quelconques, réels ou imaginaires, et ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x; on peut diviser ce polynôme par $x-a$ et pousser l'opération jusqu'à ce qu'on arrive à un reste indépendant de x. Si l'on appelle $f_1(x)$ le quotient qui est un polynôme entier du degré $m-1$, et R le reste constant, on aura

$$f(x)=(x-a)\,f_1(x)+\mathrm{R}.$$

Cette égalité est vraie, quelle que soit la valeur de x. Donnons à x la valeur particulière a, le premier terme du second membre s'évanouit, puisque le facteur $x-a$ devient nul et que l'autre facteur $f_1(a)$ conserve une valeur finie; il vient donc

$$f(a)=\mathrm{R}.$$

Ainsi, *quand on divise un polynôme entier par un binôme de la forme* x—a, *le reste de la division est le résultat que l'on obtient en remplaçant* x *par* a *dans ce polynôme.*

Supposons maintenant que a soit racine du polynôme $f(x)$; cela signifie que, si l'on remplace x par a dans le polynôme, on obtient un résultat $f(a)$ égal à zéro. Donc le reste R est nul, et l'on a

$$f(x)=(x-a)\,f_1(x).$$

Ainsi, lorsque a est racine d'un polynôme entier, ce polyôme est divisible par $x - a$.

Réciproquement, *si un polynôme est divisible par un binôme de la forme* x -- a, *la quantité* a *est racine du polynôme*. En effet, dire que le polynôme $f(x)$ est divisible par $x - a$, c'est dire que le reste constant R, auquel on arrive en effectuant la division, est nul ; donc la quantité $f(a)$ est égale à zéro et a est racine.

185. Nous indiquerons maintenant une règle très-simple pour calculer le quotient.

Soit

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m$$

le polynôme proposé. Divisons ce polynôme par $x - a$:

$$\begin{array}{r|l}
A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} \ldots + A_{m-1} x + A_m & x - a \\
\hline
(A_0 a + A_1) x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} \ldots\ldots\ldots\ldots + A_m & A_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} + \ldots + B_{m-1} \\
(B_1 a + A_2) x^{m-2} + A_3 x^{m-3} \ldots\ldots\ldots\ldots + A_m & \\
(B_2 a + A_3) x^{m-3} \ldots\ldots\ldots\ldots + A_m & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(B_{m-2} a + A_{m-1}) x + A_m & \\
\text{Reste} \ldots\ldots\ldots\ldots\ B_{m-1} a + A_m &
\end{array}$$

Le premier terme du quotient est $A_0 x^{m-1}$; multiplions ce terme par le diviseur $x - a$, et retranchons du dividende ; le produit par x détruit le premier terme du dividende, le produit par $- a$ donne la quantité $A_0 a x^{m-1}$ qui s'ajoute au second terme ; ainsi le premier reste ou le second dividende a pour premier terme $(A_0 a + A_1) x^{m-1}$, les termes suivants étant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par x, on aura le second terme $B_1 x^{m-2}$ du

quotient, en représentant pour abréger A_0a+A_1 par B_1; multiplions ce second terme par $x-a$, le produit par x détruit le premier terme du second dividende, le produit par $-a$ donne la quantité B_1ax^{m-2}, qui s'ajoute au second terme; ainsi le troisième dividende a pour premier terme $(B_1a+A_2)a^{m-2}$, les termes suivants restant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par x, on aura le troisième terme B_2x^{m-3} du quotient, en représentant B_1a+A_2 par B_2, et ainsi de suite.

Cette loi est générale : *on obtient un coefficient quelconque du quotient en multipliant le coefficient précédent par* a *et ajoutant le coefficient du terme qui dans le polynôme proposé occupe le même rang que le terme cherché du quotient*

On arrivera ainsi au dernier dividende

$$(B_{m-2}a+A_{m-1})x+A_m,$$

qui donnera le dernier terme B_{m-1} du quotient, B_{m-1} représentant la quantité $B_{m-2}a+A_{m-1}$; en multipliant ce dernier terme par $x-a$ et retranchant du dernier dividende, on aura le reste de la division $B_{m-1}a+A_m$. On voit par là que le reste de la division se forme au moyen du dernier terme du quotient suivant la même loi, en multipliant le dernier terme du quotient par a et ajoutant le dernier terme du dividende.

Les coefficients du quotient, formés d'après cette loi, ont pour valeurs

$$B_1=A_0a+A_1,$$
$$B_2=A_0a^2+A_1a+A_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_{m-1}=A_0a^{m-1}+A_1a^{m-2}+\cdots\cdots+A_{m-1};$$

le reste de la division est

$$R = B_{m-1}a + A_m = A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \ldots\ldots + A_m.$$

Exemples.

1° Diviser par $x - 3$ le polynôme

$$2x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 5x + 12.$$

L'application de la règle précédente donne le quotient

$$2x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 4.$$

Après avoir écrit le premier coefficient 2, on dira : 2 multiplié par 3..... 6 et − 8..... − 2 ; − 2 multiplié par 3..... − 6 et + 7..... + 1 ; + 1 multiplié par 3..... + 3 et − 6.... − 3 ; − 3 multiplié par 3..... − 9 et + 5..... − 4. Si l'on multiplie le dernier terme du quotient par 3 et que l'on ajoute le dernier terme + 12 du dividende, on trouve le reste 0 ; donc 3 est racine du polynôme.

2° Diviser par $x + 2$ le polynôme

$$2x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 5.$$

En opérant de la même manière, on trouve le quotient

$$2x^3 - 3x^2 - 4x + 6.$$

Ici $a = -2$; on dira donc : 2 multiplié par − 2..... − 4 et + 1..... − 3; − 3 multiplié par − 2..... + 6 et − 10..... − 4; − 4 multiplié par − 2..... + 8 et − 2..... + 6. En multipliant le dernier terme du quotient par − 2 et ajoutant + 5, on obtient le reste − 7 de la division. Donc − 2 n'est pas racine.

3° Diviser par $x - 2$ le polynôme

$$x^6 - 13x^5 + 7x^4 + 13x^2 + 2x - 8.$$

Le polynôme n'est pas complet ; il ne contient pas de termes en x^7, en x^6 et en x^3 ; on imaginera le polynôme complété au moyen de coefficients nuls et écrit sous la forme

$$x^8+0x^7+0x^6-13x^5+7x^4+0x^3+13x^2+2x-8;$$

puis on appliquera la règle ordinaire. Le quotient est

$$x^7+2x^6+4x^5-5x^4-3x^3-6x^2+x+4$$

et le reste nul. Donc 2 est racine.

186. Lemme. *Étant donné un polynôme entier en* x, *à coefficients reels ou imaginaires, on peut assigner un nombre* R, *tel que, pour toutes les valeurs de* x *dont le module est égal ou supérieur à* R, *le polynôme ait un module plus grand qu'un nombre donné* A, *si grand qu'il soit.*

Soit

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_m$$

le polynôme proposé. Désignons par $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_m$ les modules des coefficients et par r le module de x. On sait (n° 164) que le module de la somme de deux quantités imaginaires est plus grand que la différence des modules de ces deux quantités. Le polynôme proposé pouvant être regardé comme la somme des quantités

$$A_0x^m \quad , \quad A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_m,$$

son module est plus grand que le module de la première quantité diminué du module de la seconde ; mais le module de la seconde est plus petit que la somme des modules de ses différents termes ; le module du polynôme est donc plus grand que la différence

$$a_0r^m-(a_1r^{m-1}+a_2r^{m-2}+\ldots\ldots+a_m).$$

Or, on peut assigner un nombre R, tel que, pour toutes les valeurs de r supérieures à R, ce dernier polynôme ait une valeur plus grande que A (n° 178).

187. THÉORÈME X. *Toute équation algébrique et entière admet au moins une racine, réelle ou imaginaire.*

Supposons que pour $x = a$ le polynôme entier $f(x)$ ait un module A différent de zéro; nous allons démontrer qu'il existe une autre valeur de x pour laquelle le polynôme a un module plus petit que A. Pour $x = a + h$ on a,

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}h + \frac{f''(a)}{1.2}h^2 + \ldots + \frac{f^m(a)}{1.2\ldots m}h^m.$$

Posons

$$f(a) = \mathrm{A}(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

$$\frac{f'(a)}{1} = a_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1),$$

$$\frac{f''(a)}{1.2} = a_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{f^m(a)}{1.2\ldots\ldots m} = \mathrm{A}_0 = a_m(\cos\alpha_m + i\sin\alpha_m).$$

Parmi les coefficients des puissances successives de h, plusieurs peuvent être nuls; mais tous ne sont pas nuls; car le dernier est égal au coefficient A_0 de la plus haute puissance de x dans le polynôme proposé. Soit $f^n(a)$ la première dérivée qui a une valeur différente de zéro. En représentant la variable h par $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, on a

$$f(a+h) = \mathrm{A}(\cos\alpha + i\sin\alpha) + a_n\rho^n[\cos(n\theta+\alpha_n) + i\sin(n\theta+\alpha_n)] + \ldots$$
$$\ldots + a_m\rho^m[\cos(m\theta+\alpha_m) + i\sin(m\theta+\alpha_m)].$$

Le carré du module A′ de cette quantité est

$$A'^2 = [A\cos\alpha + a_n\rho^n\cos(n\theta+\alpha_n) + \ldots\ldots + a_m\rho^m\cos(m\theta+\alpha_m)]^2$$
$$+ [A\sin\alpha + a_n\rho^n\sin(n\theta+\alpha_n) + \ldots\ldots + a_m\rho^m\sin(m\theta+\alpha_m)]^2;$$

en développant les carrés et ordonnant le résultat suivant les puissances croissantes de ρ, on a

$$A'^2 = A^2 + 2Aa_n\rho^n\cos(n\theta+\alpha_n-\alpha) + \ldots\ldots + a_m^2\rho^{2m},$$

ou

$$A'^2 - A^2 = 2Aa_n\rho^n\cos(n\theta+\alpha_n-\alpha) + \ldots\ldots + a_m^2\rho^{2m}.$$

Si l'on attribue à θ une valeur telle que l'angle $n\theta+\alpha_n-\alpha$ soit compris entre $2k\pi+\frac{\pi}{2}$ et $2k\pi+\frac{3\pi}{2}$, k étant un nombre entier quelconque, et, pour préciser, on peut supposer que cet angle est égal à π, car il suffit pour cela de faire $\theta = \frac{\pi+\alpha-\alpha_n}{n}$, le coefficient du premier terme dans le second membre de l'égalité précédente a une valeur négative. D'autre part, on peut attribuer à ρ une valeur assez petite pour que ce premier terme donne son signe à l'expression (n° 176); on aura alors $A' < A$.

Soit B_0 le module du polynôme $f(x)$ pour une valeur particulière $x = x_0$ choisie arbitrairement. Déterminons, comme nous l'avons expliqué dans le numéro précédent, un nombre R tel que, pour toutes les valeurs de x dont le module est égal ou supérieur à R, le module de $f(x)$ soit plus grand qu'un nombre donné B plus grand que B_0. Concevons que l'on donne à x toutes les valeurs dont le module est plus petit que R, et considérons les modules des valeurs correspondantes de la fonction. Je dis que parmi ces modules l'un au moins est égal à zéro. Supposons que cela n'ait pas lieu; désignons par A la plus petite valeur de ces modules et soit

a la valeur correspondante de x, ou l'une des valeurs correspondantes de x. La valeur x_0 ayant son module inférieur à R, puisque le module B_0 de $f(x_0)$ est plus petit que B, l'un des modules de $f(x)$ est B_0 ; il en résulte que le minimum A est égal ou inférieur à B_0 et par conséquent plus petit que B. Mais nous avons vu qu'il existe une valeur $a' = a + h$ de x telle que le module A' de $f(a')$ soit moindre que A ; le module de a' est donc aussi plus petit que R. D'après cela, parmi les valeurs considérées de $f(x)$, A ne serait pas la plus petite valeur du module, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi il est impossible de supposer que la plus petite valeur du module de $f(x)$ est différente de zéro. On en conclut que, parmi les valeurs de x dont le module est plus petit que R, l'une au moins annule $f(x)$, et par conséquent est racine de l'équation $f(x) = 0$.

188. THÉORÈME XI. *Toute équation algébrique et entière du degré* m *admet* m *racines, réelles ou imaginaires.*

Désignons par $f(x)$ un polynôme entier du degré m; nous avons vu que ce polynôme admet au moins une racine, réelle ou imaginaire; appelons a cette racine; le polynôme est divisible par $x - a$; en désignant par $f_1(x)$ le quotient, qui est un polynôme entier du degré $m - 1$, on a

$$f(x) = (x - a) f_1(x).$$

De même le polynôme $f_1(x)$ admet au moins une racine b; il est divisible par $x - b$, et l'on a

$$f_1(x) = (x - b) f_2(x),$$

le quotient $f_2(x)$ étant un polynôme entier du degré $m - 2$.

De même le polynôme $f_2(x)$ admet au moins une racine c; il est divisible par $x-c$, et l'on a

$$f_2(x)=(x-c)\,f_3(x),$$

le quotient $f_3(x)$ étant un polynôme du degré $m-3$. En continuant de la même manière, on arrivera à un polynôme $f_{m-1}(x)$ du premier degré, qui admet une racine l, et s'écrit

$$f_{m-1}(x)=\mathrm{A}(x-l),$$

le dernier quotient A étant indépendant de x. Si l'on multiplie entre elles toutes ces égalités, les polynômes intermédiaires disparaissent, et l'on a

$$f(x)=\mathrm{A}(x-a)(x-b)(x-c)\,.\,.\,.\,.\,.\,(x-l).$$

Ainsi, tout polynôme entier du degré m peut être décomposé en un produit de m facteurs du premier degré.

Si, dans le polynôme, on remplace x par l'une des valeurs $a, b, c, \ldots\ldots, l$, l'un des facteurs du produit devenant nul, le produit lui-même devient nul; ainsi l'équation $f(x)=0$, du degré m, admet les m racines a, b, $c, \ldots\ldots, l$. Elle n'en admet pas d'autres; car, si l'on attribue à x une valeur différente de chacune des quantités a, b, $c, \ldots\ldots, l$, chacun des facteurs du produit étant différent de zéro, le produit lui-même est différent de zéro.

189. Remarque. Il peut arriver que, parmi les m quantités a, b, $c, \ldots\ldots, l$, plusieurs soient égales entre elles; dans ce cas on dit que l'équation admet des *racines égales*. Supposons, par exemple, que les deux quantités a et b soient égales entre elles; le polynôme contiendra le facteur $(x-a)^2$, et l'on dira que la racine a est *racine double*. De même si les trois quantités a, b, c sont égales entre elles, le polynôme

contiendra le facteur $(x-a)^3$ et la racine a sera *racine triple*. En général, si parmi les quantités $a, b, c, \ldots\ldots, l$ il y en a n égales entre elles, le polynôme contient un facteur de la forme $(x-a)^n$, et l'on dit que la racine a est du degré n de multiplicité.

L'équation peut admettre plusieurs racines *multiples*, par exemple une racine a du degré n de multiplicité, une racine b du degré p, une racine c du degré q, etc., et l'on a, d'une manière générale,

$$f(x) = \mathrm{A}(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q \ldots\ldots$$

Les facteurs $x-a$, $x-b, \ldots\ldots$, qui composent le polynôme proposé, sont les facteurs premiers de ce polynôme; la somme $n+p+q+\ldots\ldots$ des exposants des facteurs premiers est égale au degré m du polynôme.

190. THÉORÈME XI. *Un polynôme entier ne peut être décomposé qu'en un seul système de facteurs premiers.*

Supposons, en effet, que l'on ait

$$f(x) = \mathrm{A}(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q \ldots\ldots,$$
$$f(x) = \mathrm{A}'(x-a')^{n'}(x-b')^{p'}(x-c')^{q'} \ldots\ldots,$$

pour toutes les valeurs de x. Donnons à x la valeur particulière a; le premier produit, contenant le facteur $x-a$, s'annule; le second, qui est égal au premier, doit s'annuler aussi; pour cela il est nécessaire que l'un des facteurs s'annule, et par conséquent soit égal à $x-a$. Ainsi les facteurs premiers sont les mêmes de part et d'autre. Je dis maintenant que les exposants sont respectivement égaux. Supposons, par exemple, que les exposants n et n' du facteur $x-a$ ne soient pas égaux et que n soit plus grand que n'; si l'on

divise les deux produits égaux par $(x-a)^{n'}$, on aura deux quotients égaux

$$A(x-a)^{n-n'}(x-b)^p(x-c)^q\ldots\ldots,$$
$$A'(x-b)^{p'}(x-c)^{q'}\ldots\ldots,$$

le premier contenant le facteur $x-a$, le second ne le contenant pas, ce qui est impossible. Enfin, si l'on donne à x une valeur différente des racines, les deux produits devant être égaux, il est nécessaire que les coefficients A et A′ soient égaux.

191. THÉORÈME XIII. *Deux nombres réels* x_0 *et* x_1, *mis à la place de* x *dans un polynôme entier* $f(x)$, *à coefficients réels, donnent des résultats de même signe ou de signes contraires, suivant que ces deux nombres comprennent un nombre pair ou un nombre impair de racines réelles du polynôme.*

Désignons par $a, b, \ldots\ldots, e$ les racines réelles comprises entre x_0 et x_1; le polynôme entier $f(x)$ est divisible par le produit $(x-a)(x-b)\ldots\ldots(x-e)$ des facteurs binômes qui correspondent à ces racines; appelons $\varphi(x)$ le polynôme quotient, on a

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots\ldots(x-e)\times\varphi(x).$$

Le dividende et le diviseur ayant leurs coefficients réels, il est clair que le polynôme quotient $\varphi(x)$ a aussi ses coefficients réels. Si l'on remplace x successivement par x_0 et x_1, on a

$$f(x_0)=(x_0-a)(x_0-b)\ldots\ldots(x_0-e)\varphi(x_0),$$
$$f(x_1)=(x_1-a)(x_1-b)\ldots\ldots(x_1-e)\varphi(x_1).$$

Nous remarquerons d'abord que $\varphi(x_0)$ et $\varphi(x_1)$ sont des quantités de même signe; autrement les deux nombres

x_0 et x_1 comprendraient encore une autre racine du polynôme $\varphi(x)$ et par conséquent du polynôme $f(x)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Supposons x_0 plus petit que x_1 ; le nombre x_1 étant plus grand que les racines a, b,....., e, chacun des facteurs $x_1 - a$, $x_1 - b$,....., $x_1 - e$, est positif; donc $f(x_1)$ a le signe de $\varphi(x_1)$. Le nombre x_0 étant plus petit que les racines a, b,.....,e, chacun des facteurs $x_0 - a$, $x_0 - b$,...., $x_0 - e$, est négatif. Si le nombre de ces facteurs est pair, $f(x_0)$ aura le même signe que $\varphi(x_0)$, et, par conséquent, que $f(x_1)$; si le nombre des facteurs est impair, $f(x_0)$ aura un signe contraire à celui de $\varphi(x_0)$, et par conséquent contraire à celui de $f(x_1)$. Ainsi, les deux résultats $f(x_0)$ et $f(x_1)$ ont le même signe ou des signes contraires, selon que le nombre des racines réelles comprises entre x_0 et x_1 est pair ou impair.

Rien n'empêche de supposer que plusieurs des facteurs binômes $x-a$, $x-b$, $x-c$,...., soient égaux entre eux; alors il y aura des racines multiples et le théorème subsistera toujours, pourvu que, dans l'évaluation du nombre des racines comprises entre x_0 et x_1, on tienne compte du degré de multiplicité de chaque racine.

Les réciproques sont vraies : 1° lorsque deux nombres x_0 et x_1, mis à la place de x dans le polynôme $f(x)$, donnent des résultats de même signe, ces deux nombres ne comprennent aucune racine réelle ou en comprennent un nombre pair; car si elles en comprenaient un nombre impair, les résultats seraient de signes contraires. 2° Lorsque deux nombres donnent des résultats de signes contraires, ces deux nombres comprennent un nombre impair de racines réelles; car s'ils n'en comprenaient pas, ou s'ils en comprenaient un

nombre pair, les résultats seraient de même signe. Ceci complète le théorème VI.

192. Corollaire. Quand x, variant d'une manière continue, passe par une racine réelle a, le polynôme s'annule, mais il ne change pas toujours de signe. Nous pouvons supposer la quantité h assez petite pour que l'intervalle de $a-h$ à $a+h$ ne comprenne aucune racine autre que a. En vertu du théorème précédent, les deux résultats $f(a-h)$ et $f(a+h)$ seront de même signe, si la racine a est d'un degré pair de multiplicité, de signes contraires si la racine est de degré impair. Ainsi, *le polynôme change de signe quand* x *passe par une racine simple ou d'un degré impair de multiplicité; il ne change pas de signe quand* x *passe par une racine d'un degré pair de multiplicité.*

Il est facile de démontrer directement cette proposition. Soit n le degré de multiplicité de la racine a; on a

$$f(x)=(x-a)^n\varphi(x);$$

si l'on remplace x successivement par $a-h$ et par $a+h$, il vient

$$f(a-h)=(-h)^n\varphi(a-h),$$
$$f(a+h=h^n\varphi(a+h).$$

Les quantités $\varphi(a-h)$ et $\varphi(a+h)$ ayant le même signe, les quantités $f(a-h)$ et $f(a+h)$ auront le même signe si n est pair, des signes contraires si n est impair.

Relations entre les coefficients d'une équation algébrique et les racines.

193. Supposons que l'on ait divisé tous les termes de l'équation par le premier coefficient, afin de la ramener à la forme

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_m=0.$$

Cette équation a m racines $a, b, c, \ldots, l$, et nous avons démontré (n° 188) que le premier membre peut être décomposé en un produit de m facteurs premiers

$$(x-a)(x-b)(x-c) \ldots\ldots (x-l).$$

Si l'on effectue ce produit, il est clair que l'on reproduira identiquement le polynôme proposé. Or, si l'on appelle S_1 la somme des racines, S_2 la somme des produits des racines deux à deux, S_3 la somme des produits trois à trois,...., le produit des m facteurs premiers, d'après la formule établie au n° 33, se développera de la manière suivante :

$$x^m - S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} - S_3 x^{m-3} + \ldots\ldots \pm S_m.$$

En égalant les coefficients des deux polynômes, on a donc

$$S_1 = -A_1,\quad S_2 = A_2.\quad S_3 = -A_3, \ldots\ldots, S_m = \pm A_m.$$

On en conclut :

THÉORÈME XIV. *Quand le premier coefficient de l'équation est l'unité,* 1° *la somme des racines égale le second coefficient changé de signe;* 2° *la somme des produits des racines deux à deux égale le troisième coefficient;* 3° *la somme des produits des racines trois à trois égale le quatrième coefficient changé de signe, et ainsi de suite. Enfin le produit des racines égale le dernier terme pris avec son signe ou un signe contraire, suivant que* m *est pair ou impair.*

Exemples.

1° Nous avons déjà reconnu ces relations dans l'équation du second degré (1re partie, n° 149). Si l'on appelle a, b, c les trois racines d'une équation du troisième degré

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0,$$

on a

$$a+b+c=-A_1, \quad ab+ac+bc=A_2, \quad abc=-A_3.$$

2° Résoudre une équation du troisième degré, sachant que l'une des racines est égale à la somme des deux autres. Supposons que la racine a soit égale à la somme $b+c$ des deux autres. De la première relation $a+b+c=-A_1$ on tire $2a=-A_1$, d'où $a=-\frac{A_1}{2}$. La seconde relation $a(b+c)+bc=A_2$ donne $bc=A_2-a^2=A_2-\frac{A_1^2}{4}$; donc les deux autres racines sont fournies par l'équation du second degré

$$x^2+\frac{A_1}{2}x+\left(A_2-\frac{A_1^2}{4}\right)=0.$$

La troisième relation donne $bc=-\frac{A_3}{a}=\frac{2A_3}{A_1}$. Pour que les racines de l'équation du troisième degré jouissent de la propriété énoncée, il faut donc que les coefficients de l'équation satisfassent à la relation

$$\frac{2A_3}{A_1}=A_2-\frac{A_1^2}{4}.$$

194. THÉORÈME XV. *Une équation algébrique, à coefficients réels, a ses racines imaginaires conjuguées deux à deux.*

Nous avons dit (n° 171) que, lorsque dans le polynôme $f(x)$ on remplace x par $a+bi$, le polynôme acquiert une valeur de la forme $A+Bi$. Remplaçons maintenant x par la quantité imaginaire conjuguée $a-bi$; si tous les coefficients sont réels, il est clair que la valeur du polynôme ne différera de la précédente qu'en ce que i aura été changé en $-i$; on obtiendra donc la quantité conjuguée $A-Bi$.

Si $a + bi$ est racine de l'équation $f(x) = 0$, le premier résultat est nul, et l'on a séparément $A = 0$, $B = 0$; donc le second résultat est également nul, et la quantité $a - bi$ est aussi racine de l'équation.

Cette proposition n'est vraie que si tous les coefficients de l'équation sont réels; car s'il y a des coefficients imaginaires, quand on remplace $a + bi$ par $a - bi$, on change le signe de i dans la valeur de x, mais non dans les coefficients qui restent constants; on ne peut plus dire alors que le second résultat soit conjugué du premier.

195. COROLLAIRE. *Les racines imaginaires conjuguées d'une équation algébrique, à coefficients réels, sont du même ordre de multiplicité.*

Le produit

$$(x - a - bi)(x - a + bi)$$

des facteurs premiers, qui correspondent à deux racines imaginaires conjuguées, est un polynôme du second degré

$$(x - a)^2 + b^2$$

à coefficients réels. Le polynôme proposé $f(x)$ du degré m est divisible par ce polynôme du second degré, et le quotient $f_1(x)$ est un polynôme du degré $m - 2$ à coefficients réels. Si l'équation $f_1(x) = 0$ admet encore la racine imaginaire $a + bi$, elle admettra aussi la racine conjuguée $a - bi$; le polynôme $f_1(x)$ sera divisible par $(x - a)^2 + b^2$, et le nouveau quotient $f_2(x)$ sera un polynôme du degré $m - 4$ à coefficients réels, et ainsi de suite. On en conclut que l'équation proposée $f(x) = 0$ admet les deux racines conjuguées $a + bi$, $a - bi$, au même ordre de multiplicité; si n est cet ordre, le polynôme $f(x)$ sera divisible par

$$[(x - a)^2 + b^2]^n.$$

Diviseurs d'un polynôme.

196. Considérons un polynôme entier, que nous supposerons décomposé en ses facteurs premiers

$$f(x) = A(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q \ldots\ldots$$

Pour qu'un polynôme entier le divise exactement, il est nécessaire et il suffit que ce second polynôme soit formé des mêmes facteurs premiers, avec des exposants au plus égaux. Un polynôme diviseur sera donc de la forme

$$A'(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots\ldots,$$

les exposants α, β, γ,..... étant au plus égaux respectivement à n, p, q,....., et l'on obtiendra tous les diviseurs en donnant à α les valeurs 0, 1, 2,....., n, à β les valeurs 0, 1, 2,....., p, etc., de sorte que le nombre des diviseurs algébriques est

$$(n+1)(p+1)(q+1) \ldots\ldots - 1.$$

Nous regardons comme un même diviseur algébrique les polynômes qui ne diffèrent que par un facteur constant.

Plus grand commun diviseur algébrique.

197. Étant donnés deux polynômes entiers, on appelle *plus grand commun diviseur algébrique* de ces deux polynômes le polynôme entier du plus haut degré qui divise exactement les deux polynômes proposés. Si l'on suppose ces deux polynômes décomposés en facteurs premiers, le plus grand commun diviseur sera le produit des facteurs premiers communs affectés chacun du plus petit exposant. Mais on peut trouver

le plus grand commun diviseur par une série de divisions, comme en arithmétique.

Appelons X et X_1 les deux polynômes proposés, ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, et supposons que X soit d'un degré égal ou supérieur à X_1. Divisons X par X_1; appelons Q le quotient et X_2 le reste, ce qui donne

$$X = X_1 Q + X_2.$$

Je dis que le plus grand commun diviseur entre X et X_1 est le même qu'entre X_1 et X_2. En effet, soit $(x-a)^n$ un facteur commun à X et à X_1; si l'on pose $X=(x-a)^n X'$, $X_1=(x-a)^n X'_1$, on a

$$X_2 = X - X_1 Q = (x-a)^n (X' - X'_1 Q);$$

le polynôme X_2, étant égal au produit de $(x-a)^n$ par un polynôme entier, admet aussi le facteur $(x-a)^n$. Ainsi tout facteur binôme $(x-a)^n$ commun à X et X_1 est aussi commun à X_1 et à X_2. On démontrerait de même que, réciproquement, tout facteur binôme commun à X_1 et à X_2 est aussi commun à X et X_1. Les facteurs premiers communs étant les mêmes de part et d'autre, les produits de ces facteurs communs, ou les plus grands communs diviseurs, sont les mêmes.

Ainsi, la question est ramenée à la recherche du plus grand commun diviseur entre X_1 et X_2. On procédera de la même manière : en divisant X_1 par X_2, et appelant X_3 le reste, on aura

$$X_1 = X_2 Q_1 + X_3.$$

Le plus grand commun diviseur entre X_1 et X_2 est le même qu'entre X_2 et X_3.

Divisons X_2 par X_3, et supposons que l'on trouve un reste

nul; il est clair que X_3, divisant exactement X_2, est le produit des facteurs premiers communs à X_2 et à X_3 ; c'est donc le plus grand commun diviseur cherché.

Ainsi, *pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynômes, après avoir ordonné ces deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes de* x, *on divise celui qui est du degré le plus élevé par l'autre, celui-ci par le reste de la division, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un reste nul. Le dernier diviseur est le plus grand commun diviseur cherché.*

Dans ces opérations, les degrés des restes, et par suite des diviseurs successifs, vont en diminuant; on arrivera donc à un reste nul ou à un reste indépendant de x. Dans le premier cas, les deux polynômes admettent un plus grand commun diviseur algébrique d'un certain degré. Dans le second cas, ils n'en admettent pas, et sont dits premiers entre eux.

198. Remarque. Dans la pratique, afin d'éviter les coefficients fractionnaires, on peut multiplier tous les termes de l'un quelconque des polynômes par une quantité indépendante de x, pourvu que cette quantité soit finie et différente de zéro. De même, si l'on aperçoit un facteur commun aux coefficients de tous les termes d'un certain reste, on peut le supprimer. Je suppose, par exemple, que pour effectuer la première division on ait multiplié le dividende par un nombre constant A, et qu'ensuite on ait divisé tous les termes du reste par le nombre constant B, on aura

$$AX = X_1Q + BX_2.$$

On démontrera, comme précédemment, que tout facteur

binôme $(x-a)^n$ commun à X et à X_1 est aussi commun à X_1 et à X_2, et réciproquement. Ainsi rien n'est changé dans la recherche du plus grand commun diviseur algébrique.

Racines communes à deux équations.

199. Si les deux équations

$$X = 0 \qquad X_1 = 0$$

ont n racines communes, les deux polynômes X et X_1 admettent n facteurs du premier degré communs, et, par conséquent, ont un plus grand commun diviseur du degré n. Pour trouver les racines communes à deux équations, on cherchera donc le plus grand commun diviseur des deux premiers membres de ces équations; soit D ce plus grand commun diviseur, l'équation

$$D = 0$$

donnera les racines communes aux deux équations.

Si les deux polynômes n'ont pas de plus grand commun diviseur algébrique, les deux équations n'ont pas de racine commune. Si le plus grand commun diviseur est du premier degré, il y a une racine commune; s'il est du second degré, il y a deux racines communes, etc.

Exemples

1° Trouver les racines communes aux deux équations

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0,$$
$$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0.$$

Voici le détail des opérations :

$$
\begin{array}{r|r|l}
 & x\ -1 & 2x+1 \\
x^4-3x^3+\ 3x^2-\ 3x+\ 2 & 2x^3-5x^2+\ x+2 & x^2-3x+2 \\
\cline{2-3}
2x^4-6x^3+\ 6x^2-\ 6x+\ 4 & -2x^3+6x^2-4x & \\
\cline{2-2}
-2x^4+5x^3-\ \ x^2-\ 2x\quad & x^2-3x+2 & \\
\cline{1-1}
-\ x^3+\ 5x^2-\ 8x+\ 4 & 0 & \\
-2x^3+10x^2-16x+\ 8 & & \\
+2x^3-\ 5x^2+\ \ x+\ 2 & & \\
\cline{1-1}
5x^2-15x+10 & & \\
x^2-\ 3x+\ 2 & &
\end{array}
$$

On a multiplié deux fois le premier dividende par 2, afin d'éviter les fractions, et on a simplifié le reste en le divisant par 5. Le plus grand commun diviseur des deux polynômes est x^2-3x+2. Il y a donc deux racines communes qui seront données par l'équation

$$x^2-3x+2=0;$$

ces deux racines communes sont 1 et 2.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES RACINES ÉGALES.

Les racines multiples jouissent de propriétés particulières dont nous allons nous occuper.

200. Théorème I. *Un facteur premier d'ordre* n *d'un polynôme entier est facteur d'ordre* n — 1 *de sa dérivée.*

Soit

$$f(x) = (x-a)^n \times \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier qui ne contient plus le facteur $x-a$. En prenant la dérivée du produit, on a

$$f'(x) = n(x-a)^{n-1}\varphi(x) + (x-a)^n \varphi'(x),$$

ou

$$f'(x) = (x-a)^{n-1}[n\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x)].$$

La quantité placée entre parenthèses n'est pas divisible par $x-a$; car, si l'on y fait $x=a$, elle se réduit à $n\varphi(a)$, quantité qui n'est pas nulle. Ainsi la dérivée $f'(x)$ admet le facteur premier $x-a$ au degré $n-1$.

201. Théorème II. *Le plus grand commun diviseur entre un polynôme et sa dérivée est le produit des facteurs premiers qui composent le polynôme proposé, l'exposant de chacun d'eux étant diminué d'une unité.*

Supposons le polynôme proposé décomposé en ses facteurs premiers, et soit

$$f(x) = A(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

En vertu du théorème précédent, la dérivée $f'(x)$ admet les facteurs $(x-a)^{n-1}$, $(x-b)^{p-1}$, $(x-c)^{q-1}$,.....; le produit des

facteurs premiers communs aux deux polynômes $f(x)$, $f'(x)$, ou le plus grand commun diviseur algébrique, est donc

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}\ldots\ldots$$

Si k désigne le nombre des facteurs premiers différents qui composent le polynôme proposé, comme l'exposant de chacun d'eux est diminué d'une unité, le plus grand commun diviseur sera du degré $m-k$.

202. Corollaire. Il résulte du théorème I qu'une racine simple du polynôme $f(x)$ n'annule pas la dérivée; qu'une racine double du polynôme est racine simple de la première dérivée, mais n'annule pas la seconde dérivée; qu'une racine triple du polynôme est racine double de la première dérivée, et par conséquent racine simple de la seconde dérivée, mais n'annule pas la troisième, et ainsi de suite. En général, une racine d'ordre n du polynôme $f(x)$ annule les $n-1$ premières dérivées, et n'annule pas la n^e dérivée.

La réciproque est vraie; si la quantité a annule le polynôme $f(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées, mais n'annule pas la n^e dérivée, c'est une racine d'ordre n du polynôme proposé. Car si la racine était d'un ordre n' inférieur à n, elle n'annulerait pas la n'^e dérivée; si elle était d'un ordre supérieur à n, elle annulerait la n^e dérivée, ce qui est contraire à l'hypothèse.

203. On a souvent besoin de chercher la relation qui doit exister entre les coefficients d'une équation algébrique entière pour que cette équation ait deux racines égales. Il est nécessaire et il suffit que les deux équations $f(x)=0$, $f'(x)=0$ aient une racine commune; on cherchera donc le plus grand commun diviseur des deux polynômes $f(x)$, $f'(x)$, et

quand on sera arrivé à un diviseur du premier degré, on écrira que le reste est nul.

Mais l'emploi des fonctions homogènes simplifie beaucoup l'opération. Soit

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m$$

le polynôme proposé; si l'on remplace x par $\frac{x}{y}$, on a

$$A_0 \frac{x^m}{y^m} + A_1 \frac{x^{m-1}}{y^{m-1}} + A_2 \frac{x^{m-2}}{y^{m-2}} + \ldots\ldots + A_m;$$

en multipliant ensuite par y^m, on obtient une fonction entière, homogène, et du degré m, des deux variables x et y; nous la désignerons par $f(x, y)$,

$$f(x, y) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + A_2 x^{m-2} y^2 + \ldots\ldots + A_m y^m.$$

D'après une propriété des fonctions homogènes (n° 146), on a l'identité

$$x f'_x(x, y) + y f'_y(x, y) = m f(x, y).$$

Si dans la fonction $f(x, y)$ on fait $y = 1$, on reproduit évidemment la fonction proposée $f(x)$; de même $f'_x(x, y)$ reproduit la dérivée $f'(x)$. Appelons a la racine double et concevons que dans l'égalité précédente on remplace x par a et y par 1; puisque les deux polynômes $f(x, y)$ et $f'_x(x, y)$ s'annulent, le polynôme $f'_y(x, y)$ s'annulera aussi. Réciproquement, si pour $x = a$ et $y = 1$, les deux polynômes $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ s'annulent, le polynôme $f(x, y)$ s'annulera aussi. Ainsi, la condition pour que l'équation $f(x) = 0$ ait une racine double, est que les deux équations

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0,$$

dans lesquelles on fait $y=1$, aient une racine commune.

Comme application, cherchons la condition pour que l'équation du troisième degré

$$x^3+px+q=0$$

ait deux racines égales. On a ici

$$f(x, y)=x^3+pxy^2+qy^3,$$
$$f'_x(x, y)=3x^2+py^2,$$
$$f'_y(x, y)=2pxy+3qy^2.$$

En égalant à zéro les deux dérivées partielles, dans lesquelles on fait $y=1$, on a les deux équations

$$3x^2+p=0, \qquad 2px+3q=0,$$

qui doivent avoir une racine commune. De la seconde on tire

$$x=-\frac{3q}{2p},$$

et, en portant cette valeur dans la première, on obtient la condition

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0.$$

La racine double est $x=-\frac{3q}{2p}$; la somme des racines étant nulle, la racine simple est $\frac{3q}{p}$.

Ainsi l'équation

$$x^3-3a^2x\pm 2a^3=0,$$

dont les coefficients satisfont à la condition précédente, admet la racine double $x=\pm a$, et la racine simple $x=\mp 2a$.

L'équation $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ admet la racine double $x = 1$.

204. La méthode précédente peut être généralisée. Nous savons que pour qu'une équation $f(x) = 0$ ait trois racines égales, il est nécessaire et il suffit que les trois équations

$$(1) \qquad f(x) = 0, \quad f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0$$

aient une racine commune. Considérons, comme précédemment, la fonction homogène $f(x,y)$, que l'on forme en remplaçant dans la fonction proposée x par $\frac{x}{y}$ et multipliant par y^m. Les deux dérivées partielles du premier ordre $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ sont des fonctions homogènes du degré $m-1$; en leur appliquant aussi le théorème des fonctions homogènes, on a les identités

$$xf'_x + yf'_y = mf(x, y),$$
$$xf''_{xx} + yf''_{xy} = (m-1)f'_x(x, y),$$
$$xf''_{xy} + yf''_{yy} = (m-1)f'_y(x, y).$$

Appelons a la racine triple; faisons $x = a$ et $y = 1$; puisqu'on a $f(x) = 0$, $f'_x = 0$, $f''_{xx} = 0$, on déduit de la première relation $f'_y = 0$ et des deux suivantes $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 0$. Réciproquement, supposons que pour $x = a$ et $y = 1$ on ait

$$(2) \qquad f''_{xx} = 0, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{yy} = 0;$$

les deux dernières relations donnent $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ et la première $f(x) = 0$. Ainsi, toute valeur de x qui satisfait aux équations (1) satisfait aux équations (2) et réciproquement. On en conclut que les conditions nécessaires et suffisantes

pour que l'équation $f(x)=0$ ait trois racines égales, sont que les équations (2) aient une racine commune. Ces conditions sont au nombre de deux. Les deux équations $f''_{x^2}=0$, $f''_{xy}=0$ doivent avoir une racine commune; première condition ; cette racine doit annuler f''_{y^2} ; seconde condition.

Cherchons par exemple les conditions pour que l'équation du quatrième degré

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

ait trois racines égales. On a

$$\begin{aligned}
f(x,y)&=x^4+px^2y^2+qxy^3+ry^4,\\
f'_x&=4x^3+2pxy^2+qy^3,\\
f'_y&=2px^2y+3qxy^2+4ry^3,\\
f''_{x^2}&=12x^2+2py^2,\\
f''_{xy}&=4pxy+3qy^2,\\
f''_{y^2}&=2px^2+6qxy+12ry^2.
\end{aligned}$$

En égalant à zéro les trois dérivées partielles du second ordre, dans lesquelles on fait $y=1$, on a les trois équations

$$\begin{aligned}
12x^2+2p&=0,\\
4px+3q&=0,\\
2px^2+6qx+12r&=0.
\end{aligned}$$

De la seconde on déduit $x=-\frac{3q}{4p}$; en portant cette valeur dans les deux autres, on a les deux conditions

$$\frac{3^3}{2^3}q^2=12pr=-p^3.$$

205. L'application du théorème II permet, non-seulement

de reconnaître si une équation a des racines égales, mais encore de décomposer le polynôme en plusieurs autres, formés chacun du produit des facteurs premiers du même degré de multiplicité. Soit X le polynôme proposé; appelons X_1 le produit des facteurs premiers simples, X_2 le produit des facteurs doubles, chaque facteur étant pris seulement au premier degré, X_3 le produit des facteurs triples, et ainsi de suite; on écrira le polynôme X sous la forme

$$X = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4 \ldots\ldots$$

Cherchons le plus grand commun diviseur entre le polynôme X et sa dérivée. S'il n'y a pas de commun diviseur algébrique, on en conclura que le polynôme n'admet que des racines simples, et l'on aura $X = X_1$. S'il y a un plus grand commun diviseur algébrique D_1, ce plus grand commun diviseur étant égal au produit des facteurs multiples dont on diminue les exposants d'une unité, sera de la forme

$$D_1 = X_2 X_3^2 X_4^3 \ldots\ldots,$$

et l'on conclura que le polynôme X admet des racines multiples.

Cherchons de même le plus grand commun diviseur entre le polynôme D_1 et sa dérivée; s'il n'y a pas de commun diviseur algébrique, on en conclura que le polynôme D_1 n'admet que des racines simples et l'on aura $D_1 = X_2$; dans ce cas, le polynôme proposé X admet des racines doubles, mais n'admet pas de racines d'un degré plus élevé de multiplicité. S'il y a un plus grand commun diviseur D_2, ce plus grand commun diviseur sera de la forme

$$D_2 = X_3 X_4^2 \ldots\ldots;$$

on en conclura que le polynôme D_1 admet des racines multiples, et, par conséquent, que le polynôme X admet des racines multiples d'un ordre égal ou supérieur à 3.

On cherchera ensuite le plus grand commun diviseur entre le polynôme D_2 et sa dérivée. S'il n'y a pas de commun diviseur algébrique, on en conclura que le polynôme D_2 n'admet que des racines simples et l'on aura $D_2 = X_3$; le polynôme proposé admet des racines triples, mais n'admet pas de racines d'un ordre plus élevé. S'il y a un plus grand commun diviseur D_3, ce plus grand commun diviseur sera de la forme

$$D_3 = X_4 \ldots\ldots ;$$

on en conclura que le polynôme D_2 admet des racines multiples, et, par conséquent, que le polynôme X admet des racines multiples d'un ordre égal ou supérieur à 4.

On continuera de cette manière jusqu'à ce qu'on arrive à un polynôme premier avec sa dérivée. Supposons, pour fixer les idées, que le polynôme D_3 soit premier avec sa dérivée ; on aura $D_3 = X_4$, et l'on en conclura que le polynôme X n'admet pas de racines multiples d'un ordre supérieur à 4. On a, dans ce cas, la suite des polynômes

$$\begin{aligned}
X &= X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4, \\
D_1 &= \quad X_2 X_3^2 X_4^3, \\
D_2 &= \qquad X_3 X_4^2, \\
D_3 &= \qquad\quad X_4.
\end{aligned}$$

En divisant chacun de ces polynômes par le suivant, on obtient une nouvelle suite de polynômes entiers que nous désignerons par Q_1, Q_2, Q_3, savoir :

$$Q_1 = \frac{X}{D_1} = X_1 X_2 X_3 X_4,$$
$$Q_2 = \frac{D_1}{D_2} = X_2 X_3 X_4,$$
$$Q_3 = \frac{D_2}{D_3} = X_3 X_4,$$
$$D_3 = X_4.$$

Divisant chacun de ces nouveaux polynômes par le suivant, on a enfin

$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_1;$$
$$\frac{Q_2}{Q_3} = X_2,$$
$$\frac{Q_3}{D_3} = X_3,$$
$$D_3 = X_4.$$

Une fois trouvés ces polynômes X_1, X_2, X_3, X_4, la résolution de l'équation proposée $X = 0$ est ramenée à celle des équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0,$$

qui n'ont plus de racines égales; la première donne les racines simples de l'équation proposée, la seconde les racines doubles, la troisième les racines triples, etc.

Ainsi, *pour ramener la résolution d'une équation qui a des racines égales à celles d'autres équations de degrés moindres ayant leurs racines inégales, on cherche le plus grand commun diviseur entre le premier membre de l'équation et sa dérivée, le plus grand commun diviseur entre ce premier plus grand commun diviseur et sa dérivée, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive*

à un polynôme premier avec sa dérivée; on divise ensuite le polynôme proposé par le premier plus grand commun diviseur, le premier par le second, et ainsi de suite; on divise enfin chacun de ces quotients par le suivant, et l'on égale à zéro ces nouveaux quotients. On obtient de la sorte des équations donnant, la première les racines simples, la seconde les racines doubles, la troisième les racines triples...., de l'équation proposée.

Exemple.

Soit l'équation du septième degré

$$X = x^7 - 2x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 1 = 0.$$

En cherchant le plus grand commun diviseur entre le polynôme X et sa dérivée, on trouve

$$D_1 = x^3 - x^2 - x + 1;$$

en cherchant le plus grand commun diviseur entre le polynôme D_1 et sa dérivée, on trouve

$$D_2 = x - 1.$$

Ce dernier polynôme étant premier avec sa dérivée, on en conclut que l'équation proposée n'admet pas de racines multiples d'un ordre supérieur au troisième et l'on peut poser $X = X_1 X_2^2 X_3^3$. Divisant ces polynômes l'un par l'autre, on a les quotients

$$Q_1 = \frac{X}{D_1} = x^4 + x^3 - x - 1,$$

$$Q_2 = \frac{D_1}{D_2} = x^2 - 1,$$

$$D_2 = x - 1.$$

De nouvelles divisions donnent

$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_1 = x^2 + x + 1,$$

$$\frac{Q_2}{D_2} = X_2 = x + 1,$$

$$D_2 = X_3 = x - 1.$$

La résolution de l'équation proposée se trouve ainsi ramenée à celle des trois équations

$$x^2 + x + 1 = 0, \quad x + 1 = 0, \quad x - 1 = 0.$$

La première donne deux racines simples imaginaires, la seconde une racine double -1, la troisième une racine triple $+1$.

Exercices.

1° Appliquer la méthode des racines égales aux équations

$$x^8 - 7x^7 - 2x^6 + 118x^5 - 259x^4 - 83x^3 + 612x^2 - 108x - 432 = 0,$$
$$x^9 + 2x^8 + x^7 + 6x^6 + 7x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = 0,$$
$$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = 0.$$

CHAPITRE IV.

NOMBRE DES RACINES RÉELLES.

Il importe de trouver le nombre des racines réelles comprises entre deux nombres donnés. Nous considérerons successivement les divers théorèmes qui se rapportent à cette question.

Théorème de Descartes.

206. Lorsqu'un polynôme, à coefficients réels, est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, deux termes consécutifs affectés de signes contraires présentent ce qu'on nomme une *variation*; deux termes consécutifs affectés du même signe présentent une *permanence*. Par exemple, le polynôme

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 7x - 8$$

a trois variations : une du premier au second terme, une du troisième au quatrième, une du cinquième au sixième ; il a deux permanences : une du second au troisième terme, une du quatrième au cinquième. Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

LEMME. *Lorsqu'on multiplie un polynôme par* x — a, a *étant un nombre positif, on introduit au moins une variation nouvelle dans le polynôme.*

Un polynôme quelconque, à coefficients réels, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, peut être écrit sous la forme

$$A_m x^m \ldots\ldots + A_{n+1} x^{n+1} - A_n x^n \ldots\ldots - A_{p+1} x^{p+1} + A_p x^p + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \pm A_{s+1} x^{s+1} \mp A_s x^s \ldots\ldots\ldots \mp A_0.$$

Le polynôme commence par un groupe de termes positifs, puis vient un groupe de termes négatifs, puis un groupe de termes positifs, et ainsi de suite jusqu'au dernier groupe qui commence au terme $\mp A_s x^s$, à partir duquel il n'y a plus de changement de signes. Chaque groupe contient un nombre quelconque de termes et même un seul terme. Les variations se présentent quand on passe du dernier terme d'un groupe au premier du groupe suivant.

En multipliant ce polynôme par $x - a$, nous aurons

$$\begin{array}{r|r|r|r} A_m x^{m+1} \ldots\ldots - A_n & x^{n+1} \ldots\ldots + A_p & x^{p+1} \ldots\ldots \mp A_s & x^{s+1} \ldots\ldots \\ - A_{n+1} a & + A_{p+1} a & \mp A_{s+1} a & \pm A_0 a. \end{array}$$

La multiplication par x conserve à chaque terme son signe et donne la première ligne; la multiplication par $-a$ change tous les signes et donne la seconde ligne. Le premier terme $A_m x^{m+1}$ du produit a le signe $+$; le terme du degré $n+1$, provenant de l'addition de deux termes négatifs, a le signe $-$; quels que soient les signes des termes intermédiaires, il est certain qu'entre ces deux termes de signes contraires il y a au moins une variation; on retrouve ainsi au produit la première variation du multiplicande, celle qui a lieu de x^m à x^n. De même le terme du degré $p+1$, provenant de l'addition de deux termes positifs, a le signe $+$; entre les deux termes en x^{n+1} et en x^{p+1}, qui sont de signes contraires, il y a au moins une variation, et l'on retrouve ainsi au produit la seconde variation du multiplicande, celle qui a lieu de x^n à x^p. Pour simplifier le raisonnement, nous pouvons maintenant réduire le multiplicande aux premiers termes des différents groupes, et ne considérer dans le produit que les termes correspondants, c'est-à-dire ceux dont le degré est supérieur d'une

unité; ces termes du produit étant affectés des mêmes signes que les termes correspondants du multiplicande, il est clair que l'on retrouve au produit toutes les variations du multiplicande. Ainsi, quand on sera arrivé au terme en x^{s+1}, on aura retrouvé au produit toutes les variations du multiplicande. A partir du terme en x^s, le multiplicande ne présente plus aucune variation; mais le terme constant $\mp A_0$ du multiplicande, multiplié par $-a$, donne le dernier terme $\pm A_0 a$ du produit; ce dernier terme ayant un signe contraire à celui du terme en x^{s+1}, le dernier groupe du produit contiendra encore au moins une variation. On en conclut que le produit contient au moins une variation de plus que le multiplicande.

Il peut arriver que la multiplication par $x - a$ introduise plus d'une variation nouvelle; dans ce cas elle en introduit ou 3, ou 5,...., en général un nombre impair. En effet, dans chacun des groupes du produit, nous avons retrouvé la variation correspondante du multiplicande; mais, dans ce groupe, il peut y avoir plus d'une variation; car les termes intermédiaires, provenant de l'addition de deux termes de signes contraires, ont des signes quelconques; mais, lorsqu'il y en a plus d'une, il y a un nombre impair, c'est-à-dire une, plus un nombre pair, parce que, entre deux termes de signes contraires, il y a nécessairement un nombre impair de changements de signes; ainsi chaque groupe du produit pourra introduire un nombre pair de variations nouvelles. Le dernier groupe en introduit un nombre impair; on a donc en tout un nombre impair de variations nouvelles.

207. THÉORÈME. *Dans une équation algébrique, à coefficients réels, le nombre des racines positives ne peut surpasser le*

nombre des variations, et, s'il en diffère, il en diffère d'un nombre pair.

1° Soit $f(x)=0$ une équation, à coefficients réels, ayant un certain nombre de racines positives $a, b, c, \ldots, g$; on a

$$f(x)=(x-a)(x-b)\;.\;.\;.\;.\;.\;(x-g)\varphi(x),$$

le quotient $\varphi(x)$ ayant aussi ses coefficients réels. Or, si nous multiplions ce polynôme $\varphi(x)$ successivement par chacun des facteurs binômes $x-a$, $x-b, \ldots, x-g$, qui correspondent aux racines positives, chaque multiplication introduisant au moins une variation nouvelle, le produit final $f(x)$ contiendra au moins autant de variations qu'il y a de racines positives.

2° Nous remarquons que le polynôme $\varphi(x)$ a son dernier terme positif, sans quoi il aurait une racine positive, ce qui est contraire à l'hypothèse; ce polynôme contient donc un nombre pair de variations, s'il en contient. D'autre part, nous avons vu que la multiplication par chacun des facteurs tels que $x-a$ introduit un nombre impair de variations, c'est-à-dire une, plus un nombre pair; on aura ainsi finalement dans le polynôme $f(x)$ autant de variations qu'il y a de racines positives, plus une somme de nombres pairs, c'est-à-dire plus un nombre pair de variations.

Par exemple, l'équation

$$x^5-3x^4-2x^3+x^2+7x-8=0$$

présente trois variations. Elle ne peut admettre plus de trois racines positives; elle en aura trois, ou une.

L'équation

$$x^7-5x^3+8x^2-4x+6=0$$

présente quatre variations; elle ne peut admettre plus de

quatre racines positives; elle en aura quatre, ou deux, ou pas du tout.

L'équation

$$x^6+4x^3-5=0$$

présente une seule variation. Elle ne peut avoir plus d'une racine positive, et elle en a certainement une.

208. Corollaire. Si dans l'équation $f(x)=0$ on change x en $-x$, on obtient une nouvelle équation qui a évidemment pour racines celles de l'équation proposée changées de signes; ainsi, les racines négatives de la première deviennent positives dans la seconde. Si donc on applique le théorème précédent à l'équation transformée, on aura une limite supérieure du nombre des racines négatives de l'équation proposée.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^5-3x^4-2x^3+x^2+7x-8=0;$$

en remplaçant x par $-x$, on obtient la transformée

$$-x^5-3x^4+2x^3+x^2-7x-8=0,$$

qui présente deux variations. Cette dernière équation admet au plus deux racines positives, et par conséquent la proposée au plus deux racines négatives. Si elle n'en a pas deux, elle n'en a pas du tout.

De même l'équation

$$x^7-5x^3+8x^2-4x+6=0,$$

ayant pour transformée l'équation

$$-x^7+5x^3+8x^2+4x+6=0,$$

qui présente une seule variation, a une racine négative et

une seule. Nous avons vu déjà que cette équation a au plus quatre racines positives; elle admet donc au plus cinq racines réelles; comme elle a sept racines, puisqu'elle est du septième degré, on en conclut qu'elle a au moins deux racines imaginaires.

L'équation

$$x^6+4x^3-5=0$$

ayant pour transformée

$$x^6-4x^3-5=0,$$

a une racine négative, et une seule. Nous avons vu déjà qu'elle a une racine positive; donc, elle a en tout deux racines réelles, et, par conséquent, quatre racines imaginaires.

209. Remarques. Un polynôme complet du degré m est formé de $m+1$ termes; le nombre des variations augmenté du nombre des permanences est égal à m. Quand on remplace x par $-x$, deux termes consécutifs étant l'un de degré pair, l'autre de degré impair, l'un ne change pas de signe, l'autre en change; par conséquent, les variations du polynôme proposé se changent en permanences dans le polynôme transformé et les permanences en variations; il en résulte que le nombre des variations du polynôme transformé est égal au nombre des permanences du polynôme proposé. Si donc on désigne par v et v' les nombres de variations que présentent une équation complète du degré m et sa transformée, on aura $v+v'=m$.

Considérons maintenant une équation incomplète, et supposons qu'entre deux termes consécutifs on introduise un terme affecté d'un signe quelconque; si ces deux termes ont

des signes contraires, le nombre des variations ne change pas; s'ils ont le même signe, le nombre des variations ne change pas ou augmente de deux unités, suivant que le terme introduit est affecté de ce même signe ou d'un signe contraire. Si dans le nouveau polynôme on introduit encore un terme, le nombre des variations sera de même augmenté de 0 ou 2 variations, et ainsi de suite. On conclut de là que, lorsque dans un polynôme incomplet on introduit des termes affectés de signes quelconques, de manière à le compléter, le nombre des variations ne change pas ou augmente d'un nombre pair. Pour la même raison, le nombre des variations du polynôme transformé ne change pas ou augmente d'un nombre pair. Si donc on désigne par v et v' les nombres de variations de l'équation proposée et de sa transformée, par v_1 et v'_1 les nombres de variations de l'équation complétée d'une façon quelconque et de sa transformée, la somme $v_1 + v'_1$ surpassera $v + v'$ d'un nombre pair $2k_1$, qui peut être nul. Mais on sait que $v_1 + v'_1 = m$; on a donc d'une manière générale $v + v' = m - 2k_1$.

Le théorème de Descartes donne une limite supérieure v du nombre des racines positives de l'équation proposée, et une limite supérieure v' du nombre des racines négatives; il y a donc au plus $v + v'$ racines réelles et, par conséquent, au moins $m - (v + v')$ ou $2k_1$ racines imaginaires; on obtient ainsi une limite inférieure du nombre des racines imaginaires, et cette limite est un nombre pair.

Lorsqu'on sait, par la nature de la question, que l'équation a toutes ses racines réelles, le nombre p des racines positives est égal au nombre v des variations de l'équation proposée, le nombre n des racines négatives au nombre v' des va-

riations de la transformée. En effet, puisque le nombre des racines positives et celui des racines négatives diffèrent des nombres de variations v et v' de nombres pairs $2k$ et $2k'$, on a $p = v - 2k$, $n = v' - 2k'$, et par suite

$$p + n = v + v' - 2k - 2k' = m - 2k_1 - 2k - 2k';$$

pour que le nombre $p + n$ des racines réelles soit égal à m, il est nécessaire que les trois nombres pairs $2k_1$, $2k$, $2k'$ soient nuls séparément, d'où l'on déduit $p = v$, $n = v'$.

On peut observer que toutes les fois qu'entre deux termes de même signe manquent un ou plusieurs termes, l'équation admet des racines imaginaires. Car, si l'on comble l'intervalle en introduisant des termes qui avec le premier présentent une suite de variations, on augmente le nombre des variations de l'équation proposée, sans changer celui de la transformée; par conséquent la limite inférieure $2k_1$ du nombre des racines imaginaires n'est pas nulle. Remarquons encore que, de quelque manière que l'on complète l'équation, ce nombre $2k_1$ reste le même.

Théorème de Rolle.

210. THEORÈME. *Deux racines réelles consécutives d'un polynôme entier comprennent au moins une racine réelle de la dérivée.*

Soient a et b deux racines réelles consécutives d'un polynôme entier $f(x)$, à coeffients réels; dans l'intervalle, le polynôme conserve toujours le même signe, par exemple le signe $+$, sans quoi il y aurait une autre racine entre a et b. Supposons a plus petit que b et faisons croître x de a et b d'une manière continue; la fonction $f(x)$ part de zéro et

devient positive, c'est-à-dire plus grande que zéro; donc elle commence par croître, et la dérivée est positive pour des valeurs de x voisines de a; la fonction $f(x)$, qui reste constamment positive, arrive ensuite à zéro en décroissant, et par conséquent la dérivée est négative pour des valeurs de x voisines de b. Ainsi, quand x varie de a à b, la dérivée a des valeurs de signes contraires dans le voisinage de a et dans le voisinage de b; comme elle est elle-même finie et continue, elle s'annule au moins une fois dans l'intervalle de a à b. En général, cet intervalle comprendra un nombre impair de racines réelles de la dérivée (n° 191).

Ce théorème est vrai pour les fonctions continues quelconques, pourvu que la dérivée soit elle-même finie et continue, dans l'intervalle considéré. Nous nous sommes servi de cette propriété pour la démonstration de la série de Taylor (n° 152).

211. COROLLAIRE. *Deux racines réelles consécutives de la dérivée ne comprennent pas plus d'une racine réelle du polynôme proposé.* Car si deux racines réelles consécutives a' et b' de la dérivée comprenaient deux racines réelles a et b du polynôme proposé, ces deux racines réelles a et b comprendraient elles-mêmes une racine de la dérivée, ce qui est impossible.

Mais il n'est pas certain qu'entre les deux racines consécutives a' et b' de la dérivée, il y ait une racine du polynôme proposé. Pour décider la question, il suffira de substituer a' et b' à la place de x dans le polynôme; si l'on obtient deux résultats de même signe, il n'y a aucune racine dans l'intervalle; si l'on obtient deux résultats de signes contraires, il y a une racine. Soient $a', b', c', \ldots, h'$ les racines réelles de la dérivée $f'(x)$, rangées par ordre de gran-

deur croissante. Dans le polynôme $f(x)$ substituons la suite des quantités

$$-\infty,\ a',\ b',\ c',\ \ldots\ldots,\ h', +\infty,$$

et examinons les signes des résultats. Chacun des intervalles comprendra zéro ou une racine du polynôme $f(x)$, suivant que les résultats seront de même signe ou de signes contraires. Ainsi, *quand on sait résoudre la dérivée, on peut trouver le nombre des racines réelles de l'équation proposée.*

Si n est le nombre des racines réelles de la dérivée, le nombre des intervalles étant $n+1$, on en conclut que l'équation proposée admet au plus $n+1$ racines réelles.

Équations du troisième degré.

212. Considérons l'équation du troisième degré

$$x^3+A_1x^2+A_2x+A_3=0.$$

Si l'on égale à zéro la dérivée, on obtient une équation du second degré

$$3x^2+2A_1x+A_2=0.$$

Pour que l'équation proposée ait ses trois racines réelles, il faut d'abord que la dérivée ait ses racines réelles. Appelons a' la plus petite racine de la dérivée, b' la plus grande, et substituons dans le polynôme du troisième degré la suite des quantités

$$-\infty,\ a',\ b',\ +\infty.$$

Pour $x=-\infty$, on a un résultat négatif, pour $x=+\infty$ un résultat positif; si a' donne un résultat positif, b' un résultat négatif, chacun des intervalles, présentant un changement

de signe, comprendra une racine réelle et l'équation du troisième degré aura ses trois racines réelles.

213. Mais nous réduirons d'abord l'équation à une forme plus simple. On peut toujours, par une transformation facile, faire disparaître le second terme d'une équation. Soit l'équation

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + A_m = 0.$$

Posons $x = y + k$; l'équation devient

$$(y+k)^m + A_1 (y+k)^{m-1} + \cdots\cdots = 0.$$

ou

$$y^m + (mk + A_1) y^{m-1} + \cdots\cdots = 0.$$

Si l'on fait $k = -\frac{A_1}{m}$, le coefficient du second terme s'évanouit, et l'équation prend la forme

$$y^m + B_2 y^{m-2} + B_3 y^{m-3} + \cdots\cdots + B_m = 0.$$

Il était aisé de prévoir ce résultat. La relation $y = x - k$ signifie que les racines de la nouvelle équation sont égales aux racines de l'équation proposée diminuées chacune de la quantité constante k; la somme des racines de la seconde équation est égale à la somme des racines de la première, c'est-à-dire à $-A_1$, moins mk; si donc on fait $k = -\frac{A_1}{m}$, cette somme est nulle, et par conséquent le coefficient du second terme est nul.

Pour réduire l'équation du troisième degré, on posera $x = y - \frac{A_1}{3}$, et l'on ramènera ainsi l'équation à la forme plus simple

$$y^3 + py + q = 0.$$

Par cette transformation, quand les coefficients sont réels, les racines réelles restent réelles, les racines imaginaires restent imaginaires.

214. Cherchons maintenant la condition pour que l'équation

$$x^3+px+q=0$$

ait ses trois racines réelles. L'équation

$$3x^2+p=0$$

devant avoir ses deux racines réelles, il faut que le coefficient p soit négatif; supposons cette condition remplie; nous aurons

$$a'=-\sqrt{-\frac{p}{3}},\quad b'=\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

On doit avoir en outre $f(a')>0$, c'est-à-dire

$$-\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3-p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q>0,$$

ou

$$(1)\qquad -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}>-\frac{q}{2}.$$

La condition $f(b')<0$ se déduira de la précédente en changeant le signe du radical et le sens de l'inégalité, ce qui donne

$$\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}<-\frac{q}{2},$$

ou

$$(2)\qquad -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}>\frac{q}{2}.$$

Le coefficient p étant négatif, les premiers membres des inégalités (1) et (2) sont des quantités positives. Supposons $q > 0$; l'inégalité (1), ayant son second membre négatif, sera toujours satisfaite; l'inégalité (2) ayant ses deux membres positifs, on peut les élever au carré, et l'on en déduit

$$-\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

ou

$$(3) \qquad \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

Supposons maintenant $q < 0$; c'est l'inégalité (2) qui est toujours vérifiée, et l'inégalité (1) conduit à la même inégalité (3). D'ailleurs l'inégalité (3) ne peut être satisfaite que si le coefficient p est négatif.

Ainsi, *pour que l'équation*

$$x^3 + px + q = 0$$

ait ses trois racines réelles, il est nécessaire et il suffit que ses coefficients satisfassent à l'inégalité

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

Quand le premier membre de cette inégalité est une quantité positive, l'équation n'a qu'une racine réelle. Quand cette quantité est nulle, l'équation a deux racines égales comme nous l'avons vu au n° 203.

Exemples.

1° L'equation

$$x^3 + 5x - 2 = 0,$$

dans laquelle le coefficient du second terme est positif, n'a qu'une racine réelle; cette racine est positive.

2° L'équation

$$x^3-6x+4=0$$

a ses trois racines réelles. La transformée en $-x$ n'ayant qu'une variation, une seule racine est négative, les deux autres sont positives.

3° L'équation

$$x^3-6x+6=0$$

n'a qu'une racine réelle. Cette racine est négative.

4° Déterminer les dimensions d'un cylindre circulaire droit, dont on connaît la surface totale et le volume.

Désignons la surface par $4\pi a^2$ et le volume par $\frac{4\pi b^3}{3}$; appelons x le rayon de la base et y la hauteur. On a les deux équations

$$(1)\quad y=\frac{4b^3}{3x^2},\qquad (2)\quad x^3-2a^2x+\frac{4b^3}{3}+0.$$

L'équation (2) admet toujours une racine négative, qui ne convient pas à la question. Pour que le problème soit possible, il faut que l'équation ait une racine positive, et par conséquent ses trois racines réelles; la condition est

$$b^3<a^3\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Quand cette condition est remplie, l'équation a deux racines positives, auxquelles correspondent des valeurs positives de y, et le problème admet deux solutions. Quand $b^3=a^3\sqrt{\frac{2}{3}}$, ces deux solutions se confondent en une seule.

Équations du quatrième degré.

215. Si l'on fait disparaître le second terme (n° 213), l'équation du quatrième degré se ramène à la forme

$$(1) \qquad x^4+Ax^2+Bx+C=0.$$

Posons $x=\frac{1}{y}$; l'équation devient

$$(2) \qquad Cy^4+By^3+Ay^2+1=0.$$

En égalant à zéro la dérivée, on obtient l'équation

$$4Cy^3+3By^2+2Ay=0,$$

ou

$$y(4Cy^2+3By+2A)=0,$$

que l'on peut résoudre. On saura donc reconnaître combien l'équation (2), et par suite combien l'équation proposée, admet de racines réelles.

216. On peut ramener la résolution d'une équation du quatrième degré à celle d'une équation du troisième degré.

Un polynôme du quatrième degré est le produit de quatre facteurs du premier degré $(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)$. Le produit $(x-a)\,(x-b)$ de deux facteurs quelconques du premier degré donne un facteur du second degré x^2+px+q; le polynôme du quatrième degré admet donc six facteurs du second degré; mais, comme on peut les associer deux à deux, il n'est décomposable que de trois manières en un produit de deux facteurs du second degré.

Soit

$$(3) \qquad f(x)=x^4+2Ax^3+Bx^2+2Cx+D=0$$

l'équation proposée. On a identiquement

$$(4) \qquad f(x) = (x^2 + Ax + \lambda)^2 - [(2\lambda + A^2 - B)x^2 + 2(A\lambda - C)x + (\lambda^2 - D)],$$

λ étant une quantité arbitraire. On peut disposer de cette quantité de manière que le polynone du second degré

$$(2\lambda + A^2 - B)x^2 + 2(A\lambda - C)x + (\lambda^2 - D)$$

soit carré parfait; il suffit pour cela de poser

$$(5) \qquad (\lambda^2 - D)(2\lambda + A^2 - B) - (A\lambda - C)^2 = 0;$$

on obtient ainsi, pour déterminer λ, une équation du troisième degré. A chaque valeur de λ correspond une manière de mettre le polynone du quatrième degré sous la forme d'une différence de deux carrés

$$(6) \qquad f(x) = (x^2 + Ax + \lambda)^2 - \left(x\sqrt{2\lambda + A^2 - B} + \frac{A\lambda - C}{\sqrt{2\lambda + A^2 - B}}\right)^2,$$

et par conséquent de le décomposer en un produit de deux facteurs du second degré; ces deux facteurs sont

$$(7) \quad x^2 + Ax + \lambda \pm \left(x\sqrt{2\lambda + A^2 - B} + \frac{A\lambda - C}{\sqrt{2\lambda + A^2 - B}}\right).$$

Pour résoudre l'équation du quatrième degré (3), il suffit de calculer l'une des racines de l'équation du troisième degré (5); en égalant à zéro les deux facteurs correspondants (7), on obtient deux équations du second degré d'où l'on déduira les quatre racines de l'équation proposée.

Lorsque l'équation (3) a ses coefficients réels, l'équation (5) a aussi ses coefficients réels. Il est à remarquer que l'une au moins des valeurs réelles de λ rend positive la quantité $2\lambda + A^2 - B$; car l'équation (5), dont le premier

membre acquiert une valeur négative quand on y remplace λ par $\frac{B - A^2}{2}$, admet un nombre impair de racines réelles et supérieures à $\frac{B - A^2}{2}$. A une valeur de λ jouissant de cette propriété correspond un couple de facteurs du second degré à coefficients réels. Une valeur réelle de λ inférieure à $\frac{B - A^2}{2}$ donnerait deux facteurs ayant leurs coefficients imaginaires et conjugués. Une valeur imaginaire de λ donnerait deux facteurs ayant aussi leurs coefficients imaginaires, mais non conjugués; car, dans ce cas, le radical $\sqrt{2\lambda + A^2 - B}$ ayant une valeur imaginaire $\alpha + \beta i$, dont la partie réelle α est différente de zéro, les coefficients $A \pm \alpha \pm \beta i$ de la première puissance de x, dans les facteurs du second degré, sont imaginaires et non conjugués.

Il résulte de là que, si l'équation (3) a ses quatre racines réelles, tous les facteurs du second degré ayant leurs coefficients réels, les trois valeurs de λ sont réelles et supérieures à $\frac{B - A^2}{2}$; si l'équation a ses quatre racines imaginaires, un couple de facteurs ayant ses coefficients réels et chacun des deux autres des coefficients imaginaires conjugués, les trois valeurs de λ sont encore réelles, mais une seule est supérieure à $\frac{B - A^2}{2}$; enfin, si l'équation a deux racines réelles et deux imaginaires, un couple de facteurs ayant ses coefficients réels et chacun des autres des coefficients imaginaires non conjugués, deux valeurs de λ sont imaginaires. Les réciproques sont vraies.

Équations trinômes.

217. La méthode, dont nous avons fait usage pour trouver le nombre des racines réelles de l'équation du troisième degré, s'applique à l'équation trinôme

$$(1)\qquad x^m + Ax^n + B = 0.$$

Si l'on prend la dérivée, on obtient l'équation

$$mx^{m-1} + nAx^{n-1} = 0,$$

ou

$$(2)\qquad x^{n-1}(mx^{m-n} + nA) = 0,$$

dont on sait trouver les racines réelles.

On peut aussi l'appliquer à l'équation

$$(3)\qquad x^m + Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + C = 0;$$

car si l'on prend la dérivée, on obtient l'équation

$$mx^{m-1} + (m-n)Ax^{m-n-1} + (m-2n)Bx^{m-2n-1} = 0,$$

ou

$$(4)\qquad x^{m-2n-1}[mx^{2n} + (m-n)Ax^n + (m-2n)B] = 0,$$

que l'on peut résoudre.

On ramène l'équation

$$x^m + Ax^{2n} + Bx^n + C = 0$$

à la forme précédente, en posant $x = \frac{1}{y}$.

Théorème de Sturm.

218. Quand on sait résoudre la dérivée, le théorème de Rolle suffit pour trouver le nombre des racines réelles d'une équation. Mais, quand on ne sait pas résoudre la dérivée, ce théorème est insuffisant. On peut recourir alors au théorème

de Sturm qui donne, dans tous les cas, le moyen de trouver exactement le nombre des racines réelles d'une équation algébrique comprises entre deux nombres donnés.

Soit $f(x)$ un polynôme entier à coefficients réels, a une racine réelle de ce polynôme; on peut déterminer un nombre positif h assez petit pour que l'intervalle de $a-h$ à $a+h$ ne comprenne aucune racine du polynôme et de sa dérivée, autre que a. Nous démontrerons d'abord que, si l'on fait varier x de $a-h$ à $a+h$, *le polynôme et sa dérivée ont des valeurs de signes contraires avant la racine et des valeurs de même signe après la racine.*

En effet, faisons varier x de a à $a+h$. Si la dérivée $f'(x)$ est positive dans cet intervalle, la fonction $f(x)$ va en croissant; comme elle part de zéro, elle devient positive. Si la dérivée est négative, la fonction va en décroissant; comme elle part de zéro, elle devient négative. Ainsi, quand x varie de a à $a+h$, la fonction et sa dérivée ont le même signe. Faisons maintenant varier x de $a-h$ à a. Si la dérivée $f'(x)$ est positive dans cet intervalle, la fonction $f(x)$ va en croissant; comme elle arrive à zéro, elle était négative. Si la dérivée est négative, la fonction va en décroissant; comme elle arrive à zéro, elle était positive. Ainsi, quand x varie de $a-h$ à a, la fonction et sa dérivée ont des signes contraires.

219. *Cas où l'équation n'a pas de racines égales.* Considérons d'abord le cas où le polynôme $f(x)$ n'a que des racines simples. Désignons par X ce polynôme, ordonné suivant les puissances décroissantes de x et par X_1 sa dérivée. Divisons X par X_1; appelons Q_1 le quotient et X_2 le reste changé de signe. Divisons X_1 par X_2; appelons Q_2 le quotient et X_3 le reste changé de signe, et ainsi de suite. Cette série d'opé-

rations est celle que l'on effectue pour trouver le plus grand commun diviseur entre les polynomes X et X_1; ces polynômes étant premiers entre eux (n° 201), après un certain nombre de divisions on arrivera à un reste indépendant de x; appelons X_p ce dernier reste changé de signe. On a ainsi

$$\begin{aligned} X &= X_1 Q_1 - X_2, \\ X_1 &= X_2 Q_2 - X_3, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ X_{p-2} &= X_{p-1} Q_{p-1} - X_p. \end{aligned}$$

Considérons la suite des polynômes

$$X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots\ldots,\ X_p.$$

Nous allons démontrer que si dans cette suite on donne à x successivement deux valeurs réelles particulières x_0 et x_1, x_0 étant inférieure à x_1, et que l'on compte les variations que présentent les deux suites de quantités, *le nombre des variations perdues, quand on passe de x_0 à x_1, indique exactement le nombre des racines réelles comprises dans cet intervalle.*

Faisons croître x d'une manière continue de x_0 et x_1; une modification dans le nombre des variations ne pourra s'opérer que si l'un des polynômes change de signe, et, par conséquent, passe par zéro. Nous remarquons d'abord que deux polynômes consécutifs X_{n-1} et X_n ne peuvent s'annuler pour une même valeur de x; car si cela avait lieu, en vertu de la relation

$$X_{n-1} = X_n Q_n - X_{n+1},$$

le polynôme suivant X_{n+1} s'annulerait aussi, et de même X_{n+2}, $X_{n+3}, \ldots,$ X_p, ce qui est impossible, puisque X_p est indépendant de x.

Supposons qu'un polynôme intermédiaire X_n change de signe, quand x passe par la valeur a, les deux polynômes X_{n-1} et X_{n+1} ont des valeurs différentes de zéro, et ces valeurs sont de signes contraires; car, pour $x=a$, l'égalité précédente se réduit à

$$X_{n-1}=-X_{n+1}.$$

Or, on peut prendre h assez petit pour que, x variant de $a-h$ à $a+h$, chacun des polynômes X_{n-1} et X_{n+1} conserve le même signe; ces deux polynômes auront donc des signes contraires dans tout cet intervalle. Quels que soient les signes du polynôme X_n pour $x=a-h$ et pour $x=a+h$, la suite des trois polynômes

$$X_{n-1},\ X_n,\ X_{n+1},$$

présentera évidemment, pour chacune de ces deux valeurs de x, une variation et une seule: seulement cette variation se sera déplacée d'un côté ou de l'autre. Ainsi, le nombre des variations que présente la suite des polynômes n'est pas modifié, quand l'un des polynômes intermédiaires change de signe. D'ailleurs la dernière quantité X_p, qui est indépendante de x, conserve toujours le même signe. Le nombre des variations de la suite ne changera donc que si le premier polynôme X change de signe.

Mais nous avons vu que si x passe par une racine a du polynôme X, ce polynôme et sa dérivée X_1 ont des signes contraires un peu avant la racine, et le même signe un peu après; il y a donc une variation perdue en tête de la suite des polynômes. Il en est de même chaque fois que x passe par une des racines du polynôme. Ainsi, le nombre des variations perdues dans la suite des polynômes, quand on passe de la valeur x_0 à la valeur plus grande x_1, est égal

au nombre des racines réelles comprises dans cet intervalle.

220. Si l'on veut avoir le nombre total des racines réelles du polynôme X, il faudra dans la suite des polynômes faire d'abord $x = -\infty$, et compter le nombre des variations, faire ensuite $x = +\infty$, et compter le nombre des variations; le nombre des variations perdues est égal au nombre des racines réelles. Mais nous savons que pour une valeur de x très-grande en valeur absolue, le signe de chaque polynôme est celui de son premier terme; on pourra donc, dans l'application de la méthode, remplacer chaque polynôme par son premier terme.

Cherchons les conditions pour qu'un polynôme entier X du degré m ait toutes ses racines réelles. Les degrés des polynômes successifs allant en diminuant depuis m à zéro, le nombre des polynômes de la suite est au plus égal à $m+1$, et par conséquent le nombre des variations que présente la suite des polynômes pour une valeur particulière de x est au plus égal à m. Pour que le polynôme X ait ses m racines réelles, il faut que, pour $x = -\infty$, la suite des polynômes présente m variations, ce qui exige d'abord que la suite des polynômes soit complète, c'est-à-dire que le degré de chaque polynôme soit inférieur d'une unité au degré du polynôme précédent, et ensuite que les premiers termes soient tous précédés du même signe, par exemple du signe $+$, afin que, pour $x = -\infty$, deux polynômes consécutifs présentent une variation. Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes; car, si elles sont remplies, la suite des polynômes ne présente plus aucune variation pour $x = +\infty$, et le nombre des variations perdues est bien m.

Considérons, par exemple, l'équation du troisième degré

$x^3+px+q=0$. On a la suite des polynomes

$$X = x^3+px+q,$$
$$X_1=3x^2+p,$$
$$X_2=-\frac{2p}{3}x-q,$$
$$X_3=-\frac{4p^3+27q^2}{4p^2}.$$

L'équation aura ses trois racines réelles si la suite présente trois variations pour $x=-\infty$, et n'en présente plus aucune pour $x=+\infty$; ceci exige que l'on ait $p<0$ et $4p^3+27q^2<0$, et l'on retrouve ainsi la condition que nous avons déjà obtenue par le théorème de Rolle (n° 214).

221. Remarque I. Pour éviter les coefficients fractionnaires, on peut multiplier chaque dividende par un nombre constant, comme nous l'avons expliqué lors de la recherche du plus grand commun diviseur (n° 198); mais ici il faut avoir soin que le multiplicateur soit positif, afin de ne pas changer les signes des polynômes que l'on a à considérer. On peut de même diviser tous les termes d'un polynôme par un nombre positif.

Soit, par exemple, l'équation

$$X=x^5-5x^3+10x^2-15x+16=0.$$

En divisant par 5 la dérivée

$$5x^4-15x^2+20x-15,$$

on la remplacera par le polynôme plus simple

$$X_1=x^4-3x^2+4x-3.$$

Le reste de la première division est divisible par 2; en changeant les signes, on a

$$X_2=x^3-3x^2+6x-8.$$

La seconde division donne un reste du premier degré qui, changé de signe, est

$$X_3 = 2x - 7.$$

Dans la dernière division, pour éviter les coefficients fractionnaires, on multipliera le dividende trois fois successivement par 2; le reste, changé de signe, est

$$X_4 = -153.$$

La suite des polynômes présente deux variations pour $x = -\infty$, et une seule pour $x = +\infty$. Donc l'équation proposée n'a qu'une racine réelle, et cette racine est négative.

222. Remarque II. Lorsqu'après un certain nombre de divisions successives on arrive à un polynôme X_q, qui conserve le même signe quand x varie de x_0 à x_1, il est inutile de pousser plus loin le calcul; pour trouver le nombre des racines réelles comprises entre x_0 et x_1, on appliquera la règle énoncée à la suite des polynômes

$$X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots\ldots,\ X_q;$$

car le raisonnement suppose simplement que le dernier polynôme ne change pas de signe dans l'intervalle considéré.

Considérons, par exemple, l'équation

$$X = x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0,$$

on a

$$X_1 = 5x^4 - 9x^2 + 2x - 8.$$

Les deux premières divisions donnent

$$X_2 = 6x^3 - 3x^2 + 32x + 50.$$
$$X_3 = 415x^2 + 636x + 346.$$

On reconnaît immédiatement que ce dernier polynôme, qui

est du second degré, a ses racines imaginaires, et par conséquent conserve toujours le signe de son premier terme. On s'arrêtera là. La suite des polynômes X, X_1, X_2, X_3 présente trois variations pour $x=-\infty$, une pour $x=0$, et n'en présente plus aucune pour $x=+\infty$; on en conclut que l'équation proposée admet trois racines réelles, deux négatives et une positive.

223. *Cas où l'équation a des racines égales.* Nous avons supposé jusqu'à présent que l'équation n'a pas de racines égales; si elle en avait, l'opération conduirait, non plus à un reste indépendant de x, mais à un reste nul; le dernier diviseur X_p serait le plus grand commun diviseur algébrique entre le polynôme X et sa dérivée X_1. Ce dernier polynôme X_p divise chacun des polynômes

$$X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots\ldots,\ X_{p-1},\ X_p;$$

si l'on conçoit ces divisions effectuées, les quotients forment une nouvelle suite de polynômes

$$Y,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ldots,\ Y_{p-1},\ 1,$$

sur lesquels nous pouvons répéter les raisonnements faits précédemment. Nous remarquons d'abord que deux polynômes consécutifs Y_{n-1}, Y_n ne peuvent s'annuler à la fois; car de l'égalité

$$X_{n-1}=X_nQ_n-X_{n+1},$$

en divisant par X_p, on déduit

$$Y_{n-1}=Y_nQ_n-Y_{n+1};$$

si les deux polynômes Y_{n-1}, Y_n s'annulaient pour une même valeur de x, le suivant Y_{n+1} s'annulerait aussi, et de même Y_{n+2}, Y_{n+3},....., et enfin Y_p ou 1, ce qui est impossible. Nous

remarquons ensuite que si un polynôme intermédiaire Y_n change de signe quand x passe par la valeur a, comme on a pour cette valeur

$$Y_{n-1} = -Y_{n+1},$$

les deux polynômes Y_{n-1}, Y_{n+1} ont des valeurs différentes de zéro et de signes contraires dans l'intervalle de $a-h$ à $a+h$; il en résulte que, quels que soient les signes du polynôme Y_n pour $x=a-h$ et $x=a+h$, la suite des trois polynômes

$$Y_{n-1},\ Y_n,\ Y_{n+1}$$

présentera, pour chacune de ces valeurs de x, une variation et une seule; seulement cette variation se sera déplacée d'un côté ou de l'autre.

On en conclut, comme précédemment, que le nombre des variations de la seconde suite n'est pas modifié quand un polynôme intermédiaire change de signe; le dernier Y_p ou 1 conservant toujours le même signe, le nombre des variations ne changera donc que si le premier polynôme Y change de signe.

Nous savons que le plus grand commun diviseur X_p entre un polynôme X et sa dérivée X_1 est égal au produit des facteurs premiers du polynôme X, l'exposant de chacun d'eux étant diminué d'une unité; si donc on divise le polynôme X par ce plus grand commun diviseur X_p, on obtiendra pour quotient un polynôme Y égal au produit de tous les facteurs premiers qui composent le polynôme X, l'exposant de chacun d'eux étant réduit à l'unité. Soit, par exemple,

$$X = (x-a)^n (x-b)^p \ldots\ldots;$$

on aura

$$X_p = \pm(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}\ldots\ldots,$$

$$Y = \frac{X}{X_p} = \pm(x-a)(x-b)\ldots\ldots$$

L'équation $Y = 0$ admet toutes les racines de l'équation $X = 0$, et n'en admet pas d'autres, mais chacune en qualité de racine simple.

Le polynôme Y_1, quotient de X_1 par X_p, n'est pas la dérivée de Y; cependant les deux polynômes Y, Y_1, placés en tête de la seconde suite de polynômes, jouissent de la même propriété que les deux polynômes X, X_1, placés en tête de la première; quand x passe par une racine a, ces deux polynômes ont des signes contraires un peu avant la racine, et le même signe un peu après. En effet, pour $x = a - h$, les deux polynômes X et X_1 ayant des valeurs de signes contraires, leurs quotients Y et Y_1 par une même quantité X_p différente de zéro, ont aussi des valeurs de signes contraires; pour $x = a + h$, les polynômes X et X_1 ayant des valeurs de même signe, les quotients Y et Y_1 ont aussi des valeurs de même signe. Ainsi, quand x passe par une racine a, il y a une variation perdue en tête de la seconde suite de polynômes, et comme la même chose a lieu pour chaque racine, on en conclut que le nombre des variations perdues, quand x passe d'une valeur x_0 à une valeur plus grande x_1, est égal au nombre des racines réelles comprises dans cet intervalle.

Mais on peut se dispenser de former la seconde suite de polynômes et appliquer la règle énoncée à la première suite elle-même. Car, si l'on considère les deux suites

$$X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots\ldots,\ X_{p-1},\ X_p,$$

$$Y,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ldots,\ Y_{p-1},\ 1,$$

et que l'on attribue à x une valeur particulière x_0 différente de chacune des racines, on obtiendra les valeurs des polynômes de la seconde suite en divisant celles des polynômes de la première par un même nombre différent de zéro, savoir la valeur du polynôme X_p. Si ce diviseur est positif, tous les signes sont conservés; s'il est négatif, tous les signes sont changés; dans tous les cas, le nombre des variations que présentent les deux suites de valeurs, est le même. Par conséquent, le nombre des variations perdues, quand x passe de x_0 à x_1, est le même de part et d'autre.

Ainsi, le théorème de Sturm peut être appliqué à la suite des polynômes

$$X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots\ldots,\ X_p,$$

dans tous les cas, que l'équation $X=0$ ait ou non des racines égales; le nombre des variations perdues, quand x passe de x_0 à x_1, indique le nombre des racines réelles différentes comprises dans cet intervalle. S'il y a des racines égales, chaque racine multiple n'est comptée qu'une fois; en d'autres termes, on ne tient pas compte du degré de multiplicité des racines.

Toutefois, dans la pratique, lorsque l'opération révèle l'existence d'un plus grand commun diviseur algébrique entre le polynôme X et sa dérivée, on a soin, comme nous l'avons expliqué au n° 205, de ramener la résolution de l'équation proposée $X=0$ à celle d'équations de degrés moindres qui n'ont plus de racines égales, et l'on applique le théorème de Sturm à celles-ci, si cela est nécessaire.

Exercices.

1° Partager un hémisphère en deux parties équivalentes par un plan parallèle à la base.

2° Déterminer les dimensions d'un prisme droit à base carrée, connaissant la surface totale et le volume.

3° Dans une sphère inscrire un cône d'un volume donné.

4° Déterminer un triangle connaissant les distances du centre du cercle inscrit aux trois sommets, ou les distances du centre du cercle circonscrit aux trois côtés.

5° Mener par les sommets d'un triangle trois droites passant par un même point et déterminant sur les côtés trois segments non consécutifs égaux entre eux.

6° Construire un segment de sphère ayant un volume donné et pour base un cercle donné.

7° Dans un cercle donné, inscrire un triangle isocèle d'une surface donnée.

8° Déterminer les côtés d'un triangle rectangle connaissant la somme des deux côtés de l'angle droit, et le volume qu'engendre le triangle tournant autour de l'hypoténuse.

LIVRE VII

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

CHAPITRE PREMIER.

LIMITES DES RACINES.

224. Quand on veut calculer les racines réelles d'une équation $f(x)=0$, il importe de déterminer d'abord des quantités entre lesquelles soient comprises toutes ces racines. Tout nombre plus grand que la plus grande racine positive est une *limite supérieure* des racines de l'équation. En cherchant une limite supérieure des racines positives de la transformée $f(-x)=0$, on obtiendra une limite *inférieure* des racines de l'équation proposée, de sorte que toutes les racines réelles de cette équation seront comprises entre ces deux limites.

Les premières méthodes que nous allons donner pour déterminer une limite supérieure des racines positives reposent sur le théorème suivant :

THÉORÈME I. *Lorsqu'un polynôme entier, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de* x *et ayant son premier coefficient positif, n'a qu'une variation, si un nombre positif* a *mis à la place de* x *rend le polynôme positif, le polynôme prend des valeurs constamment croissantes, quand* x *croît à partir de* a.

Soit

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots\ldots-A_nx^{m-n}-A_{n+1}x^{m-n-1}-\ldots\ldots$$

un pareil polynôme. Nous pouvons le mettre sous la forme

$$f(x)=x^{m-n}\left[A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots-\left(A_n+A_{n+1}\frac{1}{x}+A_{n+2}\frac{1}{x^2}+\cdots\right)\right].$$

Posons

$$P = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots\ldots,$$

$$Q = A_n + A_{n+1}\frac{1}{x} + A_{n+2}\frac{1}{x^2} + \ldots\ldots;$$

nous aurons

$$f(x) = x^{m-n}(P - Q).$$

Quand on attribue à x des valeurs positives de plus en plus grandes, les deux quantités positives P et Q vont, la première en augmentant, la seconde en diminuant; leur différence P — Q va donc en augmentant, et, par conséquent, si elle est positive pour $x = a$, elle acquerra des valeurs positives de plus en plus grandes pour les valeurs de x croissantes à partir de a. Le facteur positif x^{m-n} va d'ailleurs en augmentant; donc le produit $x^{m-n}(P - Q)$ prend des valeurs positives de plus en plus grandes.

225. Première méthode. Soit

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0$$

une équation, à coefficients réels, et ayant son premier coefficient égal à l'unité. Désignons par $-N$ celui des coefficients négatifs qui a la plus grande valeur absolue. Nous pouvons mettre le premier membre de l'équation sous la forme

$$f(x) = x^m - Nx^{m-1} - Nx^{m-2} - \ldots\ldots - N$$
$$+ (N + A_1)x^{m-1} + (N + A_2)x^{m-2} + \ldots\ldots + (N + A_m).$$

Posons

$$\varphi(x) = x^m - Nx^{m-1} - Nx^{m-2} - \ldots\ldots - N,$$
$$\psi(x) = (N + A_1)x^{m-1} + (N + A_2)x^{m-2} + \ldots\ldots + (N + A_m),$$

nous aurons

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Le polynôme $\psi(x)$, ayant tous ses coefficients positifs, prend des valeurs positives croissantes pour des valeurs positives croissantes de x. En vertu du théorème précédent, le polynôme $\varphi(x)$, ayant son premier coefficient positif et ne présentant qu'une variation, prendra des valeurs positives de plus en plus grandes, quand x croîtra à partir d'un nombre positif a rendant ce polynôme positif. Le polynôme $f(x)$, qui est la somme des deux précédents, jouira évidemment de la même propriété, et par conséquent le nombre a sera une limite supérieure des racines positives de l'équation proposée. On obtiendra donc une limite supérieure en cherchant un nombre positif a qui rende positif le polynôme $\varphi(x)$. Mais on a

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x^m - N(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots\ldots + 1)\\ &= x^m - \frac{N(x^m - 1)}{x-1} = \frac{x^m(x - 1 - N) + N}{x - 1};\end{aligned}$$

il suffira de prendre $a = N + 1$.

226. Deuxième méthode. Lorsque le terme du degré $m-1$ a son coefficient positif ou nul, on peut en général trouver une limite beaucoup plus petite que la précédente. Soit $m-n$ le degré du premier terme négatif; nous mettrons le premier membre de l'équation sous la forme

$$\begin{aligned}f(x) = x^m - Nx^{m-n} - Nx^{m-n-1} - \ldots\ldots - N\\ + A_1x^{m-1} + \ldots\ldots + (N + A_n)x^{m-n} + \ldots\ldots + (N + A_m).\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x^m - Nx^{m-n} - Nx^{m-n-1} - \ldots\ldots - N,\\ \psi(x) &= A_1x^{m-1} + \ldots\ldots + (N + A_n)x^{m-n} + \ldots\ldots + (N + A_m),\end{aligned}$$

on a

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Comme précédemment, le polynôme proposé $f(x)$ est la somme de deux polynômes, l'un $\psi(x)$ qui a tous ses coefficients positifs, l'autre $\varphi(x)$ qui a son premier coefficient positif et une seule variation; il suffira donc de chercher un nombre positif a qui rende positif le polynôme $\varphi(x)$. Mais on a

$$\varphi(x) = x^m - \mathrm{N}(x^{m-n} + x^{m-n-1} + \ldots\ldots + 1)$$
$$= x^m - \frac{\mathrm{N}(x^{m-n+1} - 1)}{x-1} = \frac{x^{m-n+1}\,[x^{n-1}(x-1) - \mathrm{N}] + \mathrm{N}}{x-1}.$$

Supposons la variable x plus grande que l'unité; la quantité $x^{n-1}(x-1) - \mathrm{N}$ est plus grande que $(x-1)^n - \mathrm{N}$; le polynôme $\varphi(x)$ sera donc positif pour la valeur $a = 1 + \sqrt[n]{\mathrm{N}}$.

Considérons, par exemple, l'équation

$$x^7 + 4x^6 - 10x^5 - 13x^4 + 7x^3 + 12x^2 - 9 = 0.$$

Le coefficient négatif, dont la valeur absolue est la plus grande, est -13; le premier coefficient négatif est celui du terme en x^5; ici $n = 2$; la formule $a = 1 + \sqrt[n]{\mathrm{N}}$ donne $1 + \sqrt{13}$; donc 5 est une limite supérieure des racines positives.

Dans la transformée

$$x^7 - 4x^6 - 10x^5 + 13x^4 + 7x^3 - 12x^2 + 9 = 0,$$

le coefficient négatif le plus grand en valeur absolue est -12; la formule $a = 1 + \mathrm{N}$ donne la limite supérieure 13 des racines positives de cette équation. Ainsi les racines réelles de l'équation proposée sont comprises entre -13 et $+5$.

227. Troisième méthode. Lorsque le premier membre de l'équation, dont nous supposons toujours positif le premier

coefficient, ne présente qu'une variation, l'équation n'a qu'une racine positive; quand x varie de zéro à cette racine, le polynôme est négatif; à partir de la racine, le polynôme prend des valeurs positives de plus en plus grandes. Ainsi, tout nombre positif a qui rend le polynôme positif est une limite supérieure.

Dans le cas général, après avoir partagé le polynôme en plusieurs groupes de termes ordonnés suivant les puissances décroissantes de x et tels que chaque groupe ait son premier coefficient positif et ne présente qu'une variation au plus, on cherchera un nombre positif a qui rende positif chacun des groupes; quand x croît à partir de a, chaque groupe prend des valeurs positives croissantes, et leur somme jouit de la même propriété; ce nombre a est donc une limite supérieure des racines positives de l'équation proposée.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 10x^3 + 5x^2 - 10x - 6 = 0;$$

nous partagerons le premier membre en trois groupes

$$(x^6 - 2x^5) + (4x^4 - 10x^3) + (5x^2 - 10x - 6) = 0,$$

ou

$$x^5(x - 2) + 2x^3(2x - 5) + (5x^2 - 10x - 6) = 0.$$

Le premier groupe est positif pour les valeurs de x supérieures à 2; le second groupe pour les valeurs de x supérieures à $\frac{5}{2}$; ce nombre $\frac{5}{2}$, rendant aussi positif le troisième groupe, est une limite supérieure des racines positives. La première méthode aurait donné une limite 11 beaucoup plus élevée.

Reprenons l'équation

$$x^7 + 4x^6 - 10x^5 - 13x^4 + 7x^3 + 12x^2 - 9 = 0$$

que nous avons déjà considérée. Nous la partagerons en deux groupes

$$x^4(x^3 + 4x^2 - 10x - 13) + (7x^3 + 12x^2 - 9) = 0;$$

en substituant des nombres entiers de plus en plus grands, on reconnaît que 1 rend positif le second groupe et 3 le premier groupe; donc 3 est une limite supérieure des racines positives. En partageant la transformée en trois groupes

$$x^5(x^2 - 4x - 10) + x^2(13x^2 + 7x - 12) + 9 = 0,$$

on reconnaît que 1 rend positif le second groupe et 6 le premier ; donc 6 est une limite supérieure des racines positives de la transformée, et, par conséquent, les racines réelles de l'équation proposée sont comprises entre -6 et $+3$. La seconde méthode nous avait donné les limites -13 et $+5$.

Considérons encore l'équation

$$x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 20x - 15 = 0.$$

Partageons d'abord les termes en deux groupes

$$x^3(x - 6) + (2x^2 - 20x - 15) = 0,$$

dans l'ordre où ils se présentent. Le premier groupe est positif pour les valeurs de x plus grandes que 6; le polynôme du second degré qui constitue le second groupe, ayant sa racine positive inférieure à 11, est positif pour toutes les valeurs de x supérieures à 11; on en conclut que 11 est une limite supérieure des racines positives. Mais on peut abaisser cette limite, en partageant le terme négatif $-20x$ en

deux parties, et joignant l'une des parties au premier groupe, ce qui fait

$$x(x^3-6x^2-10)+(2x^2-10x-15)=0.$$

Les deux groupes étant positifs pour $x=7$, ce nombre est une limite supérieure.

228. Méthode de Newton. Cette méthode résulte du théorème suivant :

Théorème II. *Lorsqu'un nombre* a *rend positifs un polynôme entier et ses dérivées successives, ce polynôme et ses dérivées prennent des valeurs positives croissantes, quand* x *croît à partir de* a.

Donnons à x la valeur $a+h$; le polynôme $f(x)$, du degré m, ordonné par rapport aux puissances croissantes de h, devient

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\frac{h}{1}+f''(a)\frac{h^2}{1.2}+\dots\dots+f^m(a)\frac{h^m}{1.2\dots\dots m};$$

si les quantités $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$,....., $f^m(a)$ sont positives, il est clair que le polynôme prend des valeurs positives croissantes pour des valeurs positives croissantes de h, c'est-à-dire quand x croît à partir de a. Les dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$....., jouissent évidemment de la même propriété.

D'après cela, supposons qu'on ait formé les dérivées successives du polynôme proposé. La dérivée d'ordre m est une constante positive, puisque le premier coefficient est positif. La dérivée d'ordre $m-1$ est un polynôme du premier degré; soit a' sa racine; tous les nombres plus grands que a' rendent positif ce polynôme. La dérivée d'ordre $m-2$ est un polynôme du second degré; si le nombre a' rend ce polynôme positif, en vertu du théorème précédent, tous les nombres plus grands que a' le rendront aussi positif; si ce polynôme du second degré est négatif pour $x=a'$, ses deux racines sont

réelles et la plus grande a'' est supérieure a a'; pour toutes les valeurs de x supérieures à a'', la dérivée d'ordre $m-2$ et les deux suivantes sont positives. La dérivée d'ordre $m-3$ est un polynôme du troisième degré; on verra si le nombre a'' le rend positif, et, pour simplifier les calculs, on substituera à a'' le nombre entier immédiatement supérieur; si ce nombre rend le polynôme positif, tous les nombres plus grands le rendront aussi positif; s'il le rend négatif, on essaiera des nombres entiers de plus en plus grands, jusqu'à ce qu'on en trouve un a''' qui rende le polynôme positif; pour toutes les valeurs de x supérieures à a''', la dérivée d'ordre $m-3$ et les trois suivantes sont positives. On substituera ce nombre a''' dans la dérivée d'ordre $m-4$, qui est du quatrième degré, et ainsi de suite en remontant de proche en proche, jusqu'à ce qu'on arrive au polynôme proposé; on obtiendra de la sorte un nombre entier a rendant positifs le polynôme proposé et toutes ses dérivées; c'est une limite supérieure, non-seulement des racines du polynôme proposé, mais encore de celles de toutes ses dérivées; et, d'après la manière dont on l'a trouvé, c'est le plus petit nombre entier satisfaisant à ces conditions.

Les limites trouvées par les premières méthodes satisfont aux mêmes conditions; car, dans toutes ces méthodes, on considère le polynôme proposé $f(x)$ comme la somme de plusieurs polynômes $\varphi(x)$, $\psi(x)$,....., ayant chacun son premier coefficient positif et présentant une variation au plus, et on cherche un nombre a qui rende positifs ces polynômes $\varphi(x)$, $\psi(x)$,..... Quand x croît à partir de a, ces polynômes croissent, et par conséquent leurs dérivées premières $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$,..... sont positives pour $x=a$; mais ces dérivées

premières ont aussi leurs premiers coefficients positifs et ne présentent chacune qu'une variation au plus; par conséquent, elles vont en croissant, quand x croît à partir de a. Les dérivées secondes sont donc positives pour $x=a$, et ainsi de suite.

Appliquons la méthode de Newton à l'équation

$$f(x)=x^5-10x^4-32x^3+7x^2-500x-120=0.$$

Formons les dérivées successives

$$f'(x)=5x^4-40x^3-96x^2+14x-500,$$

$$\frac{f''(x)}{1.2}=10x^3-60x^2-96x+7$$

$$\frac{f'''(x)}{1.2.3}=10x^2-40x-32,$$

$$\frac{f^{\text{IV}}(x)}{1.2.3.4}=5x-10,$$

$$\frac{f^{\text{V}}(x)}{1.2.3.4.5}=1.$$

La racine de la quatrième dérivée est 2; le premier nombre entier égal ou supérieur à 2 qui rend positive la troisième dérivée est 5; le premier nombre entier égal ou supérieur à 5 qui rend positive la seconde dérivée est 8; le premier nombre entier égal ou supérieur à 8 qui rend positive la première dérivée est 10; enfin le premier nombre entier égal ou supérieur à 10 qui rend positif le polynôme proposé est 13; on en conclut que 13 est une limite supérieure des racines de l'équation proposée. Cet exemple montre bien la supériorité de la méthode de Newton; la première méthode donnerait la limite 501; la troisième, si l'on partageait le polynôme en deux groupes

$$x^3(x^2-10x-32)+(7x^2-500x-120)=0,$$

donnerait 72.

229. Il est facile de trouver une limite inférieure des racines positives; car, en posant $x = \frac{1}{y}$, on transforme l'équation en une autre dont les racines sont les inverses de celles de la première. Si a est une limite supérieure des racines positives de la seconde équation, $\frac{1}{a}$ est une limite inférieure de celles de la première.

Soit, par exemple, l'équation $x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0$, qui a ses trois racines réelles, dont deux positives et plus petites que 3. Le nombre 4 étant une limite supérieure des racines positives de la transformée $5y^3 - 17y^2 + 3y + 1 = 0$, $\frac{1}{4}$ est une limite inférieure des racines positives de la proposée, qui sont ainsi compris entre $\frac{1}{4}$ et 3.

CHAPITRE II.

RACINES COMMENSURABLES.

Recherche des racines entières.

230. Soit

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

l'équation proposée, dont nous supposons tous les coefficients commensurables et même entiers; car s'ils n'étaient pas entiers, on les rendrait tels en multipliant tous les termes de l'équation par un nombre convenable. Nous avons expliqué (n° 185) comment on effectue la division par $x - a$ du polynôme $f(x)$, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x; le premier coefficient du quotient est égal au premier coefficient du dividende, et l'on forme chacun des autres

coefficients en multipliant le coefficient précédent par a et ajoutant le coefficient correspondant du dividende. Si tous les coefficients du dividende sont entiers, si, de plus, a est un nombre entier, positif ou négatif, il est clair que le quotient ainsi formé aura aussi tous ses coefficients entiers, puisqu'on les obtient en combinant des nombres entiers par multiplication et par addition.

Imaginons maintenant qu'ayant ordonné le polynôme par rapport aux puissances croissantes de x,

$$f(x) = A_m + A_{m-1}x + A_{m-2}x^2 + \ldots\ldots + A_1 x^{m-1} + A_0 x^m,$$

on le divise par $a - x$; le diviseur étant seulement changé de signe, le quotient changera simplement de signe, et par conséquent aura toujours ses coefficients entiers. Effectuons cette division

$$\begin{array}{r|l}
A_m + A_{m-1}x + A_{m-2}x^2 + A_{m-3}x^3 \ldots + A_0 x^m & a - x \\
\hline
(C_{m-1} + A_{m-1})x + A_{m-2}x^2 + A_{m-3}x^3 \ldots + A_0 x^m & C_{m-1} + C_{m-2}x + C_{m-3}x^2 \ldots + C_1 x^{m-2} + C_0 x^{m-1} \\
(C_{m-2} + A_{m-2})x^2 + A_{m-3}x^3 \ldots + A_0 x^m & \\
(C_{m-3} + A_{m-3})x^3 \ldots + A_0 x^m & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(C_1 + A_1)x^{m-1} + A_0 x^m & \\
(C_0 + A_0)x^m &
\end{array}$$

Le premier coefficient du quotient est $\frac{A_m}{a}$; ce nombre doit être entier; ainsi, une première condition à laquelle doit satisfaire une racine entière, c'est de diviser exactement le dernier terme A_m de l'équation. Pour abréger, représentons par C_{m-1} le premier terme du quotient; multiplions-le par le diviseur $a - x$ et retranchons du dividende; le produit par a détruira le premier terme A_m du dividende, le produit par

$-x$ s'ajoutera au second terme; de sorte que le second dividende aura pour premier terme $(C_{m-1}+A_{m-1})x$, les termes suivants restant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par a, on aura le second terme $\frac{C_{m-1}+A_{m-1}}{a}x$ du quotient; le second coefficient $\frac{C_{m-1}+A_{m-1}}{a}$ doit être entier; appelons-le C_{m-2}. Multiplions le second terme $C_{m-2}x$ du quotient par le diviseur $a-x$ et retranchons du dividende; le produit par a détruit le premier terme du second dividende, le produit par $-x$ s'ajoute au second terme; de sorte que le troisième dividende aura pour premier terme $(C_{m-2}+A_{m-2})x^2$, les termes suivants restant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par a, on aura le troisième terme $\frac{C_{m-2}+A_{m-2}}{a}x^2$ du quotient; le troisième coefficient $\frac{C_{m-2}+A_{m-2}}{a}$, que nous représenterons par C_{m-3}, doit être entier, et ainsi de suite.

La loi est générale : on obtient un coefficient quelconque du quotient en ajoutant au précédent le coefficient du terme qui occupe dans le dividende le même rang que le terme que l'on veut former, et divisant la somme par a.

On arrivera ainsi au dernier dividende

$$(C_1+A_1)x^{m-1}+A_0x^m,$$

qui donnera le dernier terme $\frac{C_1+A_1}{a}x^{m-1}$ du quotient; le dernier coefficient $\frac{C_1+A_1}{a}$, que nous représenterons par C_0,

doit aussi être entier. En multipliant le diviseur par le dernier terme $C_0 x^{m-1}$ du quotient et retranchant du dividende, on obtient le reste de la division $(C_0 + A_0)x^m$. Si a est racine de l'équation, le reste est nul, et l'on a $C_0 + A_0 = o$.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on veut trouver les racines entières d'une équation à coefficients entiers, ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, on n'essayera que les diviseurs du dernier terme, et l'on procédera de la manière suivante :

RÈGLE. *Pour voir si un nombre entier* a *est racine de l'équation, on divisera le dernier terme par ce nombre ; on ajoutera au quotient le coefficient de l'avant-dernier terme, et l'on divisera la somme par* a*; on ajoutera au quotient le coefficient du terme précédent, et l'on divisera la somme par* a, *et ainsi de suite. Toutes ces divisions doivent se faire exactement, et quand on aura ajouté le coefficient du premier terme de l'équation, on devra trouver un résultat égal à zéro.*

Lorsqu'un nombre entier a satisfait à toutes ces conditions, il est évidemment racine de l'équation ; c'est ce qu'indique spécialement la dernière condition, qui exprime que le reste de la division du premier membre de l'équation par $a - x$ ou par $x - a$ est nul. On abaissera alors le degré de l'équation proposée en divisant son premier membre par $x - a$; mais il est à remarquer que le quotient est tout calculé ; les coefficients de ce quotient sont précisément les quotients entiers obtenus dans les opérations précédentes, changés de signes. On continuera les essais, non plus sur l'équation proposée, mais sur l'équation simplifiée.

Exemples.

1° Trouver les racines entières de l'équation

$$x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 6 = 0.$$

On commencera par essayer 1 ; pour que 1 soit racine, il faut que la somme des coefficients positifs égale celle des coefficients négatifs ; c'est ce qui a lieu ici : donc 1 est racine. On divisera le premier membre de l'équation par $x - 1$, d'après la règle du n° 185, et l'on aura à considérer l'équation

$$x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6 = 0.$$

Cette équation n'admet plus la racine 1 ; on essayera -1 : si l'on remplace x par -1, on a un résultat nul

$$-1 + 6 - 6 + 7 - 6 = 0 ;$$

donc -1 est racine. On divisera l'équation par $x + 1$, d'après la même règle, et l'on aura l'équation

$$x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0.$$

Après s'être assuré que cette équation n'admet plus la racine -1, on essayera les diviseurs du dernier terme 6, pris avec le signe + ou le signe —. Essayons d'abord le diviseur le plus simple $+2$, et pour cela procédons d'après la règle formulée plus haut ; parcourant le polynôme de droite à gauche, nous dirons : le dernier terme -6 divisé par 2 donne -3 ; ajoutant le coefficient suivant -1, on a -4 qui, divisé par 2, donne -2 ; ajoutant le coefficient suivant -5, on a -7, qui n'est pas divisible par 2 ; ainsi 2 n'est pas racine.

Essayons maintenant -2, et écrivons les quotients suc-

cessifs de droite à gauche,

$$-1, \quad +3, \quad -1, \quad +3.$$

Le dernier terme -6 divisé par -2 donne $+3$; ajoutant -1, on a $+2$ qui, divisé par -2, donne -1; ajoutant -5, on a -6 qui, divisé par -2, donne $+3$; ajoutant -1, on a $+2$ qui, divisé par -2, donne -1; ajoutant le premier coefficient $+1$, on obtient pour résultat zéro. Ainsi -2 est racine. Les nombres écrits plus haut, changés de signes, sont les coefficients du quotient de la division du premier membre de l'équation par $x+2$; on écrira donc immédiatement l'équation

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0.$$

Le nombre -2 ne peut être une seconde fois racine, puisqu'il ne divise plus le dernier terme. Les seuls nombres à essayer sont maintenant les diviseurs de 3, savoir $+3$ et -3. Si l'on essaye $+3$, on a les quotients

$$-1, \quad 0, \quad -1;$$

donc $+3$ est racine, et, en divisant par $x-3$, on arrive à l'équation du second degré

$$x^2 + 1 = 0,$$

qui a deux racines imaginaires $+i$ et $-i$.

L'équation proposée est complétement résolue : ses six racines sont $+1$, -1, -2, $+3$, $+i$, $-i$.

2° Déterminer les racines entières de l'équation

$$2x^3 - 12x^2 + 13x - 15 = 0.$$

La transformée en $-x$ ne présentant pas de variation, l'équation proposée n'a pas de racine négative. On n'essayera donc que des nombres positifs. Après avoir reconnu que 1

n'est pas racine, on essayera les diviseurs de 15. Voici le tableau des opérations :

$$\begin{array}{rl} 2x^3 - 12x^2 + 13x - 15 = 0 & \\ -5 & +3 \\ -2 \quad +2 - 3 & +5 \end{array}$$

Le nombre 5 est racine. En divisant par $x - 5$, on a l'équation

$$2x^2 - 2x + 3 = 0,$$

qui a ses racines imaginaires.

231. Remarque I. On diminue le nombre des essais en cherchant des limites des racines, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent.

Considérons l'équation

$$x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 58x^2 - 144 = 0.$$

Si l'on partage l'équation en deux groupes

$$x^3(x^2 - 6x - 5) + (58x^2 - 144) = 0,$$

on voit que 7 est une limite supérieure des racines de l'équation. Si l'on change le signe de x, l'équation devient

$$x^5 + 6x^4 - 5x^3 - 58x^2 + 144 = 0;$$

on l'écrira

$$x^2(x^3 + 6x^2 - 5x - 58) + 144 = 0.$$

Le nombre 3, rendant positif le premier groupe, est une limite supérieure des racines positives de cette équation. Ainsi, toutes les racines réelles de l'équation proposée sont comprises entre -3 et $+7$.

D'après cela, si l'on veut chercher les racines entières de l'équation proposée, il suffira d'essayer les diviseurs de 144

qui sont compris entre — 3 et + 7. On trouve d'abord les racines — 2 et + 3, ce qui réduit l'équation à

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 24 = 0.$$

Les nombres +4 et + 6 ne sont pas racines; il est inutile de pousser les essais au delà; il est certain que cette dernière équation n'a plus de racine entière.

232. REMARQUE II. On diminue encore d'une autre manière le nombre des essais. Appelons $f(x)$ le premier membre d'une équation ayant ses coefficients entiers, et a une racine entière; le polynôme $f(x)$ est divisible par $x - a$, et, comme nous l'avons dit (nº 230), le quotient $f_1(x)$ a aussi ses coefficients entiers. Si dans l'égalité

$$\frac{f(x)}{x - a} = f_1(x)$$

on remplace x par un nombre entier quelconque α, on aura

$$\frac{f(\alpha)}{a - \alpha} = -f_1(\alpha);$$

le second membre étant un nombre entier, on en conclut que le nombre entier $f(\alpha)$ est divisible par le nombre entier $a - \alpha$.

Le nombre entier α est arbitraire. Si l'on fait $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$, il en résulte que $f(1)$ est divisible par $a - 1$ et $f(-1)$ par $a + 1$. Les deux résultats $f(1)$ et $f(-1)$ ont été trouvés, lorsqu'on a essayé + 1 et — 1; avant d'appliquer au nombre entier a la règle ordinaire, on examinera si $f(1)$ est divisible par $a - 1$ et $f(-1)$ par $a + 1$, ce qui réduira beaucoup le nombre des essais.

Considérons, par exemple, l'équation

$$x^5 - 4x^4 - 101x^3 + 14x^2 + 504x + 576 = 0,$$

dont les racines réelles sont comprises entre -9 et $+13$. On a $f(1)=990$, $f(-1)=182$. Prenons les diviseurs de 576 compris entre -9 et $+13$. Le nombre $2+1$ ou 3 ne divise pas $f(-1)$; donc 2 n'est pas racine. Le nombre -2 satisfaisant aux conditions énoncées, on essayera ce nombre. Le nombre $3+1$ ou 4 ne divisant pas $f(-1)$, on rejettera $+3$. Le nombre $-3-1$ ou -4 ne divisant pas $f(1)$, on rejettera aussi -3. On rejettera de même $+4, -4, -6, +8, +9$. On n'aura donc à essayer que les quatre diviseurs

$$-2, +6, -8, +12.$$

Voici le tableau des opérations :

x^5	$-4x^4$	$-101x^3$	$+14x^2$	$+504x$	$+576$	
		$+27$	$+47$	-108	-288	-2
			$+19$	$+100$	$+96$	$+6$
	-1	$+12$	$+5$	-54	-72	-8
		x^4	$-12x^3$	$-5x^2+54x$	$+72$	
					-9	-8
		-1	0	$+5$	$+6$	$+12$

$$x^3-5x-6=0.$$

On trouve les deux racines entières -8 et $+12$; l'équation du troisième degré à laquelle on réduit l'équation proposée n'a plus de racines entières.

Recherche des racines commensurables fractionnaires.

233. Nous supposons toujours que l'équation

$$(1)\qquad A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots\ldots+A_{m-1}x+A_m=0$$

a ses coefficients entiers. Une racine commensurable quelconque pourra être mise sous la forme d'une fraction irré-

ductible $\frac{a}{b}$, et l'on aura

$$A_0\frac{a^m}{b^m}+A_1\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}}+\cdots\cdots+A_{m-1}\frac{a}{b}+A_m=0.$$

Si l'on multiplie par b^{m-1}, cette relation devient

$$\frac{A_0a^m}{b}=-(A_1a^{m-1}+A_2ba^{m-2}+\cdots\cdots+A_mb^{m-1});$$

le second membre étant entier, le premier doit l'être aussi; mais b est premier avec a et par suite avec a^m; donc b divise A_0. Ainsi, *toute racine commensurable a pour dénominateur un diviseur du premier coefficient de l'équation.*

En multipliant par b^m et divisant par a, on a de même

$$\frac{A_mb^m}{a}=-(A_0a^{m-1}+A_1ba^{m-2}+\cdots\cdots+A_{m-1}b^{m-1});$$

le second membre étant entier, le premier l'est aussi; mais a est premier avec b^m; donc a divise A_m. Ainsi *le numérateur est un diviseur du dernier coefficient de l'équation.*

234. Il résulte de là qu'*une équation, à coefficients entiers, et dont le premier coefficient est l'unité, n'a pas de racine commensurable fractionnaire.* En effet, le dénominateur d'une racine commensurable, devant diviser le premier coefficient qui est l'unité, est lui-même égal à un, et par conséquent la racine est entière. Ainsi, dans ce cas, toutes les racines commensurables sont entières.

Ceci nous donne un moyen facile de ramener la recherche des racines commensurables fractionnaires à celle des racines entières. On conçoit, en effet, que si l'on multiplie par un nombre entier convenable k les racines de l'équation proposée, on rendra entières toutes les racines commen-

surables fractionnaires. Pour multiplier par k les racines de l'équation proposée, il suffit de poser $x'=kx$, d'où $x=\frac{x'}{k}$; en remplaçant dans l'équation proposée x par $\frac{x'}{k}$, on obtient la nouvelle équation

$$\frac{A_0x'^m}{k^m}+\frac{A_1x'^{m-1}}{k^{m-1}}+\frac{A_2x'^{m-2}}{k^{m-2}}+\ldots\ldots+A_m=0,$$

ou

$$(2)\qquad x'^m+\frac{A_1k}{A_0}x'^{m-1}+\frac{A_2k^2}{A_0}x'^{m-2}+\ldots\ldots+\frac{A_mk^m}{A_0}=0.$$

Déterminons maintenant le nombre entier k de manière que les coefficients de cette dernière équation soient tous entiers; le premier coefficient étant égal à l'unité, toutes les racines commensurables de cette équation seront entières. La question revient donc à la détermination des racines entières de l'équation (2); une fois ces racines trouvées, en les divisant par k on obtiendra les racines commensurables de l'équation (1).

L'opération réussit toujours, quand on fait $k=A_0$; et on comprend pourquoi il en est ainsi; les racines commensurables de l'équation (1), ayant pour dénominateurs des diviseurs de A_0, deviennent toutes entières, quand elles sont multipliées par A_0. Dans chaque exemple, on choisira le plus petit nombre entier qui rend entiers les coefficients de l'équation (2).

Lorsqu'il s'agit de trouver les racines commensurables d'une équation, on commence par chercher les racines entières, et s'il y en a, on divise l'équation par les facteurs binômes correspondants. On détermine ensuite les racines fractionnaires à l'aide des racines entières de l'équation (2);

mais, dans la recherche des racines entières de cette dernière équation, il est inutile de pousser les essais jusqu'au dernier terme; car la plus grande racine commensurable fractionnaire de l'équation proposée étant au plus égale à A_m divisé par le plus petit diviseur de A_0, la plus grande racine entière de l'équation (2) sera au plus égale à k fois celle-ci; on s'arrêtera à cette limite.

Exemples.

1° Trouver les racines commensurables de l'équation

$$(1) \qquad 2x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 12 = 0.$$

On trouve d'abord la racine entière -2; divisant par $x+2$, l'équation se réduit à

$$(2) \qquad 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0.$$

Cette équation n'ayant plus de racine entière, on la transforme en remplaçant x par $\frac{x'}{k}$, ce qui donne

$$x'^3 - \frac{3k}{2}x'^2 - 2k^2x' + 3k^3 = 0;$$

il faut faire ici $k = 2$, et l'équation devient

$$(3) \qquad x'^3 - 3x'^2 - 8x' + 24 = 0.$$

Les racines fractionnaires de l'équation (2) ne pouvant être que $\pm\frac{1}{2}$ et $\pm\frac{3}{2}$, on cherchera les racines entières de l'équation (3) seulement parmi les nombres ± 1 et ± 3; on trouve que $+3$ est racine; ainsi l'équation proposée admet la racine fractionnaire $\frac{3}{2}$. La dernière équation divi-

sée par $x'-3$ conduit à l'équation du second degré

$$x'^2-8=0,$$

qui a deux racines incommensurables $\pm 2\sqrt{2}$, d'où résultent pour l'équation proposée les racines incommensurables $\pm\sqrt{2}$. Ainsi, les quatre racines de l'équation proposée sont $-2, \frac{3}{2}, +\sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

2° L'équation

$$(1) \qquad 4x^4-28x^3+45x^2-6x-18=0$$

n'a pas de racine entière. Si l'on remplace x par $\frac{x'}{k}$, et si l'on multiplie par k^4, elle devient

$$x'^4-7kx'^3+\frac{45k^2}{4}x'^2-\frac{3k^3}{2}x'-\frac{9k^4}{2}=0;$$

pour opérer la transformation, il suffit de prendre $k=2$, ce qui donne

$$(2) \qquad x'^4-14x'^3+45x'^2-12x'-72=0.$$

Les racines fractionnaires de l'équation proposée, devenant entières quand on les multiplie par 2, ne peuvent être que $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}$; on essayera donc $\pm 1, \pm 3, \pm 9$.

L'équation (2) admet la racine -1; la division par $x'+1$ donne l'équation

$$x'^3-15x'^2+60x'-72=0.$$

Cette dernière admet la racine 3; la division par $x'-3$ conduit à l'équation du second degré

$$x'^2-12x'+24=0$$

dont les racines $x' = 6 \pm \sqrt{12}$ sont incommensurables. Ainsi, les quatre racines de l'équation proposée sont $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3 \pm \sqrt{3}$.

235. Deuxième méthode. Il est à remarquer que lorsqu'une équation

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

a ses coefficients entiers et que l'on divise le premier membre par le facteur binôme $x - \frac{a}{b}$, qui correspond à une racine commensurable fractionnaire $\frac{a}{b}$, le quotient a aussi ses coefficients entiers. Supposons en effet que l'on effectue la division en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x, comme nous l'avons expliqué au n° 185. Le premier coefficient du quotient est A_0; on obtient le second en multipliant le premier par $\frac{a}{b}$ et ajoutant A_1, le troisième en multipliant le second par $\frac{a}{b}$ et ajoutant A_2, et ainsi de suite. Si les coefficients du quotient ne sont pas entiers, ils ne pourront contenir à leurs dénominateurs que les facteurs premiers de b.

Supposons maintenant que l'on divise le polynôme par $\frac{a}{b} - x$, en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x (n° 230). On obtient le premier coefficient du quotient en divisant A_m par $\frac{a}{b}$, ce qui revient à multiplier par $\frac{b}{a}$. Si à ce premier coefficient on ajoute A_{m-1} et si l'on multiplie par

$\frac{b}{a}$, on a le second coefficient du quotient, et ainsi de suite. On en conclut que, si les coefficients du quotient ne sont pas entiers, ils ne pourront contenir à leurs dénominateurs que les facteurs premiers de a. Mais nous avons déjà vu que ces mêmes dénominateurs ne peuvent contenir que les facteurs premiers de b; comme a et b sont premiers entre eux, tous les dénominateurs se réduisent à l'unité, et par conséquent les coefficients du quotient sont entiers.

Non-seulement les coefficients du quotient sont entiers, mais encore ils sont tous divisibles par b. Car, si l'on désigne par A_0, B_1, B_2, ... les coefficients du quotient ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, on a

$$B_1 = \frac{A_0 a}{b} + A_1,$$

$$B_2 = \frac{B_1 a}{b} + A_2,$$

$$B_3 = \frac{B_2 a}{b} + A_3:$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Pour que B_1 soit entier, il faut que b divise A_0, ce que l'on sait déjà. Pour que B_2 soit entier, il faut que b divise B_1, et ainsi de suite.

Les deux manières d'effectuer la division peuvent être appliquées pour l'essai direct des racines commensurables fractionnaires. On choisira l'une ou l'autre, suivant les cas.

Exemples.

1° Reprenons l'équation

$$4x^4 - 28x^3 + 45x^2 - 6x - 18 = 0,$$

dont il a déjà été question. Après avoir reconnu que cette

équation n'a pas de racine entière, cherchons les racines fractionnaires. Essayons d'abord $\frac{1}{2}$; si nous calculions le quotient de droite à gauche, comme pour les racines entières, il faudrait diviser successivement par $\frac{1}{2}$, ce qui revient à multiplier par 2; toutes les opérations seraient possibles, et il faudrait aller jusqu'au bout pour voir si le reste est nul. Au contraire, en calculant de gauche à droite, il faut multiplier successivement par $\frac{1}{2}$, ce qui revient à diviser par 2; nous emploierons donc de préférence ce second procédé : 4 multiplié par $\frac{1}{2}$ donne 2, et -28..... -26; -26 multiplié par $\frac{1}{2}$ donne -13 et $+45$..... $+32$; $+32$ multiplié par $\frac{1}{2}$ donne $+16$ et -6..... $+10$; $+10$ multiplié par $\frac{1}{2}$ donne $+5$ et -18......-13. Il arrive ici que l'opération se prolonge jusqu'à la fin; mais le reste -13 n'est pas nul; donc $\frac{1}{2}$ n'est pas racine.

Essayant $-\frac{1}{2}$ de la même manière, toutes les opérations sont possibles, et l'on arrive à un reste nul; donc $-\frac{1}{2}$ est racine, et l'on a le quotient

$$4x^3-30x^2+60x-36=0,$$

ou, en divisant tous les termes par 2,

$$2x^3-15x^2+30x-18=0.$$

Après avoir essayé encore une fois $-\frac{1}{2}$, on essayera $\frac{3}{2}$.

mais en allant de droite à gauche : -18 divisé par $\frac{3}{2}$ donne -12 ; ajoutant $+30$ on a $+18$ qui, divisé par $\frac{3}{2}$, donne $+12$; ajoutant -15 on a -3 qui, divisé par $\frac{3}{2}$, donne -2 ; ajoutant le premier coefficient $+2$, on obtient un résultat égal à zéro. Donc $\frac{3}{2}$ est racine, et le quotient de la division par $x-\frac{3}{2}$ est

$$2x^2-12x+12=0,$$

ou

$$x^2-6x+6=0.$$

Cette équation du second degré a ses deux racines incommensurables.

2° Trouver les racines commensurables de l'équation

$$15x^4+16x^3-46x^2-5x+6=0.$$

Après avoir reconnu que cette équation n'a pas de racine entière, on essayera la fraction $\frac{1}{3}$ en allant de gauche à droite, et l'on verra que cette fraction est racine. Dans l'équation simplifiée, on essayera les fractions $\pm\frac{1}{5}$, $\pm\frac{2}{5}$, et l'on verra que $-\frac{2}{5}$ est racine. L'équation à laquelle on arrive, ayant son premier coefficient égal à l'unité, n'a plus de racine commensurable. Voici le tableau des calculs :

$15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0$	
$15, \ +21, \ -39, \ -18, \ 0$	$\frac{1}{3}$
$5x^3 + 7x^2 - 13x - 6 = 0$	
$5, \ +8$	$\frac{1}{5}$
$5, \ +6$	$-\frac{1}{5}$
$5, \ +9$	$\frac{2}{5}$
$5, \ +5, \ -15, \ 0$	$-\frac{2}{5}$
$x^2 + x - 3 = 0.$	

236. Remarque I. Nous avons expliqué (n° 205) par quelle suite d'opérations, étant donné un polynôme X, on peut trouver des polynômes X_1, X_2, X_3, ... formés, le premier des facteurs simples du polynôme proposé, le second des facteurs doubles, le troisième des facteurs triples, etc. Ces opérations consistant en divisions, il est clair que si le polynôme proposé X a ses coefficients commensurables, les polynômes X_1, X_2,...... qu'on en déduit, auront aussi leurs coefficients commensurables. Supposons que le polynôme X n'ait qu'une racine a d'un même degré n de multiplicité; le polynôme X_n sera du premier degré, et par conséquent la racine a fournie par l'équation du premier degré $X_n = 0$, à coefficients commensurables, sera commensurable. Ainsi, *quand une équation, à coefficients commensurables, a une seule racine d'un même degré de multiplicité, cette racine est commensurable.*

237. Remarque II. Lorsqu'une équation du troisième degré admet des racines égales, elle a, ou une racine double

et une simple, ou une racine triple; dans les deux cas, d'après ce qui a été dit précédemment, les racines sont commensurables.

Lorsqu'une équation du quatrième degré admet des racines égales, elle a, ou une racine double et deux racines simples, ou deux racines doubles, ou une racine triple et une racine simple, ou une racine quadruple. Dans le premier cas, la racine double est commensurable; dans le troisième cas, la racine triple et la racine simple le sont également, et de même dans le quatrième cas la racine quadruple. Mais, dans le second cas, les deux racines doubles, étant données par une équation du second degré, sont en général incommensurables.

Lorsqu'une équation du cinquième degré admet des racines égales, elle a, ou une racine double et trois simples, ou deux racines doubles et une simple, ou une racine d'un degré égal ou supérieur à trois; dans tous ces cas, l'une au moins des racines est commensurable.

Ainsi, *quand une équation, à coefficients commensurables, et d'un degré égal ou inférieur à cinq, a des racines égales, cette équation a au moins une racine commensurable, excepté quand le polynôme est du quatrième degré et carré parfait.*

Tant que le degré de l'équation ne surpasse pas cinq, on peut donc se dispenser d'appliquer à l'équation la méthode des racines égales, qui exige en général de longs calculs; après avoir reconnu que le polynôme n'est pas carré parfait, on appliquera à l'équation la méthode des racines commensurables. Mais quand l'équation est d'un degré plus élevé, elle peut avoir des racines égales sans avoir des racines commensurables.

CHAPITRE III.

CALCUL DES RACINES INCOMMENSURABLES.

238. Proposons-nous maintenant de calculer les racines réelles incommensurables d'une équation algébrique, à coefficients réels, commensurables ou incommensurables. Nous supposerons que l'équation a été préalablement débarrassée de ses racines égales. On commencera par déterminer une limite supérieure des racines positives et une limite inférieure des racines négatives (n° 225), puis on effectuera la séparation des racines, c'est-à-dire que l'on divisera l'intervalle compris entre ces deux limites en parties comprenant chacune au plus une racine.

Une méthode générale pour arriver à ce résultat est celle indiquée par Lagrange; elle consiste à former l'équation qui admet pour racines les différences des racines de l'équation proposée deux à deux, à chercher une limite inférieure δ des racines positives de cette équation (n° 229), puis à substituer dans le premier membre de l'équation proposée, entre les deux limites assignées, des nombres en progression arithmétique ayant pour raison δ; chaque intervalle partiel ne comprend aucune racine ou en comprend une seule, suivant que

les deux résultats sont de même signe ou de signes contraires.

Le théorème de Sturm fournit aussi une méthode générale pour la séparation des racines. Après avoir formé la suite des polynômes

$$X, X_1, X_2, \ldots\ldots, X_r,$$

on substitue des nombres équidistants, par exemple les nombres entiers successifs, entre les deux limites.

Les intervalles dans lesquels il y a des variations perdues sont les seuls qui comprennent des racines réelles, et le nombre des racines réelles est égal au nombre des variations perdues. Si l'un de ces intervalles comprenait plusieurs racines, on le subdiviserait en parties égales, et l'on continuerait de cette manière jusqu'à ce que la séparation fût complétement effectuée.

Mais ces méthodes, très-simples en théorie, exigent de longs calculs. Dans la pratique, on parvient ordinairement à effectuer la séparation des racines en substituant directement des nombres équidistants dans le polynôme proposé et s'aidant de la considération de la dérivée. Quelques exemples feront bien comprendre la manière de procéder.

239. Exemple I. Soit l'équation du troisième degré

$$x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0.$$

La règle de Descartes montre que cette équation a une racine réelle négative, et zéro ou deux racines positives. Par le

groupement des termes, on voit que $+3$ est une limite supérieure des racines positives et -6 une limite inférieure des racines négatives; les racines réelles sont donc comprises entre -6 et $+3$. En substituant les nombres entiers entre ces limites, on obtient les résultats suivants :

$$
\begin{array}{llllllllll}
x=-6, & -5, & -4, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3 \\
-1, & +40, & +57, & +56, & +43, & +24 & +5, & -8, & -9, & +8.
\end{array}
$$

Le polynôme ayant des valeurs de signes contraires pour $x=0$ et $x=1$, on en conclut qu'une première racine réelle positive est comprise entre 0 et 1; la seconde racine positive est comprise entre 2 et 3; la racine négative entre -6 et -5. L'équation proposée a ses trois racines réelles, et ces racines sont séparées.

On a ainsi les racines à moins d'une unité près. Pour avoir l'une d'elles à un dixième près, on substituera des nombres équidistants d'un dixième dans l'intervalle qui la comprend. Mais, ordinairement, on diminue beaucoup le nombre des substitutions à l'aide des considérations suivantes : cherchons, par exemple, la racine comprise entre 2 et 3. Quand x varie de 2 à 3, la dérivée $3x^2+6x-17$ étant positive, la fonction croît; on peut admettre que la variation de la fonction est approximativement proportionnelle à celle de la variable; or, quand x croît d'une unité à partir de 2, la fonction éprouve un accroissement égal à $9+8$ ou 17; pour que la fonction éprouve un accroissement égal à 9, et par conséquent se réduise à zéro, il faut donner à x un accroissement à peu près égal à $\frac{9}{17}$, ou à 0,5; il est probable d'après cela que la racine diffère peu de 2,5. La substitution de $x=2,5$ dans le polynôme proposé donne un

résultat négatif $-3,125$; donc la racine est plus grande que $2,5$. La substitution de $x=2,6$ donne encore un résultat négatif $-1,344$; donc la racine est plus grande que $2,6$. Mais la substitution de $x=2,7$ donne un résultat positif $+0,653$; donc la racine est comprise entre $2,6$ et $2,7$.

Cherchons de même la racine comprise entre 0 et 1. Quand x varie de 0 à 1, la dérivée étant négative, la fonction décroît; admettons encore que la variation de la fonction est approximativement proportionnelle à celle de la variable; or, quand x croît d'une unité à partir de 0, la fonction éprouve une diminution égale à $5+8$ ou 13; pour que la fonction éprouve une diminution égale à 5, et par conséquent se réduise à zéro, il faut donner à x un accroissement à peu près égal à $\frac{5}{13}$ ou à $0,4$. Il est probable, d'après cela, que la racine diffère peu de $0,4$. La substitution de $x=0,4$ donnant un résultat négatif $-1,256$, la racine est plus petite que $0,4$. La substitution de $x=0,3$ donnant un restant positif $+0,197$, la racine est comprise entre $0,3$ et $0,4$.

240. Exemple II. Dans l'exemple précédent, les racines ont été séparées par la substitution des nombres entiers; mais il n'en est pas toujours ainsi. Dans ce cas, on examine dans quel intervalle sont situées les racines qui n'ont pas été séparées, et l'on partage cet intervalle en dix parties égales.

Soit l'équation

$$x^3-7x+7=0,$$

dont les racines sont comprises entre -4 et $+3$. La substitution des nombres entiers donne les résultats suivants :

$x=-4,$	$-3,$	$-2,$	$-1,$	$0,$	$1,$	$2,$	3
$-29,$	$+1,$	$+13,$	$+13,$	$+7,$	$+1,$	$+1,$	$+13.$

Il y a une racine négative entre -4 et -3; d'ailleurs, l'équation transformée en $-x$ n'ayant qu'une variation, l'équation proposée n'admet pas d'autre racine négative. La condition de réalité des racines (n° 214) étant ici satisfaite, il en resulte que l'équation a deux racines positives, mais ces deux racines sont comprises dans le même intervalle; il s'agit de voir dans lequel. Considérons pour cela l'équation

$$3x^2 - 7 = 0$$

que l'on obtient en égalant à zéro la dérivée du premier membre de l'équation proposée; nous savons (n° 210) qu'entre les deux racines positives de l'équation proposée, il y a une racine de la dérivée; cette racine est la racine positive $\sqrt{\frac{7}{3}}$; supérieure à 1, mais inférieure à 2. L'intervalle qui comprend les deux racines cherchées, devant comprendre aussi la quantité $\sqrt{\frac{7}{3}}$, est celui de 1 à 2. Afin de séparer les racines, nous subdiviserons cet intervalle. Pour $x = 1,5$ on trouve un résultat négatif $-0,125$; donc l'une des racines positives est comprise entre 1 et 1,5, l'autre entre 1,5 et 2.

Voilà les racines séparées. L'interpolation par parties proportionnelles montre que l'une des racines est à peu près égale à 1,3, l'autre à 1,7. La substitution de $x = 1,3$ donnant un résultat positif $+0,097$, et celle de $x = 1,4$ un résultat négatif $-0,056$, la première racine est comprise entre 1,3 et 1,4. La substitution de $x = 1,7$ donnant un résultat positif $+0,013$, et celle de $x = 1,6$ un résultat négatif $-0,104$, la seconde racine est comprise entre 1,6 et 1,7.

241. EXEMPLE III. L'équation

$$x^3-2x^2+5x-7=0$$

n'a pas de racine négative; 2 est une limite supérieure des racines positives. La substitution des nombres entiers ne donne qu'un changement de signe, de 1 à 2. La dérivée $3x^2-4x+5$ ayant ses racines imaginaires, l'équation proposée n'a qu'une racine réelle, et cette racine est comprise entre 1 et 2.

242. EXEMPLE IV. L'équation

$$x^3-4x^2+5x-7=0$$

n'a pas de racine négative; 4 est une limite supérieure. La substitution des nombres entiers ne donne qu'un changement de signe, de 3 à 4. La dérivée $3x^2-8x+5$ a ses racines réelles 1 et $\frac{5}{3}$. Si l'équation proposée avait ses trois racines réelles, la plus petite racine 1 de la dérivée devrait donner un résultat positif, la plus grande $\frac{5}{3}$ un résultat négatif (n° 212); la valeur du polynôme pour $x=1$ étant négative, on en conclut que l'équation proposée n'a qu'une racine réelle, et cette racine est comprise entre 3 et 4.

243. EXEMPLE V. L'équation

$$8x^3-12x^2+3x-1=0$$

n'a pas de racine négative; 2 est une limite supérieure. La substitution des nombres entiers ne donne qu'un changement de signe, de 1 à 2. L'équation $f'(x)=0$ ayant ses deux racines, $x'=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$, $x''=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$, réelles et comprises

entre 0 et 1, si l'équation proposée avait ses trois racines réelles, deux racines seraient comprises entre 0 et 1. Mais on peut écrire le polynôme sous la forme

$$-8x^2(1-x)-(4x^2-3x+1).$$

Le polynôme du second degré $4x^2-3x+1$ ayant ses racines imaginaires, est toujours positif; on voit par là que, quand x varie de 0 à 1, le polynôme proposé reste constamment négatif. Ce polynôme n'admet donc qu'une racine réelle, et cette racine est comprise entre 1 et 2.

244. Exemple VI. Considérons encore l'équation

$$x^3+11x^2-102x+181=0,$$

dont les racines réelles sont comprises entre les limites -18 et $+6$.

L'équation transformée en $-x$ n'ayant qu'une variation, l'équation proposée a une racine négative et une seule, et cette racine est comprise entre -17 et -18. Les deux autres racines seront réelles et positives, ou imaginaires. Les nombres entiers positifs donnant tous des résultats positifs, les deux racines positives, si elles existent, seront comprises dans le même intervalle. Pour reconnaître cet intervalle, on examinera les racines de la dérivée

$$3x^2+22x-102,$$

qui sont réelles, l'une positive, l'autre négative. On en conclut que, si l'équation proposée admet des racines positives, comme elles doivent comprendre la racine positive $\frac{-11+\sqrt{427}}{3}=3,22\ldots\ldots$ de la dérivée, elles seront elles-mêmes comprises entre 3 et 4. Les substitutions de $x=3,2$ et de $x=3,3$ donnent des résultats positifs $+0,008$

et $+0,127$; donc les deux racines, si elles existent, seront toutes deux comprises entre 3,2 et 3,3 ; il faut subdiviser cet intervalle. La substitution de $x=3,22$ donnant un résultat négatif $-0,001352$, il y a deux racines positives; les substitutions de $x=3,21$ et $x=3,23$ donnant des résultats positifs $+0,001261$ et $+0,000167$, l'une des racines est comprise entre 3,21 et 3,22, l'autre entre 3,22 et 3,23. Dans cet exemple, la difficulté de séparer les racines provient de ce qu'elles sont très-voisines l'une de l'autre.

245. Exemple VII. Soit l'équation du quatrième degré

$$x^4-5x^3-7x^2+15x+3=0.$$

D'après le théorème de Descartes, cette équation admet 0 ou 2 racines positives, 0 ou 2 racines négatives. Les racines sont comprises entre -3 et $+7$. La substitution des nombres entiers donne les résultats

$$\begin{array}{cccccccccc} x= & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ & +1, & -13, & +3, & +7, & -19, & -69, & -113, & -97, & +57. \end{array}$$

Il y a quatre changements de signe et par conséquent quatre racines réelles, comprises, la première entre -2 et -1, la seconde entre -1 et 0, la troisième entre 1 et 2, la quatrième entre 5 et 6.

Calculons à un dixième près la racine comprise entre 1 et 2. L'interpolation par parties proportionnelles entre 1 et 2 indique l'accroissement $\frac{7}{26}$ ou 0,3. La substitution de $x=1,3$ donnant un résultat positif $+2,5411$, la racine est plus grande que 1,3; la substitution de $x=1,4$ donnant encore un résultat positif $+0,4016$, la racine est plus grande que 1,4; la substitution de $x=1,5$ donne un ré-

sultat négatif $-2,0625$; donc la racine est comprise entre 1,4 et 1,5.

Calculons de même la racine comprise entre 5 et 6. L'interpolation par parties proportionnelles indique un accroissement $\frac{97}{154}$ ou 0,6. La substitution de $x=5,6$ donnant un résultat négatif, la racine est plus grande que 5,6 ; la substitution de $x=5,7$ donnant encore un résultat négatif $-9,2949$, la racine est plus grande que 5,7 ; la substitution de $x=5,8$ donne un résultat positif $+10,6096$; donc la racine est comprise entre 5,7 et 5,8.

246. Exemple VIII. Soit l'équation

$$x^4-4x^3+x+4=0,$$

qui, d'après le théorème de Descartes, ne peut avoir plus de deux racines positives et de deux racines négatives. Les racines sont comprises entre -1 et $+4$. La substitution des nombres entiers donne les résultats

$$\begin{array}{llllll} x=-1, & 0, & 1, & 2, & 3, & \\ +8, & +4, & +2, & -10, & -20, & +8. \end{array}$$

On voit qu'il y a deux racines positives, comprises, l'une entre 1 et 2, l'autre entre 3 et 4. S'il y avait deux racines négatives, elles seraient toutes deux comprises entre 0 et -1 ; or, dans cet intervalle, les deux premiers termes étant positifs, ainsi que la partie $x+4$, le polynôme reste constamment positif; l'équation n'admet donc pas de racines négatives.

247. Exemple IX. Considérons l'équation du cinquième degré

$$x^5-3x^3+x^2-8x-10=0$$

qui admet 1 ou 3 racines positives, 0 ou 2 racines négatives. En groupant les termes de cette façon

$$(x^5-3x^3-8x-10)+x^2=0,$$

on trouve que 3 est une limite supérieure des racines positives. Le nombre -3 est une limite inférieure des racines négatives. La substitution des nombres entiers donne les résultats

$$\begin{array}{cccccccc} x= & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3 \\ & -148, & +2, & +1, & -10, & -19, & -14, & +137. \end{array}$$

Il y a deux racines négatives, comprises, l'une entre -3 et -2, l'autre entre -1 et 0. Il y a une racine positive entre 2 et 3. Si l'on met l'équation sous la forme

$$-x^3(4-x^2)-x(8-x^2)-(10-x^2)=0,$$

on voit que le premier membre reste constamment négatif, quand x varie de 0 à 2. Il reste donc à examiner si l'équation peut avoir trois racines entre 2 et 3. Si l'on écrit la dérivée

$$5x^4-9x^2+2x-8$$

sous la forme

$$(5x^4-9x^2-4)+(2x-4),$$

on reconnait que 2 est une limite supérieure des racines de la dérivée. Ainsi l'équation proposée n'admet qu'une racine positive. Nous avons déjà traité cet exemple par le théorème de Sturm (n° 222).

248. EXEMPLE X. Considérons enfin l'équation

$$8x^4-40x^3+57x^2-40x+49=0,$$

qui n'admet pas de racine négative. Le groupement des

termes fournit la limite supérieure + 5. La substitution des nombres entiers donne les résultats

$$
\begin{array}{llllll}
x = 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\
49, & 34, & 5, & 10, & 289, & +.
\end{array}
$$

Il n'y a pas de changement de signe. Il faut recourir à la dérivée

$$32x^3 - 120x^2 + 114x - 40 = 0.$$

En substituant des nombres entiers de 0 à la limite supérieure 4, on n'obtient qu'un changement de signe de 2 à 3. La seconde dérivée

$$6(16x^2 - 40x + 19)$$

a ses deux racines réelles $x = \frac{5 \pm \sqrt{6}}{4}$. Si la première dérivée avait ses trois racines réelles, la plus petite racine de la seconde dérivée devrait donner un résultat positif; cette racine est plus petite que $\frac{3}{4}$; comme on peut mettre la première dérivée sous la forme

$$-32x^2\left(\frac{3}{4} - x\right) - (96x^2 - 114x + 40),$$

et que le trinôme du second degré $96x^2 - 114x + 40$ a ses racines imaginaires, on voit que de 0 à $\frac{3}{4}$, cette dérivée est négative; elle n'a donc qu'une racine réelle. On en conclut que l'équation proposée ne peut avoir plus de deux racines réelles (n° 211); si elles existent, elles seront comprises entre 2 et 3. La substitution de $x = 2,5$ donne un résultat négatif $-7,2500$; donc l'équation proposée admet deux ra-

cines réelles et comprises, l'une entre 2 et 2,5, l'autre entre 2,5 et 3.

L'interpolation par parties proportionnelles entre 2 et 2,5 indique l'accroissement 0,2. La substitution de $x = 2,2$ donnant un résultat négatif — 1,6352, la première racine est plus petite que 2,2. La substitution de $x = 2,1$ donnant un résultat positif + 1,5148, cette racine est comprise entre 2,1 et 2,2.

L'interpolation entre 2,5 et 3 indique l'accroissement 0,2. La substitution de $x = 2,7$ donnant un résultat négatif — 5,6372, la seconde racine est plus grande que 2,7. La substitution de $x = 2,8$ donnant encore un résultat négatif — 2,4752, cette racine est plus grande que 2,8. La substitution de $x = 2,9$ donnant un résultat positif + 2,6348, la racine est comprise entre 2,8 et 2,9.

Dans les exemples précédents, nous sommes parvenus à séparer les racines par des substitutions convenablement dirigées, et en nous aidant de la considération de la dérivée. Pour que cette méthode réussisse, il faut évidemment que l'équation n'ait pas de racines égales. Lorsque après plusieurs essais infructueux on n'a pas réussi à séparer les racines, on est amené à voir si l'équation n'a pas de racines égales; il faut pour cela chercher le plus grand commun diviseur entre le polynôme et sa dérivée; il convient dans ce cas de disposer les calculs de manière à appliquer le théorème de Sturm, et l'on est ramené ainsi à la seconde méthode générale que nous avons exposée au commencement de ce chapitre.

CHAPITRE IV.

MÉTHODES D'APPROXIMATION.

Méthode de Newton.

249. Quand on a séparé les racines d'une équation $f(x)=0$, et obtenu l'une d'elles avec un certain degré d'approximation, par exemple à un dixième ou un centième près, il est très-facile de la calculer avec une approximation de plus en plus grande. Nous parlerons d'abord de la méthode connue sous le nom de méthode de Newton.

Supposons qu'une racine et une seule soit comprise entre a et b; représentons cette racine par $a+h$, la quantité h étant moindre que la différence $b-a$ en valeur absolue. Si l'on développe $f(a+h)$ d'après la formule de Taylor (n° 152), en s'arrêtant à la seconde dérivée, on a

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a+\theta h),$$

θ étant un nombre positif inférieur à l'unité, et l'équation proposée devient

$$f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a+\theta h)=0;$$

on en déduit

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{h^2f''(a+\theta h)}{2f'(a)}. \tag{1}$$

Le second membre de cette égalité est composé de deux termes, que nous désignerons par α et β; le premier α est connu; le second β ne l'est pas, puisqu'il renferme l'incon-

nue h; mais à cause du facteur h^2, sa valeur absolue est en général très-petite par rapport à celle de h; si donc on néglige ce second terme, on aura une valeur approchée

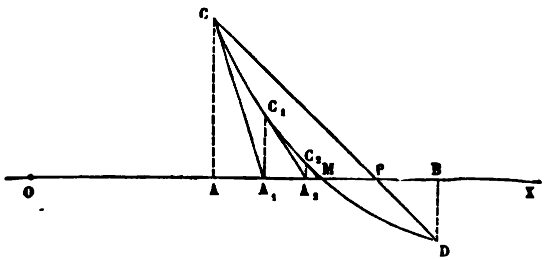
$$(2) \qquad \alpha = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

de l'inconnue h. L'erreur commise est

$$(3) \qquad \beta = -\frac{h^2 f''(a+\theta h)}{2f'(a)};$$

on obtiendra une limite supérieure de la valeur absolue de l'erreur β, en remplaçant dans cette expression h^2 par $(b-a)^2$ et $f''(a+\theta h)$ par une quantité plus grande que la valeur absolue de la seconde dérivée $f''(x)$, quand x varie de a à b.

250. La méthode de Newton a une signification géométrique très-simple; traçons la courbe CD qui représente la marche de la fonction $y=f(x)$, quand x varie de a à b; les ordonnées $f(a)$, $f(b)$, qui se rapportent aux valeurs a et b de la variable x, étant de signes contraires, la courbe coupe l'axe OX en un point M, et la racine cherchée est figurée par la



longueur OM. La méthode d'approximation précédente revient à mener la tangente CA_1 à la courbe au point C, et à prendre la longueur OA_1 pour valeur approchée de la ra-

cine OM. On sait, en effet, que la tangente à la courbe au point C a pour équation

$$y-f(a)=f'(a)(x-a);$$

si l'on y fait $y=0$ pour avoir le point A_1, on a

$$x-a=-\frac{f(a)}{f'(a)}=\alpha,$$

ce qui donne la valeur approchée $x=a+\alpha$.

251. Cette seconde valeur $a+\alpha$ n'est pas toujours plus approchée de la racine que la première a; car il peut arriver que le point A_1, où la tangente à la courbe au point C rencontre l'axe OX, soit plus éloigné du point M que le point A, et même soit situé en dehors de l'intervalle AB qui comprend le point M.

Lorsque la seconde dérivée $f''(x)$ conserve le même signe, quand x varie de a à b, on peut diriger le calcul de manière à ce qu'on approche de plus en plus de la racine, avec certitude. En effet, la nouvelle valeur $a+\alpha$ sera plus approchée de la vraie valeur $a+\alpha+\beta$ de la racine que la première valeur a, si les trois quantités

$$a, \quad a+\alpha, \quad a+\alpha+\beta$$

sont consécutives, ce qui exige que les deux quantités α et β aient le même signe, et par conséquent que leur produit

$$\alpha\beta=\frac{h^2 f(a)f''(a+\theta h)}{2[f'(a)]^2}$$

soit positif. Les deux quantités $f(a)$, $f(b)$ étant de signes contraires, on partira, pour effectuer la correction, de celle des valeurs a et b où $f(x)$ a le signe de $f''(x)$.

Pour fixer les idées, soit $a<b$. Supposons d'abord que $f(a)$

ait le signe de $f''(x)$; nous partirons de la valeur a plus petite que la racine ; les deux quantités α et β, étant de même signe, et leur somme $\alpha+\beta=h$ étant positive, sont positives ; la nouvelle valeur $a_1=a+\alpha$ est plus grande que a, mais plus petite que la racine $a_1+\beta$; elle est donc plus approchée de la racine que a.

La quantité $f(a_1)$ ayant le même signe que $f(a)$ et par suite que $f''(x)$, on peut, en partant de a_1, effectuer une nouvelle correction analogue à la précédente ; la formule

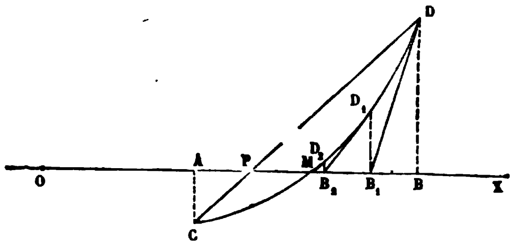
$$\alpha_1=-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)},$$

donne une troisième valeur $a_2=a_1+\alpha_1$, plus grande que a_1, mais plus petite que la racine, et par conséquent plus approchée que a_1 ; et ainsi de suite. On obtient de la sorte une suite de grandeurs croissantes $a, a_1, a_2, \ldots$, inférieures à la racine, et tendant par conséquent vers une limite déterminée. Cette limite est la racine elle-même ; car, puisque la différence $a_{n+1}-a_n=\alpha_n=-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment, et que le dénominateur $f'(a_n)$ conserve une valeur finie, il est nécessaire que le numérateur $f(a_n)$ tende vers zéro. Cette méthode revient à mener des tangentes à la courbe aux points $C, C_1, C_2, \ldots$, qui ont pour abscisses $a, a_1, a_2, \ldots$; les points $A_1, A_2, \ldots$, où les tangentes coupent l'axe OX, se rapprochent très rapidement du point M.

252. Supposons maintenant que ce soit $f(b)$ qui ait le signe de $f''(x)$; nous partirons de la valeur b plus grande que la racine, et nous représenterons cette racine par $b+h$, h étant

une quantité négative ; il suffit de remplacer a par b dans les formules précédentes. Les deux quantités α et β étant de même signe, et leur somme $\alpha+\beta=$ étant négative, sont négatives ; la nouvelle valeur $b_1=b+\alpha$ est plus petite que b, mais plus grande que la racine $b_1+\beta$; elle est donc plus approchée de la racine que b.

La quantité $f(b_1)$ ayant le même signe que $f(b)$ et par suite que $f''(x)$, on peut, en partant de b_1, effectuer une nouvelle correction; la formule donne une troisième valeur $b_2=b_1+\alpha_1$, plus petite que b_1, mais plus grande que la racine, et par conséquent plus approchée que b_1, etc. On obtient ainsi une suite de grandeurs



décroissantes b, b_1, b_2,...., qui tendent vers une limite égale à la racine. Ceci revient à mener les tangentes aux points D, D_1, D_2,....., qui ont pour abscisses b, b_1, b_2,.....

Exemples.

253. Considérons l'équation

$$x^3+3x^2-17x+5=0,$$

dont la plus petite racine positive est comprise entre 0,3 et 0,4 (n° 239). La seconde dérivée est positive dans cet intervalle; la fonction étant positive pour $x=0,3$, on partira

de cette valeûr; la méthode de Newton donnera la correction approchée par défaut

$$\alpha = -\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{0,197}{14,93} = 0,0131 9 \ldots\ldots$$

Évaluons maintenant l'erreur commise, à l'aide de la formule (3); $f''(x)$ a une valeur positive qui croît avec x, puisque $f'''(x)$ est positive; la valeur de $f''(a+\theta h)$ est donc plus petite que $f''(0,4)$, et l'on a

$$\beta < \frac{h^2 \times 8,4}{2 \times 14,93} < h^2 \times 0,3.$$

La quantité h étant plus petite que 0,1, on voit de suite que β est moindre que 0,003; il en résulte que h est plus petite que $0,014 + 0,003$ et par conséquent plus petite que 0,017. En mettant cette valeur dans l'expression de l'erreur, on a

$$\beta < 0,017^2 \times 0,3 < 0,0001.$$

La valeur de h est donc comprise entre 0,0131 et 0,0133; on prendra $h = 0,0132$ et l'on aura la racine $x = 0,3132$ à moins d'un dix-millième près.

La plus grande racine positive est comprise entre 2,6 et 2,7. La seconde dérivée est encore positive dans cet intervalle; la fonction est positive pour $x = 2,7$; on partira de cette valeur; la formule de Newton donne la correction

$$\alpha = -\frac{f(b)}{f'(b)} = -\frac{0,653}{21,07} = -0,03099 \ldots\ldots,$$

$$-\beta < \frac{h^2 \times 22,2}{2 \times 21,07} < h^2 \times 0,6.$$

La valeur absolue de h étant moindre que 0,1, on voit de suite que la valeur absolue de l'erreur β est moindre que

0,006 ; on en conclut que la valeur absolue de h est inférieure à 0,04 ; en mettant cette valeur dans l'expression de l'erreur, on a

$$-\beta < 0,04^2 \times 0,6 < 0,001$$

La valeur absolue de h est donc comprise entre 0,030 et 0,032 ; on prendra $h = -0,031$, et l'on aura la racine $x = 2,669$ à moins d'un millième près.

254. Nous avons vu (n° 245) que l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3 = 0$$

a sa plus grande racine comprise entre 5,7 et 5,8. La seconde dérivée est positive dans cet intervalle ; la fonction est positive pour $x = 5,8$; on prendra

$$\alpha = -\frac{f(b)}{f'(b)} = -\frac{10,6096}{209,648} = -0,0506 \ldots.$$

La dérivée troisième étant positive, $f''(x)$ va en croissant avec x ; on a donc $f''(b+\theta h) < f''(b)$, et par suite

$$-\beta < \frac{h^2 f''(b)}{2 \times 209,648} = \frac{h^2 \times 215,68}{2 \times 209,648} < h^2 \times 0,52.$$

Puisque la valeur absolue de h est moindre que 0,1, l'erreur $-\beta$ est moindre que 0,006 ; on en conclut que la valeur absolue de h est inférieure à 0,06 ; en mettant cette valeur dans l'expression de l'erreur, on a

$$-\beta < 0,06^2 \times 0,52 < 0,002.$$

La valeur absolue de h est comprise entre 0,050 et 0,053 ; on prendra $h = 0,052$, et on aura $x = 5,748$ à moins de deux millièmes près.

Interpolation par parties proportionnelles.

255. Nous avons déjà fait usage de cette méthode pour

abréger le calcul des substitutions. Elle consiste à supposer que, dans un intervalle assez petit, la variation de la fonction est sensiblement proportionnelle à celle de la variable. Quand x varie de a à b, la fonction éprouve une variation égale à $f(b)-f(a)$; à une variation $b-a$ de la variable correspond donc une variation $f(b)-f(a)$ de la fonction ; cherchons quelle variation α' il faut donner à la variable pour que la fonction éprouve une variation égale à $-f(a)$, et par conséquent devienne nulle ; on a la proportion

$$\frac{\alpha'}{b-a}=\frac{-f(a)}{f(b)-f(a)},$$

d'où

$$\alpha'=\frac{-(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

La valeur approchée de la racine sera $a+\alpha'$; mais nous ne savons pas évaluer l'erreur ; il faudra donc faire de nouvelles substitutions. Par exemple, si l'on a calculé d'abord la racine à un dixième près, la différence $b-a$ étant égale à un dixième, on prendra α' à un centième et on substituera dans la fonction des nombres équidistants de un centième, en montant ou en descendant, jusqu'à ce qu'on obtienne deux résultats de signes contraires. Quand on aura ainsi trouvé la racine avec deux chiffres décimaux exacts, on effectuera une nouvelle interpolation ; la différence $b-a$ étant égale maintenant à un centième, on calculera α' à un dix-millième ; puis on fera de nouvelles substitutions pour avoir la racine avec quatre chiffres décimaux exacts, et ainsi de suite. En général, on double à chaque opération le nombre des chiffres décimaux.

Ce mode d'interpolation revient à remplacer l'arc de courbe

CMD par la ligne droite CD. En effet, la droite CD a pour équation

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Si l'on y fait $y = 0$, pour avoir le point P où cette droite coupe l'axe OX, on en déduit

$$x - a = \frac{-(b-a)f(a)}{f(b) - f(a)} = \alpha',$$

ce qui donne la valeur approchée $x = a + \alpha'$.

Lorsque la seconde dérivée conserve le même signe, quand x varie de a à b, l'arc de courbe CMD est convexe, et le point M, où la courbe coupe l'axe OX, est situé entre le point P et le point A_1 ou B_1 où la tangente menée au point C ou D, pour l'application de la méthode de Newton, coupe ce même axe; la racine est donc comprise entre $a + \alpha$ ou $b + \alpha$ et $a + \alpha'$. L'emploi simultané des deux méthodes dispense ainsi de l'évaluation de l'erreur, et l'on sait, d'une manière précise, sur quelle approximation on peut compter.

Reprenons, par exemple, l'équation (n° 254)

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3 = 0,$$

qui a une racine comprise entre 5,7 et 5,8. La méthode de Newton donne un résultat trop fort, et l'on a

$$x < 5,8 - 0,0506 = 5,7494.$$

L'interpolation donne au contraire un résultat trop faible,

$$\alpha' = \frac{0,1 \times 9,2949}{19,9045} = 0,0466\ldots,$$

et l'on a

$$x > 5,7466.$$

On prendra $x = 5,748$ à moins de deux millièmes près.

CHAPITRE V.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

256. On ne peut pas appliquer le théorème de Sturm aux équations transcendantes; mais on peut leur appliquer le théorème de Rolle (n° 210), pourvu que la fonction et ses dérivées restent finies et continues; on effectuera par ce moyen la séparation des racines en dirigeant convenablement les substitutions. Une fois les racines séparées et obtenues avec une certaine approximation, on les calculera avec un plus grand nombre de chiffres décimaux par la méthode de Newton. Supposons qu'une racine, et une seule, soit comprise entre a et b; on posera $x = a + h$, et l'on aura, d'après la formule de Taylor,

$$0 = f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a+\theta h),$$

d'où

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{h^2 f''(a+\theta h)}{2f'(a)}.$$

Si l'on prend la valeur approchée

$$\alpha = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

l'erreur commise aura pour expression

$$\beta = -\frac{h^2 f''(a+\theta h)}{2f'(a)}.$$

Le calcul est le même que pour les équations algébriques.

257. Exemple I. Considérons l'équation

$$x^x = 100,$$

qui a éte traitée par Euler. Si l'on prend les logarithmes vulgaires, l'équation devient

$$f(x) = x \log x - 2 = 0,$$

et l'on a

$$f'(x) = \log x + M; \quad f''(x) = \frac{M}{x}.$$

Quand x varie de 0 à 1, $f(x)$ reste négative et il n'y a pas de racine dans cet intervalle. Substituons les nombres entiers consécutifs

$$\begin{aligned}
x &= 2, \quad \log 2 = 0{,}301, \quad 2\log 2 = 0{,}60, \quad f(x) = -1{,}40,\\
x &= 3, \quad \log 3 = 0{,}477, \quad 3\log 3 = 1{,}43, \quad f(x) = -0{,}57,\\
x &= 4, \quad \log 4 = 0{,}602, \quad 4\log 4 = 2{,}41, \quad f(x) = +0{,}41.
\end{aligned}$$

La dérivée s'annule pour $x = \frac{1}{e}$, et reste positive pour toutes les valeurs de x supérieures à cette valeur; on en conclut que $f(x)$ va en croissant constamment quand x varie de $\frac{1}{e}$ à $+\infty$; cette fonction passe donc une fois et une seule fois par zéro. Ainsi, l'équation proposée n'admet qu'une racine réelle, et cette racine est comprise entre 3 et 4.

Afin de diminuer le nombre des substitutions, effectuons rapidement une interpolation par parties proportionnelles entre 3 et 4. On a $\alpha = \frac{0{,}57}{0{,}98} = 0{,}58$. Essayons 3,5 :

$$\begin{aligned}
x &= 3{,}5, \quad \log x = 0{,}54406804, \quad f(x) = -0{,}09576186,\\
x &= 3{,}6, \quad \log x = 0{,}55630250, \quad f(x) = +0{,}00268900.
\end{aligned}$$

La racine est comprise entre 3,5 et 3,6 et très-rapprochée de ce dernier nombre.

En appliquant la méthode de Newton et partant de la limite supérieure, on a la correction

$$\alpha = -\frac{268900}{99059698} = -0{,}0027145\ldots.$$

On évaluera l'erreur par la formule

$$-\beta < \frac{h^2}{2}\frac{f''(3,5)}{f'(3,6)} < \frac{h^2 \times 0,13}{2 \times 0,99} < h^2 \times 0,07.$$

Puisque h est moindre que $0,1$ en valeur absolue, on voit de suite que l'erreur est moindre que $0,0007$; on en conclut que la valeur absolue de h est inférieure à $0,0028 + 0,0007$, ou à $0,0035$. En mettant cette valeur dans l'expression de l'erreur, on a

$$-\beta < 0,0035^2 \times 0,07 < 0,000001.$$

La valeur de h est donc comprise entre $-0,0027145$ et $-0,0027156$; on prendra $h = -0,002715$ et l'on aura la racine $x = 3,597285$ avec six décimales exactes.

258. Exemple II. Soit l'équation

$$f(x) = x - \cos x = 0,$$

traitée aussi par Euler. On a

$$f'(x) = 1 + \sin x, \quad f''(x) = \cos x.$$

Pour $x = 0$, on a $f(x) = -1$; pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $f(x) = +\frac{\pi}{2}$. L'équation admet une racine dans cet intervalle, et elle n'en admet qu'une, puisque la dérivée ne s'annule pas. Au delà de $\frac{\pi}{2}$, x étant plus grand que 1, il n'y a plus de racine. Il n'y a pas non plus de racine négative. Ainsi, l'équation proposée n'admet qu'une racine réelle, et elle est comprise entre 0 et 1.

Pour faire les substitutions, nous nous servirons de la partie des tables de Callet qui donne les sinus naturels suivant la nouvelle division de la circonférence et de celle qui donne les longueurs mêmes de ces arcs. En suivant de l'œil

les deux tables, on voit que le changement de signe a lieu de 47° à 48° ;

$$x = 47° = 0{,}738,\quad \cos x = 0{,}740,\quad f(x) = -0{,}002,$$
$$x = 48° = 0{,}754,\quad \cos x = 0{,}729,\quad f(x) = +0{,}025.$$

La racine est comprise entre 47° et 48° et très-rapprochée du premier de ces nombres. L'interpolation par parties proportionnelles donne $\alpha = \frac{2}{27} < 0{,}1$. Ainsi, il est probable que la racine est comprise entre 47° et 47°,1.

Voici le nouveau calcul de substitution :

$x = 47° =$	0,73827 427	$x = 47°,1 =$	0,73984 507
$\cos x =$	0,73963 109	$\cos x =$	0,73857 302
$f(x) =$	$-$ 0,00135 682	$f(x) =$	$+$ 0,00127 205

La racine est comprise entre 47° et 47°,1.

La méthode de Newton donne la correction

$$\alpha = -\frac{0{,}00127\ 205}{1{,}67417\ 349} = -0{,}00075980\ldots\ldots$$

On évaluera l'erreur par la formule

$$-\beta < \frac{h^2 \times 0{,}47}{2 \times 1{,}67} < h^2 \times 0{,}23.$$

La valeur absolue de h étant moindre que 0,002, l'erreur est moindre que $0{,}002^2 \times 0{,}23$ ou que 0,000001 ; on en conclut que la valeur absolue de h est plus petite que 0,000760 + 0,000001 ou que 0,0008. Mettant cette valeur dans l'expression de l'erreur, on a

$$-\beta < 0{,}0008^2 \times 0{,}23 < 0{,}00000015.$$

La valeur de h est donc comprise entre $-$ 0,00075980 et

— 0,00075996; il en résulte que la valeur de x est elle-même comprise entre 0,7390828 et 0,7390851 ; on prendra $x = 0,7390852$ avec sept décimales exactes.

239. Exemple III. Soit l'équation

$$f(x) = x - \operatorname{tang} x = 0,$$

que l'on rencontre dans la théorie des vibrations des corps élastiques et aussi dans l'étude des lois de la propagation de la chaleur. On a

$$f'(x) = -\operatorname{tang}^2 x, \quad f''(x) = -\frac{2 \operatorname{tang} x}{\cos^2 x}.$$

On voit d'abord que les racines de l'équation sont deux à deux égales et de signes contraires. Quand x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, l'arc étant plus petit que la tangente, la fonction est négative; de $\frac{\pi}{2}$ à π, la tangente étant négative, la fonction est positive; ainsi il n'y a pas de racine de 0 à π. Quand x varie de π à $\frac{3\pi}{2}$, la fonction passe d'une valeur positive à une valeur négative; il y a donc une racine réelle dans cet intervalle, et il n'y en a qu'une, puisque la dérivée ne s'annule pas; de $\frac{3\pi}{2}$ à 2π, la tangente étant négative, la fonction reste positive. Si l'on continue à faire croître x, on trouvera de même deux racines réelles sur chaque circonférence, une dans le premier, l'autre dans le troisième quadrant. Ainsi, l'équation admet une infinité de racines réelles.

Proposons-nous de calculer la plus petite racine positive; pour $x = \pi + \frac{\pi}{4}$, la tangente est égale à 1 et la fonction est

encore positive; la racine est donc comprise entre $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{2}$, c'est-à-dire entre 3,9 et 5. Essayons le nombre intermédiaire 4,5. Posons $x = \pi + x'$; pour $x = 4,5$, l'arc x' est égal à 1,3584 et vaut à peu près 77°50' en degrés anciens. On cherchera dans les tables le logarithme de la tangente, puis la valeur même de la tangente :

$$x = 4,5, \quad x' = 77°50', \quad \log \operatorname{tang} x' = 0,6663537,$$
$$\operatorname{tang} x' = 4,6384, \quad f(x) = -0,1384.$$

Le résultat étant négatif, le nombre 4,5 est trop grand. Essayons 4,4 :

$$x = 4,4, \quad x' = 72°6', \quad \log \operatorname{tang} x' = 0,4908093,$$
$$\operatorname{tang} x' = 3,0960, \quad f(x) = +1,3040.$$

Ainsi, la racine est comprise entre 4,4 et 4,5 et très-rapprochée de ce dernier nombre.

L'interpolation par parties proportionnelles donne la correction 0,09. Nous essayerons donc 4,49 :

$$x = 4,49, \quad x' = 77°15'30'', \quad \operatorname{tang} x' = 4,4223, \quad f(x) = +0,0677$$
$$x = 4,50, \quad x' = 77°49'50'', \quad \operatorname{tang} x' = 4,6372, \quad f(x) = -0,1372.$$

La racine est comprise entre 4,49 et 4,50. L'interpolation par parties proportionnelles donne $\alpha' = 0,0033$ par défaut ; on essayera donc 4,4934 :

$$x = 4,4934, \quad x' = 77°27'10'',3, \quad \operatorname{tang} x' = 4,493410, \quad f(x) = +0,000190$$
$$x = 4,4935, \quad x' = 77°27'30'',9, \quad \operatorname{tang} x' = 4,495828, \quad f(x) = -0,001828.$$

La racine est comprise entre 4,4934 et 4,4935 et très-rapprochée du premier de ces nombres. L'interpolation donne $\frac{\alpha'}{0,0001} = \frac{190}{2018} = 0,094$. On aura donc

$$x = 4,4934094.$$

260. Exemple IV. Soit l'équation

$$e^x - e^{-x} = ax,$$

que l'on a à résoudre dans le problème de la chaînette, c'est-à-dire lorsqu'on cherche la forme d'équilibre d'une chaîne pesante. Prenons $a = 12,54$, on a

$$f(x) = e^x - e^{-x} - 12,54 \times x = 0,$$
$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 12,54,$$
$$f''(x) = e^x - e^{-x}.$$

On calculera e^x et e^{-x} par les formules

$$\log e^x = Mx = 0,434294482 \times x, \quad \log e^{-x} = -\log e^x.$$

L'équation est vérifiée pour $x = 0$; mais elle admet en outre une racine positive, que nous nous proposons de déterminer. La valeur $x = 1$ donne évidemment un résultat négatif, et de même $x = 2$. Substituons les nombres suivants :

$$x = 3, \quad e^x = 20, \quad f(x) = -17,$$
$$x = 4, \quad e^x = 55, \quad f(x) = +5.$$

La racine est comprise entre 3 et 4. L'interpolation donne $\alpha = 0,8$. Essayons 3,8 :

$$x = 3,8, \quad e^x = 44,7012, \quad e^{-x} = 0,0224, \quad f(x) = -2,9732,$$
$$x = 3,9, \quad e^x = 49,4025, \quad e^{-x} = 0,0202. \quad f(x) = +0,4763.$$

La racine est comprise entre 3,8 et 3,9.

La méthode d'approximation de Newton donne

$$\alpha = -\frac{0,4763}{36,88827} = -0,01291\ \ldots\ldots,$$

et l'on a

$$-\beta < \frac{h^2 f''(3,9)}{2 f'(3,9)} < h^2 \times 0,7.$$

La quantité h étant moindre que 0,1, l'erreur $-\beta$ est moindre que 0,007; on en conclut que la valeur de $-h$ est plus petite que 0,013+0,007 ou 0,02. D'après cela, on a

$$-\beta < 0{,}02^2 \times 0{,}7 = 0{,}00028.$$

Il en résulte que la valeur de h est comprise entre $-0{,}01291$ et $-0{,}01320$. On prendra $h = -0{,}013$ et l'on aura $x = 3{,}887$ avec trois décimales exactes.

261. Exemple V. La détermination du mouvement d'une planète ou d'une comète autour du soleil se ramène à la résolution de l'équation

$$u - e' \sin u = \zeta,$$

dans laquelle la lettre ζ désigne un angle donné, u un angle cherché, e' l'excentricité e de l'orbite divisée par sin 1″.

Quand on obtient cette équation, ζ et u désignent des longueurs d'arc; on la transforme en changeant les arcs en angles. Soit x le nombre qui mesure la longueur d'un arc, le rayon étant pris pour unité; on sait que, dans la construction des tables trigonométriques, la longueur de l'arc d'une seconde a été prise pour le sinus de l'angle d'une seconde; le quotient $x' = \dfrac{x}{\sin 1''}$ exprimera donc combien l'angle qui correspond à l'arc x contient de fois l'angle d'une seconde. Ainsi, pour transformer un arc en angle, l'angle de 1″ étant pris pour unité, il suffit de le diviser par sin 1″. Si donc on divise par sin 1″ tous les termes de l'équation $u - e \sin u = \zeta$, on obtient l'équation $u' - \dfrac{e}{\sin 1''} \sin u' = \zeta'$.

Quand il s'agit des planètes dont les orbites ont, en général, des excentricités très-petites, on peut résoudre l'équation

par la méthode des approximations successives. Écrivons, en effet, l'équation sous la forme

$$u = \zeta + e' \sin u.$$

En négligeant le second terme du second membre, on a une première valeur approchée $u_0 = \zeta$. Substituant cette valeur dans le second membre, on a une seconde valeur $u_1 = \zeta + e' \sin \zeta$, plus approchée que la première. Substituant cette seconde valeur approchée dans le second membre, on a une troisième valeur encore plus approchée $u_2 = \zeta + e' \sin u_1$, et ainsi de suite. Soit $\zeta = 62° 28' 54'',6$ et $e = 0,01679226$, excentricité de l'orbite terrestre, d'où $\log e' = \bar{3},5395343$. On trouve

$$e' \sin \zeta = 0° 51' 11'',8, \qquad u_1 = 63° 20' \; 6'',4;$$
$$e' \sin u_1 = 0° 51' 35'',5, \qquad u_2 = 63° 20' 30'',1;$$
$$e' \sin u_2 = 0° 51' 35'',7, \qquad u_3 = 63° 20' 30'',3.$$

On voit que les corrections deviennent de plus en plus petites; la correction suivante n'aurait pas d'influence sur les dixièmes de seconde.

Exercices.

1° Partager un demi-cercle en deux parties équivalentes par une droite parallèle au diamètre.

2° Calculer les racines réelles des équations

$$(4 - 3x^2) \sin x - 4x \cos x = 0, \tag{1}$$

$$(e^x + e^{-x}) \cos x - 2 = 0, \tag{2}$$

$$(e^x + e^{-x}) \cos x + 2 = 0, \tag{3}$$

$$1 - x + \frac{x^2}{(1.2)^2} - \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \frac{x^4}{(1.2.3.4)^2} - \dots = 0, \tag{4}$$

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{3.2^2} - \frac{x^3}{4(2.3)^2} + \frac{x^4}{5(2.3.4)^2} - \dots = 0. \tag{5}$$

On rencontre ces équations dans diverses questions de mécanique ou de physique mathématique.

CHAPITRE VI.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

262. On appelle *fraction rationnelle* une fraction algébrique dont les deux termes sont des polynômes entiers d'une même lettre x. Soit $\frac{F(x)}{f(x)}$ une fraction de cette forme. Nous pouvons toujours supposer cette fraction irréductible; car, si les deux polynômes avaient des facteurs communs, on les supprimerait. Lorsque le numérateur est d'un degré plus élevé que le dénominateur, on effectue la division en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x, ce qui donne un quotient entier et une fraction ayant son numérateur d'un degré moins élevé que le dénominateur. Laissant de côté cette partie entière, nous avons à considérer une fraction irréductible $\frac{F(x)}{f(x)}$, dont le numérateur est d'un degré moins élevé que le dénominateur. Nous désignerons par m le degré du dénominateur, le numérateur étant au plus du degré $m-1$.

Cas des racines inégales.

263. Supposons d'abord que l'équation $f(x)=0$ n'ait pas de racines égales. Appelons $a, b, c, \ldots, l$ les m racines de cette équation, et posons

$$f(x)=(x-a)f_1(x).$$

Remplaçons x par $a+(x-a)$, et, regardant $x-a$ comme un accroissement, développons les deux polynômes $F(x)$ et $f_1(x)$ suivant les puissances croissantes de $x-a$,

$$F(x) = F(a+\overline{x-a}) = F(a) + F'(a)\frac{x-a}{1} + \ldots\ldots$$

$$f_1(x) = f_1(a+\overline{x-a}) = f_1(a) + f_1'(a)\frac{x-a}{1} + \ldots\ldots$$

Divisons le premier polynôme par le second, en ordonnant le quotient par rapport aux puissances croissantes de $x-a$; le premier terme du quotient est $\frac{F(a)}{f_1(a)}$; appelons A ce premier terme; en multipliant le diviseur par A et retranchant le produit du dividende, on a un reste qui ne contient plus de terme constant; si l'on met $x-a$ en facteur commun, ce reste peut être représenté par $(x-a)\,F_1(x)$. Du dividende, qui est au plus du degré $m-1$, on a retranché le produit $Af_1(x)$ qui est du degré $m-1$, et l'on a mis $x-a$ en facteur, le polynôme $F_1(x)$ est donc au plus du degré $m-2$. En arrêtant la division à ce premier terme, on a

$$\frac{F(x)}{f_1(x)} = A + \frac{(x-a)\,F_1(x)}{f_1(x)},$$

et, en divisant les deux membres par $x-a$,

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{F_1(x)}{f_1(x)}.$$

Ainsi, la fraction proposée est égale à une première fraction simple $\frac{A}{x-a}$, plus une fraction rationnelle $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$, de même forme que la première, mais d'un degré moins élevé;

le dénominateur $f_1(x)$ est en effet du degré $m-1$, le numérateur $F_1(x)$ du degré $m-2$ au plus. Cette nouvelle fraction est d'ailleurs irréductible comme la proposée; car si les deux termes avaient un facteur premier commun, ce ne pourrait être que l'un des facteurs de $f_1(x)$, par exemple $x-b$; ce facteur, divisant $A f_1(x)$ et $(x-a)F_1(x)$, diviserait leur somme $F(x)$, ce qui est impossible, puisqu'on a supposé qu'aucun des facteurs de $f(x)$ ne divise $F(x)$.

Les mêmes raisonnements s'appliquent à la fraction $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$. Si l'on pose $f_1(x)=(x-b)f_2(x)$, on aura

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)}=\frac{B}{x-b}+\frac{F_2(x)}{f_2(x)},$$

la nouvelle fraction $\frac{F_2(x)}{f_2(x)}$ étant aussi irréductible, son dénominateur du degré $m-2$, son numérateur au plus du degré $m-3$. De même

$$\frac{F_2(x)}{f_2(x)}=\frac{C}{x-c}+\frac{F_3(x)}{f_3(x)}.$$

En continuant de cette manière, on arrivera enfin à une fraction du premier degré

$$\frac{F_{m-1}(x)}{f_{m-1}(x)}=\frac{L}{x-l}.$$

Si l'on ajoute toutes ces égalités, les fractions intermédiaires disparaissent, et l'on a

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\cdots\cdots+\frac{L}{x-l}.$$

Ainsi, *la fraction rationnelle est décomposable en une somme*

de fractions simples, ayant respectivement pour dénominateurs les facteurs premiers qui composent le dénominateur de la fraction proposée et pour numérateurs des constantes.

264. Je dis maintenant que la fraction proposée *n'est décomposable qu'en un seul système de fractions simples.* On démontre, en effet, que deux systèmes de fractions simples

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots\ldots,$$
$$\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\ldots\ldots,$$

égaux pour toutes les valeurs de x, sont identiques. Multiplions par $x-a$, il vient

$$A+(x-a)\left[\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots\ldots\right]$$
$$=(x-a)\left[\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\ldots\ldots\right].$$

Donnons maintenant à x la valeur particulière a; le premier membre se réduit à A; si aucun des dénominateurs des fractions du second système n'était égal à $x-a$, le second membre s'évanouirait quand on fait $x=a$; il faut donc que l'un de ces dénominateurs soit égal à $x-a$. Supposons, par exemple, $a'=a$; alors on a

$$A+(x-a)\left[\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots\ldots\right]$$
$$=A'+(x-a\left[\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\ldots\ldots\right],$$

et si l'on fait $x=a$, on en déduit $A'=A$. Ainsi la fraction $\frac{A}{x-a}$ du premier système fait partie du second. Suppri-

mons ces deux fractions égales, il reste deux systèmes égaux

$$\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\cdots\cdots=\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\cdots\cdots$$

On démontrerait de même que la fraction $\frac{B}{x-b}$ du premier appartient au second, et ainsi de suite. Alors les deux systèmes sont identiques.

265. Calcul des numérateurs. Nous avons trouvé

$$A=\frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Le premier numérateur A est la valeur de la fraction

$$\frac{F(x)}{\left(\frac{f(x)}{x-a}\right)}$$

quand on y fait $x=a$. De même, le second numérateur B est la valeur de la fraction

$$\frac{F(x)}{\left(\frac{f(x)}{x-b}\right)}$$

quand on y fait $x=b$, etc.

On peut aussi calculer ces constantes au moyen de la dérivée de la fonction $f(x)$. En effet, nous avons posé

$$f(x)=(x-a)f_1(x);$$

si l'on prend les dérivées des deux membres, il vient

$$f'(x)=f_1(x)+(x-a)f'_1(x),$$

et, en faisant $x=a$,

$$f'(a)=f_1(a).$$

On en déduit

$$A = \frac{F(a)}{f'(a)}.$$

On aura de même

$$B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{F(c)}{f'(c)}, \dots\dots$$

Ainsi, *les numérateurs des fractions simples sont les diverses valeurs que prend la fraction* $\frac{F(x)}{f'(x)}$, *quand on y remplace successivement* x *par chacune des racines* a, b,.... *l de l'équation* $f(x) = 0$.

Exemples.

1° Soit à décomposer la fraction

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{2x^3 + 5x^2 - 6}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x}.$$

En résolvant l'équation

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0,$$

on obtient les quatre racines simples 0, 1, -1, -2. Ainsi la fraction rationnelle se décomposera en quatre fractions simples de la forme

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x+2}.$$

Pour calculer les numérateurs, nous nous servirons de la dérivée

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x - 2,$$

ce qui donne

$$A=\frac{F(0)}{f'(0)}=\frac{-6}{-2}=3,$$

$$B=\frac{F(1)}{f'(1)}=\frac{1}{6},$$

$$C=\frac{F(-1)}{f'(-1)}=\frac{-3}{2},$$

$$D=\frac{F(-2)}{f'(-2)}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}.$$

Nous avons donc

$$\frac{2x^3+5x^2-6}{x^4+2x^3-x^2-2x}=\frac{3}{x}+\frac{\frac{1}{6}}{x-1}-\frac{\frac{3}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{x+2}.$$

2° Soit à décomposer la fraction

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

La fraction proposée se décomposera de la manière suivante

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x-3}.$$

On peut déterminer les constantes immédiatement, et sans l'aide d'aucune formule, par la méthode des *coefficients indéterminés*. Si l'on multiplie les deux membres par le dénominateur, l'égalité précédente devient

$$x^2+1=A(x-1)(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-2)(x-3)$$
$$+C(x+1)(x-1)(x-3)+D(x+1)(x-1)(x-2).$$

Cette égalité doit avoir lieu, quelle que soit la valeur de x. Donnons à x successivement la valeur de chacune des racines -1, $1, 2, 3$, tous les termes du second membre s'évanouissent, excepté un, et l'on a les relations

$$2=-24A,\quad 2=4B,\quad 5=-3C,\quad 10=8D;$$

d'où l'on déduit les valeurs des constantes

$$A = -\frac{1}{12}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{5}{3}, \quad D = \frac{5}{4}.$$

Cas des racines multiples.

266. Supposons que a soit une racine de l'équation $f(x) = 0$ d'un ordre n de multiplicité. Nous poserons

$$f(x) = (x-a)^n f_1(x),$$

et, après avoir développé, comme précédemment, les deux polynômes $F(x)$ et $f_1(x)$ suivant les puissances croissantes de $x-a$,

$$F(x) = F(a + \overline{x-a}) = F(a) + F'(a)\frac{x-a}{1} + \cdots\,,$$

$$f_1(x) = f_1(a + \overline{x-a}) = f_1(a) + f_1'(a)\frac{x-a}{1} + \cdots\cdots,$$

nous effectuerons la division du premier par le second, ordonnant le quotient suivant les puissances croissantes de $x-a$ et poussant l'opération jusqu'au terme du degré $n-1$; représentons ce quotient par

$$A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots\cdots + A_{n-1}(x-a)^{n-1};$$

le reste de la division, contenant à tous ses termes le facteur $(x-a)^n$, peut être mis sous la forme $(x-a)^n F_1(x)$. On a ainsi

$$\frac{F(x)}{f_1(x)} = A_0 + A_1(x-a) + \cdots\cdots + A_{n-1}(x-a)^{n-1} + \frac{(x-a)^n F_1(x)}{f_1(x)},$$

et, en divisant les deux membres par $(x-a)^n$,

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \cdots\cdots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{F_1(x)}{f_1(x)}.$$

Le diviseur $f_1(x)$ étant du degré $m-n$, et le quotient du degré

$n-1$, le produit du diviseur par le quotient est du degré $m-1$, et, comme le dividende $F(x)$ est au plus du degré $m-1$, la différence ou le reste de la division sera au plus du degré $m-1$; puisqu'on a mis $(x-a)^n$ en facteur, il en résulte que le polynôme $F_1(x)$ est au plus du degré $m-n-1$. Il est évident, d'ailleurs, que les deux polynômes $f_1(x)$ et $F_1(x)$ sont premiers entre eux; car, s'ils avaient un facteur commun, ce facteur diviserait $f(x)$ et $F(x)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi le facteur multiple $(x-a)^n$ donne lieu à une série de n fractions simples, et nous avons à décomposer la fraction irréductible $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$, dont le dénominateur est du degré $m-n$, le numérateur au plus du degré $m-n-1$.

Supposons que l'équation $f(x)=0$ admette une seconde racine b d'un degré p de multiplicité; nous poserons

$$f_1(x)=(x-b)^p f_2(x),$$

et nous aurons de même

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)}=\frac{B_0}{(x-b)^p}+\frac{B_1}{(x-b)^{p-1}}+\ldots\ldots+\frac{B_{p-1}}{x-b}+\frac{F_2(x)}{f_2(x)}.$$

S'il y a une troisième racine c d'ordre q, on aura encore

$$\frac{F_2(x)}{f_2(x)}=\frac{C_0}{(x-c)^q}+\frac{C_1}{(x-c)^{q-1}}+\ldots\ldots+\frac{C_{q-1}}{x-c}+\frac{F_3(x)}{f_3(x)}.$$

S'il n'y a pas d'autre racine multiple, le polynôme $f_3(x)$ ne contenant plus que des facteurs simples, on aura, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$\frac{F_3(x)}{f_3(x)}=\frac{D}{x-d}+\frac{E}{x-e}+\ldots\ldots+\frac{L}{x-l}.$$

En ajoutant toutes ces inégalités, on trouve enfin

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{x-a}$$
$$+ \frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \dots + \frac{B_{n-1}}{x-b}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{D}{x-d} + \dots\dots\dots\dots + \frac{L}{x-l}.$$

A chaque racine multiple correspond un groupe de fractions simples. La première fraction de chaque groupe existe nécessairement, mais les autres peuvent manquer ; en effet, quand on effectue la division des polynômes $F(x)$ et $f_1(x)$, ordonnés comme nous l'avons dit, les premiers termes $F(a)$ et $f_1(a)$ ne sont pas nuls, et par conséquent le premier terme $A_0 = \frac{F(a)}{f_1(a)}$ du quotient n'est ni nul ni infini ; mais les autres coefficients peuvent être nuls.

267. Je dis maintenant que *la fraction proposée n'est décomposable qu'en un seul système de fractions simples.*

Soient

$$\frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \dots,$$
$$\frac{A'_0}{(x-a')^{n'}} + \frac{A'}{(x-a')^{n'-1}} + \dots + \frac{B'_0}{(x-b')^{p'}} + \frac{B'_1}{(x-b')^{p'-1}} + \dots,$$

deux systèmes égaux entre eux, quelle que soit la valeur de x. Multiplions les deux expressions par $(x-a)^n$ et faisons $x=a$; la première se réduit à A_0 ; si aucune des fractions du second système n'avait pour dénominateur une puissance de $x-a$, le second membre s'évanouirait quand on fait $x=a$; il faut donc que certaines fractions du second système aient pour dénominateurs des puissances de $x-a$.

Soit $a' = a$; je dis que $n' = n$; car si les deux exposants différaient, si, par exemple, n était plus grand que n', en multipliant par $(x-a)^n$, on verrait que pour $x=a$ le premier membre se réduirait à A_0, tandis que le second s'évanouirait ; on a donc aussi $n'=n$. Mais alors l'égalité devient, après la multiplication par $(x-a)^n$,

$$A_0 + A_1(x-a) + \cdots\cdots + (x-a)^n\left[\frac{B_0}{(x-b)^p} + \cdots\cdots\right]$$
$$= A'_0 + A'_1(x-a) + \cdots\cdots + (x-a)^n\left[\frac{B'_0}{(x-b')^{p'}} + \cdots\cdots\right];$$

si l'on fait $x=a$, on en déduit $A_0 = A'_0$. Ainsi la première fraction du premier système se retrouve dans le second. En supprimant ces deux fractions égales et recommençant le même raisonnement, on verrait que la seconde s'y trouve également, et ainsi de suite. Donc les deux systèmes sont identiques.

Exemple.

Soit à décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{4x^3 - 5x + 2}{x^6 - x^5 - x^4 + x^3}.$$

Le dénominateur

$$f(x) = x^3(x-1)^2(x+1)$$

contenant un facteur triple, un facteur double et un facteur simple, la fraction proposée se développera en fractions simples de la forme suivante

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_0}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B_0}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Calculons les trois constantes qui se rapportent au facteur triple x. Nous ordonnons par rapport aux puissances crois-

santes de x,

$$F(x) = 2 - 5x + 4x^2,$$
$$f_1(x) = (x-1)^2(x-1) = 1 - x - x^2 + x^3,$$

et nous effectuons la division jusqu'à ce que nous arrivions au terme du second degré, en remarquant que dans ce calcul il est inutile d'écrire les termes d'un degré supérieur au second, ce qui abrége l'opération,

$$\begin{array}{r|l} 2 - 5x & 1 - x - x^2 \\ \cline{2-2} -3x + 2x^2 & 2 - 3x - x^2. \\ -\ x^2 & \end{array}$$

Puisque le quotient a été représenté par $A_0 + A_1 x + A_2 x^2$, on a $\qquad A_0 = 2, \quad A_1 = -3, \quad A_2 = -1.$

Calculons maintenant les coefficients qui se rapportent au facteur double $x - 1$. On peut supposer que l'on commence la décomposition par ce facteur. Nous développerons jusqu'au premier degré, en négligeant les termes suivants,

$$F(x) = F(1 + \overline{x-1}) = F(1) + F'(1)(x-1) + \ldots = 1 + 7(x-1) + \ldots$$
$$f_1(x) = x^3(x+1) = x^4 + x^3 = f_1(1) + f_1'(1)(x-1) + \ldots = 2 + 7(x-1) + \ldots,$$

et nous effectuerons la division

$$\begin{array}{r|l} 1 + 7(x-1) & 2 + 7(x-1) \\ \cline{2-2} +\frac{7}{2}(x-1) & \frac{1}{2} + \frac{7}{4}(x-1). \end{array}$$

Ce quotient a été représenté par $B_0 + B_1(x-1)$; on a donc

$$B_0 = \frac{1}{2}, \quad B_1 = \frac{7}{4}.$$

Quant au coefficient C, qui se rapporte au facteur simple $x+1$, si l'on pose $f_1(x) = x^3(x-1)^2$, on a

$$C = \frac{F(-1)}{f(-1)} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}.$$

On a ainsi

$$\frac{4x^3-5x+2}{x^6-x^5-x^4+x^3}=\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{7}{4}}{x-1}-\frac{\frac{3}{4}}{x+1}.$$

On peut employer aussi la méthode des coefficients indéterminés. On a posé

$$\frac{4x^3-5x+2}{x^6-x^5-x^4+x^3}=\frac{A_0}{x^3}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B_0}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, cette égalité devient

$$\begin{aligned}4x^3-5x+2=&(A_0+A_1x+A_2x^2)(x-1)^2(x+1)\\&+[B_0+B_1(x-1)]\,x^3(x+1)+Cx^3(x-1)^2.\end{aligned}$$

En donnant successivement à x les valeurs 0, 1, -1, on a

$$2=A_0,\qquad 1=2B_0,\qquad 3=-4C,$$

d'où

$$A_0=2,\qquad B_0=\frac{1}{2},\qquad C=-\frac{3}{4}.$$

Prenons les dérivées des deux membres de l'égalité précédente, ce qui donne

$$\begin{aligned}12x^2-5=&(A_1+2A_2x)(x-1)^2(x+1)+(A_0+A_1x+A_2x^2)[2(x-1)(x+1)+(x-1)^2]\\&+B_1x^3(x+1)+[B_0+B_1(x-1)][3x^2(x+1)+x^3]\\&+3Cx^2(x-1)^2+2Cx^3(x-1),\end{aligned}$$

et dans cette dernière égalité, faisons $x=0$ et $x=1$, nous aurons

$$-5=A_1-A_0,\qquad 7=2B_1+7B_0,$$

d'où

$$A_1=-3,\qquad B_1=\frac{7}{4}.$$

Il ne reste plus que la constante A_2 à déterminer. Pour cela nous prendrons encore une fois la dérivée et nous y ferons $x=0$. Il suffit d'écrire les termes qui ne contiennent pas le facteur x,

$$\begin{aligned}24x=&2A_2(x-1)^2(x+1)+2A_1[2(x-1)(x+1)+(x-1)^2]\\&+A_0[2(x+1)+4(x-1)]+\cdots\cdots\end{aligned}$$

Si l'on fait $x=0$, il vient

$$0=2A_2-2A_1-2A_0,$$

d'où

$$A_2=-1.$$

Cas des racines imaginaires.

268. La décomposition de la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ est vraie d'une manière générale, quelles que soient les racines de l'équation $f(x)=0$, réelles ou imaginaires. Supposons que les deux polynômes qui composent la fraction proposée aient tous leurs coefficients réels; dans ce cas, si l'équation admet une racine imaginaire simple $\alpha+\beta i$, elle admettra la racine conjuguée $\alpha-\beta i$. A ces deux racines correspondent dans le développement des fractions simples de la forme

$$\frac{A+Bi}{x-\alpha-\beta i}, \quad \frac{A-Bi}{x-\alpha+\beta i};$$

les numérateurs de ces deux fractions sont des quantités imaginaires conjuguées; car la seconde se déduit évidemment de la première par le changement du signe de i. Si l'on veut éviter les imaginaires dans la décomposition, il suffit d'ajouter ces deux fractions simples, ce qui donne

$$\frac{A+Bi}{x-\alpha-\beta i}+\frac{A-Bi}{x-\alpha+\beta i}=\frac{2A(x-\alpha)-2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Ainsi, à un couple de racines simples imaginaires conjuguées correspond une fraction réelle de la forme

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

ayant son dénominateur du second degré et son numérateur du premier degré.

269. Nous avons supposé dans ce qui precède que les racines imaginaires conjuguées sont simples; supposons maintenant qu'elles soient d'un degré n de multiplicité, et, pour abréger, représentons par x^2+px+q le produit $(x-\alpha)^2+\beta^2$ des deux facteurs binômes du premier degré. Nous allons démontrer que la partie qui, dans le développement, correspond à ces deux racines imaginaires conjuguées d'ordre n, peut être ramenée à une somme de n fractions de la forme

$$\frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^n}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+p)^{n-1}}\cdots\cdots+\frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{x^2+px+q},$$

dont les numérateurs sont réels et du premier degré.

Posons $f(x)=(x^2+px+q)^nf_1(x)$. On peut disposer des deux constantes M_0 et N_0 de manière que le polynôme

$$F(x)-(M_0x+N_0)f_1(x) \tag{1}$$

soit divisible par x^2+px+q. Il suffit pour cela que le polynôme s'annule pour $x=\alpha+\beta i$ et pour $x=\alpha-\beta i$; si nous remplaçons x par chacune de ces deux valeurs et si nous appelons $A\pm Bi$ et $C\pm Di$ les valeurs correspondantes des fonctions $F(x)$ et $f_1(x)$, nous obtiendrons les deux relations

$$(A+Bi)-[M_0(\alpha+\beta i)+N_0](C+Di)=0,$$
$$(A-Bi)-[M_0(\alpha-\beta i)+N_0](C-Di)-0.$$

On en déduit, en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire,

$$(\beta D-\alpha C)M_0-CN_0=-A,$$
$$(\beta C+\alpha D)M_0+DN_0=B.$$

Ces équations entre M_0 et N_0 sont du premier degré; le dénominateur commun des inconnues $\beta(C^2+D^2)$ n'est pas nul; car si β était nulle, les racines ne seraient pas imagi-

naires; si C^2+D^2 était nulle, le polynôme $f_1(x)$ contiendrait encore le facteur x^2+px+q. On trouve ainsi pour M_0 et N_0 des valeurs réelles, finies et déterminées.

Le polynôme (1) devenant de cette manière divisible par x^2+px+q, si l'on appelle $\varphi(x)$ le quotient entier, on aura

$$F(x)-(M_0x+N_0)f_1(x)=(x^2+px+q)\varphi(x),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^n}+\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)}.$$

On aurait de même

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{\psi(x)}{(x^2+px+)^{n-2}f_1(x)},$$

et ainsi de suite.

Exemples.

1° Décomposer la fraction

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{x^3+5}{x^4+x^3+x^2+x}=\frac{x^3+5}{x(x+1)(x^2+1)}.$$

On a deux racines réelles o et -1 et deux racines imaginaires $+i$ et $-i$. Si l'on ne veut pas de quantités imaginaires dans les développements, on écrira

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Pour calculer les numérateurs, on emploiera de préférence, dans ce cas, la méthode des coefficients indéterminés. Si l'on multiplie par $f(x)$, l'égalité précédente devient

$$x^3+5=A(x+1)(x^2+1)+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x(x+1).$$

Si l'on y fait successivement $x=0$ et $x=-1$, on trouve

$$A=5, \quad B=-2.$$

Il reste à déterminer les deux constantes C et D qui correspondent aux racines imaginaires. On égalera les coefficients de x^3 et de x^2 dans les deux membres de l'égalité, ce qui donne les relations

$$1 = A + B + C;$$
$$0 = A + C + D;$$

d'où l'on déduit

$$C = -2, \quad D = -3.$$

Ainsi

$$\frac{x^3+5}{x^4+x^3+x^2+x} = \frac{5}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2x+3}{x^2+1}.$$

2° Décomposer la fraction

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}.$$

On a une racine simple 0 et deux racines imaginaires conjuguées doubles $\pm i$. La fraction se décomposera donc sous la forme suivante

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{B'x+C'}{x^2+1}.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, on a l'égalité

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x + (B'x+C')x(x^2+1).$$

Faisant $x = 0$, il vient $A = 1$. Égalant ensuite dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de x, on obtient les relations

$$A + B' = 0, \quad C' = 0, \quad 2A + B + B' = 0, \quad C + C' = 0;$$

d'où l'on déduit

$$B' = -1, \quad C' = 0, \quad B = -1, \quad C = 0.$$

On a ainsi

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2+1}.$$

LIVRE VIII

ÉLIMINATION

CHAPITRE PREMIER.

FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

270. On dit qu'une expression renfermant plusieurs lettres est *symétrique* par rapport à ces lettres, lorsqu'elle ne change pas quand on permute deux lettres quelconques. Par exemple, les fonctions

$$a^2 + b^2 + c^2 \quad , \quad ab + ac + bc,$$

sont des fonctions symétriques des trois lettres a, b, c. Nous ne nous occuperons que des fonctions symétriques rationnelles. Une fonction symétrique rationnelle pouvant être regardée comme le quotient de deux fonctions symétriques entières, il suffit de considérer les fonctions entières.

Il est clair que, si dans un terme d'une fonction symétrique entière on permute deux lettres quelconques, on reproduit soit le même terme, soit un autre terme de la même fonction. Toute fonction symétrique entière peut donc se partager en plusieurs groupes contenant chacun les termes qui se déduisent les uns des autres par la permutation des lettres.

Pour abréger, nous n'écrirons qu'un terme de chaque groupe; on a, par exemple,

$$(a+b+c+\ldots\ldots+l)^2=\Sigma a^2+2\Sigma ab,$$

le signe Σ indiquant l'ensemble des termes d'un même groupe.

Somme des puissances semblables des racines d'une équation.

271. Considérons une équation algébrique du m^e degré

$$(1)\quad X=x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_m=0,$$

et soient $a, b, c,\ldots\ldots, l$ ses m racines. Nous nous proposons d'exprimer une fonction symétrique et entière de ces m racines au moyen des coefficients de l'équation. Nous connaissons déjà certaines fonctions symétriques très-simples : la somme des racines, celle des produits des racines deux à deux, celle des produits trois à trois, etc. (193). Ainsi, on a

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma a=-A_1, \\ \Sigma ab=A_2, \\ \Sigma abc=-A_3, \\ \ldots\ldots\ldots \\ abc\ldots\ldots l=\pm A_m. \end{array}\right.$$

Cherchons maintenant la somme des puissances semblables des racines de l'équation, et, pour abréger, désignons par S_n la somme Σa^n. Voici la méthode suivie par Newton : la dérivée du premier membre de l'équation est

$$X'=mx^{m-1}+(m-1)A_1x^{m-2}+(m-2)A_2x^{m-3}+\ldots\ldots+A_{m-1}.$$

Mais on a aussi (n° 119), en considérant le polynôme X comme un produit de facteurs binômes,

$$X'=\frac{X}{x-a}+\frac{X}{x-b}+\ldots\ldots+\frac{X}{x-l}.$$

En calculant chacun des quotients, d'après la règle établie au n° 185, on trouve

$$\frac{X}{x-a}=x^{m-1}+\left.\begin{array}{r} a \\ +A_1 \end{array}\right| x^{m-2}+\left.\begin{array}{r} a^2 \\ +A_1 a \\ +A_2 \end{array}\right| x^{m-3}+\left.\begin{array}{r} a^3 \\ +A_1 a^2 \\ +A_2 a \\ +A_3 \end{array}\right| x^{m-4}+\ldots\ldots+\begin{array}{r} a^{m-1} \\ +A_1 a^{m-2} \\ +A_2 a^{m-3} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ +A_{m-1}. \end{array}$$

Si l'on fait la somme de ces différents quotients, il vient

$$X'=mx^{m-1}+\left.\begin{array}{r} S_1 \\ +mA_1 \end{array}\right| x^{m-2}+\left.\begin{array}{r} S_2 \\ +A_1 S_1 \\ +mA_2 \end{array}\right| x^{m-3}+\left.\begin{array}{r} S_3 \\ +A_1 S_2 \\ +A_2 S_1 \\ +mA_3 \end{array}\right| x^{m-4}+\ldots+\begin{array}{r} S_{m-1} \\ +A_1 S_{m-2} \\ +A_2 S_{m-3} \\ \ldots\ldots \\ +mA_{m-1}. \end{array}$$

En comparant cette expression de la dérivée à la première, on obtient les relations

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{l} S_1+A_1=0, \\ S_2+A_1S_1+2A_2=0, \\ S_3+A_1S_2+A_2S_1+3A_3=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{m-1}+A_1S_{m-2}+A_2S_{m-3}+\ldots\ldots+(m-1)A_{m-1}=0; \end{array}\right.$$

d'où l'on déduit

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{l} S_1=-A_1, \\ S_2=A_1^2-2A_2, \\ S_3=-A_1^3+3A_1A_2-3A_3, \\ S_4=A_1^4-4A_1^2A_2+4A_1A_3+2A_2^2-4A_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

272. Pour trouver ensuite les sommes des puissances dont le degré surpasse $m-1$, concevons que, dans le polynôme Xx^n, on remplace x successivement par chacune des racines $a, b, \ldots, l$, et que l'on ajoute les résultats, on aura

$$S_{m+n} + A_1 S_{m+n-1} + A_2 S_{m+n-2} + \ldots + A_m S_n = 0.$$

Si l'on donne à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots$, et si l'on observe que $S_0 = m$, on obtient les relations

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} S_m + A_1 S_{m-1} + A_2 S_{m-2} + \ldots + mA_m = 0, \\ S_{m+1} + A_1 S_m + A_2 S_{m-1} + \ldots + A_m S_1 = 0, \\ S_{m+2} + A_1 S_{m+1} + A_2 S_m + \ldots + A_m S_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

dont la première donne S_m, la seconde S_{m+1}, la troisième S_{m+2}, etc. Remarquons que la somme S_1 est égale à une fonction entière et du premier degré des coefficients de l'équation, la somme S_2 à une fonction entière et du second degré, d'une manière générale, que la somme S_n est égale à une fonction entière et du degré n des coefficients de l'équation.

Fonctions symétriques des racines d'une équation.

273. Nous venons de déterminer les sommes des puissances semblables des racines d'une équation, c'est-à-dire les fonctions symétriques et entières dont chaque terme ne contient qu'une lettre. Cherchons maintenant les fonctions symétriques dont chaque terme contient deux lettres; elles sont de la forme $\Sigma a^\alpha b^\beta$. Supposons d'abord que les deux exposants α et β soient différents; en faisant le produit des deux fonctions simples S_α et S_β, on a

(6) $S_\alpha S_\beta = \Sigma a^\alpha b^\beta + S_{\alpha+\beta}$; d'où $\Sigma a^\alpha b^\beta = S_\alpha S_\beta - S_{\alpha+\beta}$.

Lorsque les deux exposants α et β sont égaux, la somme $\Sigma a^\alpha b^\beta$ devient égale à $2\Sigma a^\alpha b^\alpha$, et l'on a

(7) $$\Sigma a^\alpha b^\alpha = \tfrac{1}{2}[(S_\alpha)^2 - S_{2\alpha}].$$

Considérons actuellement une fonction symétrique $\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma$, dont chaque terme contient trois lettres, et supposons d'abord que les trois exposants α, β, γ soient différents. On a

$$\Sigma a^\alpha b^\beta \times S_\gamma = \Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma + \Sigma a^{\alpha+\gamma} b^\beta + \Sigma a^\alpha b^{\beta+\gamma},$$

d'où

$$\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma = S_\gamma \Sigma a^\alpha b^\beta - \Sigma a^{\alpha+\gamma} b^\beta - \Sigma a^\alpha b^{\beta+\gamma},$$

et, en remplaçant les fonctions symétriques qui entrent dans le second membre par leurs valeurs données par la formule (6),

(8) $$\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma = S_\alpha S_\beta S_\gamma - S_\alpha S_{\beta+\gamma} - S_\beta S_{\gamma+\alpha} - S_\gamma S_{\alpha+\beta} + 2S_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Lorsque deux exposants α et β sont égaux entre eux, la somme $\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma$ devient égale à $2\Sigma a^\alpha b^\alpha c^\gamma$; lorsque les trois exposants sont égaux, elle se réduit à $6\Sigma a^\alpha b^\alpha c^\alpha$. On a donc

(9) $$\Sigma a^\alpha b^\alpha c^\gamma = \tfrac{1}{2}[S_\alpha^2 S_\gamma - S_{2\alpha} S_\gamma - 2S_{\alpha+\gamma} S_\alpha + 2S_{2\alpha+\gamma}],$$

(10) $$\Sigma a^\alpha b^\alpha c^\alpha = \tfrac{1}{6}[S_\alpha^3 - 3S_{2\alpha} S_\alpha + 2S_{3\alpha}].$$

On continuera de cette manière indéfiniment. On en conclut que *toute fonction symétrique et entière des racines d'une équation, dont le premier coefficient est égal à l'unité, s'exprime par une fonction entière des coefficients de l'équation.* Nous avons dit qu'une fonction symétrique rationnelle peut être regardée comme le quotient de deux fonctions symétriques entières; ainsi, *toute fonction symétrique et rationnelle des racines d'une équation s'exprime rationnellement en fonction des coefficients de l'équation.*

CHAPITRE II.

ÉLIMINATION.

274. Nous commencerons par quelques considérations sur l'identité des fonctions entières. On dit que deux fonctions entières de plusieurs lettres $a, b, c, \ldots\ldots$ sont *identiques* lorsque, après la réduction des termes semblables, elles sont composés des mêmes termes, avec les mêmes coefficients et les mêmes signes.

1° Lorsque deux fonctions entières du degré m d'une lettre a sont égales pour $m+1$ valeurs $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_m$ attribuées à cette lettre, elles sont identiques. Soient

$$\begin{gathered} A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \ldots\ldots + A_m, \\ A'_0 a^m + A'_1 a^{m-1} + \ldots\ldots + A'_m \end{gathered}$$

ces deux fonctions ; l'équation

$$(A_0 - A'_0)a^m + (A_1 - A'_1)a^{m-1} + \ldots + (A_m - A'_m) = 0$$

admettant les $m+1$ racines $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_m$, a tous ses coefficients nuls ; on a donc

$$A'_0 = A_0\ ,\ A'_1 = A_1\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ A'_m = A_m,$$

et les deux fonctions sont identiques.

2° Lorsque deux fonctions entières de deux lettres a et b, de degrés m par rapport à a et n par rapport à b, sont égales pour les $(m+1)(n+1)$ systèmes de valeurs que l'on obtient en associant $m+1$ valeurs de a avec $n+1$ valeurs de b, elles sont identiques. Supposons, en effet, les deux fonctions ordonnées par rapport aux puissances décroissantes de a ; les

coefficients $A_0, \ldots, A_m, A'_0, \ldots, A'_m$ seront des fonctions entières de b du degré n; attribuons à b l'une de ses valeurs; les deux fonctions de a, du degré m, étant égales pour $m+1$ valeurs de a, ont leurs coefficients respectivement égaux. Les deux polynômes A_0 et A'_0, étant égaux pour $n+1$ valeurs de b, sont identiques; de même A_1 et A'_1, etc. On en conclut l'identité des deux fonctions proposées.

On continuera de la même manière.

Il n'est pas nécessaire que l'on connaisse d'avance les degrés des fonctions par rapport aux différentes lettres qu'elles renferment; il suffit que l'on sache que ces degrés sont inférieurs ou égaux à certains nombres $m, n, \ldots$.

Élimination par les fonctions symétriques.

275. Éliminer x entre les deux équations

$$(1) \quad \begin{cases} f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_m = 0, \\ \varphi(x) = x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + B_n = 0, \end{cases}$$

de degrés m et n, c'est trouver la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients pour que les deux équations aient une racine commune.

Appelons $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$ les racines de la première équation, $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n$ celles de la seconde. Pour qu'une racine de la première équation satisfasse à la seconde, il est nécessaire et il suffit que l'une des quantités $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots\ldots, \varphi(x_m)$ soit nulle, et, par conséquent, que leur produit

$$P = \varphi(x_1)\varphi(x_2) \ldots\ldots \varphi(x_m)$$

soit nul. Ce produit, d'après sa formation, est une fonction entière et du degré m des coefficients $B_1, B_2, \ldots$ de la se-

conde équation, et il renferme chacun d'eux au degré m; c'est aussi une fonction entière et symétrique des racines de la première équation, et, par conséquent, en vertu des propriétés des fonctions symétriques, une fonction entière des coefficients $A_1, A_2, \ldots$ de la première équation.

De même, pour qu'une racine de la seconde équation satisfasse à la première, il est nécessaire et il suffit que l'une des quantités $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots\ldots, f(\xi_n)$ soit nulle, et, par conséquent, que leur produit

$$Q = f(\xi_1) f(\xi_2) \ldots\ldots f(\xi_n)$$

soit nul. Ce produit est une fonction entière et du degré n des coefficients $A_1, A_2, \ldots\ldots$ de la première équation et il renferme chacun d'eux au degré n; c'est aussi une fonction entière et symétrique des racines de la seconde, et, par conséquent, une fonction entière des coefficients $B_1, B_2, \ldots$ de la seconde équation.

Il est aisé de voir que les deux expressions P et Q sont égales, ou égales et de signes contraires. On a, en effet,

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_m),$$
$$\varphi(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots\ldots (x - \xi_n),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} P = & (x_1 - \xi_1)(x_1 - \xi_2) \ldots\ldots (x_1 - \xi_n) \\ & \times (x_2 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \ldots\ldots (x_2 - \xi_n) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times (x_m - \xi_1)(x_m - \xi_2) \ldots\ldots (x_m - \xi_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q = & (\xi_1 - x_1)(\xi_1 - x_2) \ldots\ldots (\xi_1 - x_m) \\ & \times (\xi_2 - x_1)(\xi_2 - x_2) \ldots\ldots (\xi_2 - x_m) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times (\xi_n - x_1)(\xi_n - x_2) \ldots\ldots (\xi_n - x_m). \end{aligned}$$

Pour passer d'une expression à l'autre, il suffit de changer les signes des mn facteurs binômes, et de mettre dans une colonne verticale les facteurs d'une même ligne horizontale.

Il en résulte que les deux expressions P et $(-1)^{mn}Q$ sont égales, quelles que soient les valeurs des racines et, par conséquent, celles des coefficients; ces deux fonctions entières des coefficients sont donc identiques. Nous savons que la fonction P est du degré m par rapport aux coefficients B et la fonction Q du degré n par rapport aux coefficients A. On en conclut que la fonction entière P est du degré n par rapport aux coefficients de la première équation et du degré m par rapport à ceux de la seconde.

276. Nous avons supposé le premier coefficient de chacune des équations égal à l'unité. Considérons maintenant deux équations

$$(2)\quad \begin{cases} f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m=0, \\ \varphi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n=0, \end{cases}$$

ayant pour premiers coefficients des quantités a_0 et b_0 différentes de zéro. En divisant tous les termes de la première par a_0, ceux de la seconde par b_0, et posant

$$A_1=\frac{a_1}{a_0},\ A_2=\frac{a_2}{a_0},\ \ldots,\ A_m=\frac{a_m}{a_0},$$
$$B_1=\frac{b_1}{b_0},\ B_2=\frac{b_2}{b_0},\ \ldots,\ B_n=\frac{b_n}{b_0},$$

on ramène ces équations à la forme (1). Il suffit de remplacer dans la fonction entière P les coefficients A et B par leurs valeurs. En la multipliant par $a_0^n b_0^m$, on obtient une fonction entière, homogène, et du degré n par rapport aux coefficients $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_m$ de la première équation, et

aussi entière, homogène, et du degré m par rapport aux coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_n$ de la seconde. Nous désignerons par R cette fonction entière $a_0^n b_0^m P$ des coefficients des deux équations proposées, et nous lui donnerons le nom de polynôme *résultant*. La condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations aient une racine commune est $R = 0$.

Cherchons, par exemple, la condition pour que les deux équations du second degré

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0,$$
$$b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0,$$

aient une racine commune. On a

$$\begin{aligned} P &= (x_1^2 + B_1 x_1 + B_2)(x_2^2 + B_1 x_2 + B_2) \\ &= x_1^2 x_2^2 + B_1 x_1 x_2 (x_1 + x_2) + B_2 (x_1^2 + x_2^2) + B_1^2 x_1 x_2 \\ &\quad + B_1 B_2 (x_1 + x_2) + B_2^2, \end{aligned}$$

et, en remplaçant $x_1^2 + x_2^2$ par $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$,

$$P = (B_2 - A_2)^2 - (B_1 - A_1)(A_1 B_2 - B_1 A_2).$$

On en déduit la condition

$$R = a_0^2 b_0^2 P = (a_0 b_2 - b_0 a_2)^2 - (a_0 b_1 - b_0 a_1)(a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0. \tag{4}$$

Nous allons faire voir que l'on peut former le polynôme résultant R à l'aide d'un déterminant.

Méthode de M. Sylvester.

277. Cherchons d'abord la condition pour qu'un système de n équations du premier degré

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{llllll} a_1^1 x_1 & + a_1^2 x_2 & + \ldots & + a_1^{n-1} x_{n-1} & + a_1^n & = 0, \\ a_2^1 x_1 & + a_2^2 x_2 & + \ldots & + a_2^{n-1} x_{n-1} & + a_2^n & = 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1}^1 x_1 & + a_{n-1}^2 x_2 & + \ldots & + a_{n-1}^{n-1} x_{n-1} & + a_{n-1}^n & = 0, \\ a_n^1 x_1 & + a_n^2 x_2 & + \ldots & + a_n^{n-1} x_{n-1} & + a_n^n & = 0, \end{array} \right.$$

à $n-1$ inconnues $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}$, admette une solution.

En remplaçant $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}$ par les rapports $\frac{x'_1}{x'_n}, \frac{x'_2}{x'_n}, \ldots\ldots, \frac{x'_{n-1}}{x'_n}$, dans lesquels x'_n est une quantité arbitraire, on obtient un système de n équations homogènes et du premier degré

$$(6)\quad\left\{\begin{array}{l} a_1^1x'_1 + a_1^2x'_2 + \ldots\ldots + a_1^nx'_n = 0,\\ a_2^1x'_1 + a_2^2x'_2 + \ldots\ldots + a_2^nx'_n = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_n^1x'_1 + a_n^2x'_2 + \ldots\ldots + a_n^nx'_n = 0,\end{array}\right.$$

à n inconnues $x'_1, x'_2, \ldots\ldots, x'_n$. Si le premier système d'équations est vérifié par un système de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, le second sera vérifié par une infinité de systèmes de valeurs de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, puisque la quantité x'_n est arbitraire. On en conclut (n° 61) que le déterminant relatif à ce second système d'équations, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \\ a_n^1 & a_n^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & a_n^{n-1} & a_n^n \end{vmatrix}$$

est nul.

Remarquons encore que, lorsque n équations homogènes et du premier degré à n inconnues, telles que les équations (6), sont vérifiées par un système de valeurs dont l'une au moins est différente de zéro, elles admettent une infinité de solutions; car si l'on multiplie les valeurs des inconnues par un même nombre arbitraire, on obtient une autre solution.

278. Revenons maintenant à la question proposée. Pour faciliter l'intelligence de la méthode, nous l'expliquerons d'abord sur un exemple. Soient les deux équations

$$(7)\qquad \begin{cases} a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \\ b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0, \end{cases}$$

l'une du troisième, l'autre du second degré. En multipliant les deux membres de la première successivement par 1 et x, et ceux de la seconde par $1, x, x^2$, on obtient les cinq équations

$$(8)\qquad \begin{cases} a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x = 0, \\ a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \\ b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 = 0, \\ b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x = 0, \\ b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0, \end{cases}$$

que l'on peut regarder comme des équations du premier degré à quatre inconnues x, x^2, x^3, x^4. Si les deux équations (7) sont vérifiées par une même valeur de x, le système des équations (8) sera vérifié par les valeurs correspondantes de x, x^2, x^3, x^4, et, par conséquent, d'après la loi établie au numéro précédent, le déterminant

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

sera nul.

279. Considérons actuellement les deux équations

$$(2)\qquad \begin{cases} f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = 0, \\ \varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n = 0, \end{cases}$$

l'une du degré m, l'autre du degré n. En multipliant les deux membres de la première successivement par les n quantités $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, et ceux de la seconde par les m quantités $1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}$, on obtient les $m+n$ équations

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{rr} a_0 x^{m+n-1} + a_1 x^{m+n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots & = 0, \\ a_0 x^{m+n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_0 x^{m+1} + \ldots + a_m x & = 0, \\ a_0 x^m + \ldots + a_{m-1} x + a_m & = 0, \\ b_0 x^{m+n-1} + b_1 x^{m+n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots & = 0, \\ b_0 x^{m+n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b_0 x^{n+1} + \ldots + b_n x & = 0, \\ b_0 x^n + \ldots + b_{n-1} x + b_n & = 0, \end{array}\right.$$

que l'on peut regarder comme des équations du premier degré à $m+n-1$ inconnues. Si les deux équations (2) sont vérifiées par une même valeur de x, le système des équations (10) sera vérifié par les valeurs correspondantes de $x, x^2, \ldots, x^{m+n-1}$, et, par conséquent, le déterminant

$$(11)\quad \Delta = \left|\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_m & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & a_0 & \ldots & \ldots & a_{m-1} & a_m \\ b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & b_n & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & \ldots & \ldots & \ldots & b_n & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_n & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_{n-1} & b_n \end{array}\right|$$

sera nul. Ce déterminant est une fonction entière, homogène, et du degré $m+n$ des coefficients des deux équations proposées. Les n premières lignes horizontales contenant les coefficients $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_m$ de la première équation, et les m lignes suivantes les coefficients $b_0, b_1, \ldots\ldots, b_n$ de la seconde, le déterminant est homogène et du degré n par rapport aux premiers coefficients; il est aussi homogène et du degré m par rapport aux seconds.

280. Il est facile de reconnaître que le déterminant Δ ainsi formé est identique au polynôme résultant R. Remarquons d'abord qu'il n'est pas identiquement nul; car les éléments situés sur la diagonale donnent le terme irréductible $a_0^n b_n^m$. Si l'on suppose les deux premiers coefficients a_0 et b_0 différents de zéro, et si l'on pose

$$a_1 = a_0 A_1\,,\ a_2 = a_0 A_2\,, \ldots, b_1 = b_0 B_1\,,\ b_2 = b_0 B_2, \ldots,$$

à cause de l'homogénéité par rapport aux deux séries de coefficients, tous les termes contiendront $a_0^n\, b_0^m$ en facteur et l'on aura $\Delta = a_0^n b_0^m\, P_1$, P_1 étant une fonction entière des deux séries de quantités $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et $B_1, B_2, \ldots, B_n$, du degré n par rapport aux premières et du degré m par rapport aux secondes. Désignons comme précédemment, par $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les racines des deux équations proposées mises sous la forme (1), et remplaçons les coefficients A et B par leurs expressions en fonction des racines, savoir :

$$\begin{array}{ll} A_1 = -x_1 - x_2 - \ldots - x_m\,, & B_1 = -\xi_1 - \xi_2 - \ldots - \xi_n, \\ A_2 = x_1 x_2 + \ldots\,, & B_2 = \xi_1 \xi_2 + \ldots\,, \\ \ldots\ldots\ldots\,, & \ldots\ldots\ldots\,. \end{array}$$

la fonction entière P_1 de ces coefficients deviendra une fonction entière de $x_1, x_2, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Les expressions des coefficients A renfermant chacune des racines $x_1, x_2, \ldots, x_m$ au premier degré seulement, la fonction P_1, qui était du degré n par rapport à l'ensemble des coefficients A, contiendra chacune de ces racines au degré n au plus; elle contiendra de même chacune des racines $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ au degré m au plus. Nous avons remplacé ainsi les deux séries de quantités arbitraires $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et $B_1, B_2, \ldots, B_n$ par deux séries de quantités également arbitraires $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Concevons maintenant le polynôme P_1 ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la quantité x_1 que nous regarderons comme une variable, les autres quantités étant constantes et inégales. Lorsque la variable x_1 est égale à l'une des quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, les deux équations ayant une racine commune, le déterminant Δ, et par conséquent le polynôme P_1, s'annulent; ce polynôme est donc divisible par le produit des facteurs binômes $x_1 - \xi_1, x_1 - \xi_2, \ldots, x_1 - \xi_n$, et l'on a

$$P_1 = (x_1 - \xi_1)(x_1 - \xi_2 \ldots\ldots (x_1 - \xi_n) P_2,$$

le quotient P_2 étant une fonction entière des diverses quantités. Concevons de même le polynôme P_2 ordonné par rapport à la variable x_2, les autres quantités étant constantes et inégales. Lorsque la variable x_2 est égale à l'une des quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, les deux équations ayant une racine commune, le déterminant Δ, et par conséquent le polynôme P_2, s'annulent; ce polynôme est donc divisible par

le produit des facteurs binômes $x_2-\xi_1, x_2-\xi_2, \ldots, x_2-\xi_n$, et l'on a

$$P_2=(x_2-\xi_1)(x_2-\xi_2)\ldots(x_2-\xi_n)P_3,$$

le quotient P_3 étant une fonction entière des diverses quantités. En continuant de cette manière, on arrivera au polynôme

$$P_m=(x_m-\xi_1)(x_m-\xi_2)\ldots(x_m-\xi_n)C,$$

le quotient C étant aussi une fonction entière des diverses quantités. On a mis ainsi en évidence les mn facteurs binômes qui composent le polynôme P (n° 276), et l'on a $P_1=PC$.

Le produit P des mn facteurs binômes étant du degré n par rapport à chacune des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et du degré m par rapport à chacune des quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, et ces quantités ne devant pas entrer dans le polynôme P_1 à des degrés plus élevés, il en résulte que le dernier quotient C ne les contient plus, et, par conséquent, est une constante numérique. Comme on a $\Delta=a_0^n b_0^m PC=RC$, on en conclut que le déterminant Δ est égal au polynôme résultant R multiplié par un facteur numérique C. Mais ce facteur est ici égal à l'unité; car le polynôme P, sous sa première forme, renfermant le terme irréductible B_n^m, le polynôme R contient le terme $a_0^n b_n^m$ qui est le premier du déterminant. On a donc identiquement $\Delta=R$.

Méthode de Bezout *et d'*Euler.

281. On arrive au même résultat par une méthode d'élimination due à Bezout et à Euler, et qui repose sur la

remarque suivante : lorsque deux polynômes entiers $f(x)$ et $\varphi(x)$, de degrés m et n, ont une racine commune x_1, il existe deux polynômes entiers u et v de degrés $n-1$ et $m-1$, tels que l'expression $uf(x)+v\varphi(x)$ soit identiquement nulle.

Posons, en effet,

$$f(x)=(x-x_1)f_1(x)\,,\ \varphi(x)=(x-x_1)\varphi_1(x);$$

si l'on prend

$$u=A\varphi_1(x)\,,\ v=-Af_1(x),$$

A étant une constante arbitraire, il est évident que l'expression $uf(x)+v\varphi(x)$ est identiquement nulle.

Proposons-nous de déterminer ces deux polynômes u et v. Soient

$$u=\alpha_0x^{n-1}+\alpha_1x^{n-2}+\ldots+\alpha_{n-1},$$
$$v=\beta_0x^{m-1}+\beta_1x^{m-2}+\ldots+\beta_{m-1}$$

Égalant à zéro les coefficients du polynôme $uf(x)+v\varphi(x)$, ordonné suivant les puissances décroissantes de x, on obtient les $m+n$ équations

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{llr} a_0\alpha_0 & +b_0\beta_0 & =0,\\ a_1\alpha_0+a_0\alpha_1 & +b_1\beta_0+b_0\beta_1 & =0,\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\\ \quad a_m\alpha_{n-2}+a_{m-1}\alpha_{n-1} & \quad +b_n\beta_{m-2}+b_{n-1}\beta_{m-1} & =0,\\ \quad\quad a_m\alpha_{n-1} & \quad\quad +b_n\beta_{m-1} & =0, \end{array}\right.$$

homogènes et du premier degré, à $m+n$ inconnues

$$\alpha_0\,,\alpha_1\,,\ldots,\alpha_{n-1}\,,\ \beta_0\,,\beta_1\,,\ldots,\beta_{m-1}.$$

Ces équations devant être vérifiées par des valeurs des inconnues dont l'une au moins est différente de zéro, le déterminant relatif à ce système d'équations est nul (n° 277);

mais ce déterminant n'est autre que le déterminant (11), dont on change les lignes horizontales en lignes verticales (n° 53).

Par exemple, si les deux équations proposées sont l'une du troisième degré, l'autre du second degré, on a les cinq équations

$$\begin{array}{lllllll}
a_0\alpha_0 & & +\, b_0\beta_0 & & & = 0, \\
a_1\alpha_0 & +\, a_0\alpha_1 & +\, b_1\beta_0 & +\, b_0\beta_1 & & = 0, \\
a_2\alpha_0 & +\, a_1\alpha_1 & +\, b_2\beta_0 & +\, b_1\beta_1 & +\, b_0\beta_2 & = 0, \\
a_3\alpha_0 & +\, a_2\alpha_1 & & +\, b_2\beta_1 & +\, b_1\beta_2 & = 0, \\
 & a_3\alpha_1 & & & +\, b_2\beta_2 & = 0,
\end{array}$$

auxquelles correspond le déterminant

$$\begin{vmatrix}
a_0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\
a_1 & a_0 & b_1 & b_0 & 0 \\
a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & b_0 \\
a_3 & a_2 & 0 & b_2 & b_1 \\
0 & a_3 & 0 & 0 & b_2
\end{vmatrix}$$

identique au déterminant (9).

Méthode abrégée de BEZOUT.

282. Nous avons exprimé le polynôme résultant R à l'aide d'un déterminant de l'ordre $m+n$, dont les éléments sont les coefficients mêmes des deux équations proposées, en complétant le tableau par des zéros.

Une autre méthode d'élimination, due aussi à Bezout, permet d'exprimer ce même polynôme à l'aide d'un déterminant d'ordre m, si n est égal ou inférieur à m, dont les éléments ne sont plus les coefficients des équations, mais des fonctions entières, homogènes, et du premier degré des coefficients de l'une et de l'autre équations.

Considérons d'abord deux équations du même degré

$$(13)\qquad \begin{cases} a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = 0, \\ b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = 0. \end{cases}$$

Partageons le premier membre de chacune des équations en deux groupes comprenant, le premier les termes d'un degré égal ou supérieur à un nombre p, le second les termes suivants, et écrivons-les sous la forme

$$x^p(a_0x^{m-p} + a_1x^{m-p-1} + \ldots + a_{m-p})$$
$$+ (a_{m-p+1}x^{p-1} + \ldots\ldots + a_m) = 0,$$
$$x^p(b_0x^{m-p} + b_1x^{m-p-1} + \ldots + b_{m-p})$$
$$+ (b_{m-p+1}x^{p-1} + \ldots\ldots + b_m) = 0,$$

ou plus simplement

$$Gx^p + H = 0\ ,\ G'x^p + H' = 0,$$

en désignant par G, H, G′, H′ les polynômes placés entre parenthèses. En les combinant par voie d'addition après les avoir multipliées respectivement par $-G'$ et G, on en déduit l'équation

$$GH' - G'H = 0,$$

c'est-à-dire

$$(14)\qquad \begin{aligned} &(a_0x^{m-p} + \ldots + a_{m-p})(b_{m-p+1}x^{p-1} + \ldots + b_m) \\ &-(b_0x^{m-p} + \ldots + b_{m-p})(a_{m-p+1}x^{p-1} + \ldots + a_m) = 0, \end{aligned}$$

qui est du degré $m - 1$. En attribuant à p successivement les m valeurs $1, 2, 3, \ldots, m$, on obtient les m équations

$$(15)\qquad \begin{cases} (a_0x^{m-1} + \ldots + a_{m-1})b_m - (b_0x^{m-1} + \ldots + b_{m-1})a_m = 0, \\ \quad (a_0x^{m-2} + \ldots + a_{m-2})(b_{m-1}x + b_m) \\ \quad -(b_0x^{m-2} + \ldots + b_{m-2})(a_{m-1}x + a_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0(b_1x^{m-1} + \ldots + b_m) - b_0(a_1x^{m-1} + \ldots + a_m) = 0, \end{cases}$$

que nous représenterons par

$$(16)\quad \begin{cases} A_1^1 x^{m-1} + A_1^2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_1^m = 0, \\ A_2^1 x^{m-1} + A_2^2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_2^m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_m^1 x^{m-1} + A_m^2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m^m = 0, \end{cases}$$

et que nous regarderons comme des équations du premier degré à $m-1$ inconnues $x, x^2, \ldots, x^{m-1}$.

Si les deux équations proposées (13) sont satisfaites par une même valeur de x, les m équations (16) seront satisfaites par les valeurs correspondantes des $m-1$ quantités $x, x^2, \ldots, x^{m-1}$ et par conséquent le déterminant

$$(17)\quad \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \ldots\ldots & A_1^m \\ A_2^1 & A_2^2 & \ldots\ldots & A_2^m \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ A_m^1 & A_m^2 & \ldots\ldots & A_m^m \end{vmatrix}$$

sera nul. Les lettres A, affectées de deux indices, désignant des fonctions entières, homogènes, et du premier degré des coefficients $a_0, \ldots, a_m$, et aussi des coefficients $b_0, \ldots, b_m$, ce déterminant est une fonction entière, homogène, et du degré m de chacune des séries de coefficients.

Dans le cas particulier où les deux équations proposées sont du second degré, le système des équations (15) se réduit aux deux équations

$$(a_0 x + a_1) b_2 - (b_0 x + b_1) a_2 = 0,$$
$$a_0(b_1 x + b_2) - b_0(a_1 x + a_2) = 0,$$

ou

$$(a_0 b_2 - b_0 a_2) x + (a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0,$$
$$(a_0 b_1 - b_0 a_1) x + (a_0 b_2 - b_0 a_2) = 0;$$

en égalant à zéro le déterminant

$$(a_0b_2 - b_0a_2)^2 - (a_0b_1 - b_0a_1)(a_1b_2 - b_1a_2),$$

nous retrouvons la condition obtenue au n° 276.

283. Considérons maintenant deux équations de degrés différents

$$(2)\qquad \begin{cases} a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = 0, \\ b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n = 0, \end{cases}$$

et soit $m > n$. En multipliant tous les termes de la seconde par x^{m-n}, on a deux équations du même degré

$$\begin{aligned} &a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_nx^{m-n} + \ldots + a_m = 0, \\ &b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_nx^{m-n} = 0. \end{aligned}$$

Nous partagerons le premier membre de chacune de ces équations en deux groupes comprenant, le premier les termes d'un degré égal ou supérieur à un nombre p, plus grand que $m-n$, et nous les mettrons sous la forme

$$\begin{aligned} &x^p(a_0x^{m-p} + a_1x^{m-p-1} + \ldots + a_{m-p}) \\ &\quad + (a_{m-p+1}x^{p-1} + \ldots + a_m) = 0, \\ &x^p(b_0x^{m-p} + b_1x^{m-p-1} + \ldots + b_{m-p}) \\ &\quad + (b_{m-p+1}x^{p-1} + \ldots + b_nx^{m-n}) = 0. \end{aligned}$$

En les combinant par voie d'addition comme précédemment, on en déduit l'équation

$$(18)\quad \begin{aligned} &(a_0x^{m-p} + \ldots + a_{m-p})(b_{m-p+1}x^{p-1} + \ldots + b_nx^{m-n}) \\ &- (b_0x^{m-p} + \ldots + b_{m-p})(a_{m-p+1}x^{p-1} + \ldots + a_m) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation se déduit d'ailleurs immédiatement de l'équation (14), dans laquelle on suppose que les coefficients

$b_{n+1}, \ldots, b_m$ sont nuls. En attribuant à p successivement les n valeurs $m-n+1, m-n+2, \ldots, m$, on obtient les n équations

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \quad (a_0x^{n-1}+\ldots+a_{n-1})\,b_nx^{m-n} \\ -(b_0x^{n-1}+\ldots+b_{n-1})(a_nx^{m-n}+\ldots+a_m)=0, \\ \quad (a_0x^{n-2}+\ldots+a_{n-2})(b_{n-1}x^{m-n+1}+b_nx^{m-n}) \\ -(b_0x^{n-2}+\ldots+b_{n-2})(a_{n-1}x^{m-n+1}+\ldots+a_m)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0(b_1x^{m-1}+\ldots+b_nx^{m-n})-b_0(a_1x^{m-1}+\ldots+a_m)=0, \end{array}\right.$$

que l'on représentera par

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1^1x^{m-1}+A_1^2x^{m-2}+\ldots\ldots\ldots+A_1^m=0, \\ A_2^1x^{m-1}+A_2^2x^{m-2}+\ldots\ldots\ldots+A_2^m=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n^1x^{m-1}+A_n^2x^{m-2}+\ldots\ldots\ldots+A_n^m=0. \end{array}\right.$$

A ces n équations on joindra les $m-n$ équations

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{r} b_0x^{m-1}+b_1x^{m-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots=0, \\ b_0x^{m-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots=0, \\ b_0x^n+\ldots+b_n=0, \end{array}\right.$$

que l'on forme en multipliant les deux membres de la seconde des équations (2) successivement par les $m-n$ quantités $1, x, x^2, \ldots, x^{m-n-1}$, et l'on aura ainsi un système de m équations que l'on regardera comme des équations du premier degré à $m-1$ inconnues $x, x^2, \ldots, x^{m-1}$.

Si les équations proposées (2) sont satisfaites par une même valeur de x, les m équations (20) et (21) seront satis-

faites par les valeurs correspondantes des $m-1$ quantités $x, x^2, \ldots, x^{m-1}$ et, par conséquent, le déterminant

$$(22)\quad \Delta = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \ldots & \ldots & \ldots & A_1^m \\ A_2^1 & A_2^2 & \ldots & \ldots & \ldots & A_2^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n^1 & A_n^2 & \ldots & \ldots & \ldots & A_n^m \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_n & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & \ldots & \ldots & b_n \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

sera nul. Ce déterminant est une fonction entière, homogène, et du degré n des coefficients a, et aussi une fonction entière, homogène, et du degré m des coefficients b.

On démontrera, comme au n° 280, que ce déterminant est égal au polynôme résultant R, multiplié par un facteur numérique. Ce facteur est aussi égal à l'unité; car si l'on suppose que tous les coefficients des équations proposées soient nuls, excepté a_0 et b_n, tous les coefficients des équations (20) s'annulent, excepté ceux placés sur la diagonale qui deviennent égaux à $a_0 b_n$, et le déterminant se réduit à son premier terme $a_0^n b_n^m$, qui est le même que celui de R. Le déterminant (22) est donc identique au polynôme R et, par conséquent, au déterminant (11).

Appliquons cette méthode aux deux équations (7), dont l'une est du troisième degré, l'autre du second degré. Nous formerons les deux équations

$$(a_0 x + a_1) b_2 x - (b_0 x + b_1)(a_2 x + a_3) = 0,$$
$$a_0 (b_1 x^2 + b_2 x) - b_0 (a_1 x^2 + a_2 x + a_3) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(a_0b_2 - b_0a_2)x^2 + (a_1b_2 - b_1a_2 - b_0a_3)x - b_1a_3 = 0,$$
$$(a_0b_1 - b_0a_1)x^2 + (a_0b_2 - b_0a_2)\,x - b_0a_3 = 0,$$

auxquelles nous joindrons l'équation

$$b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0.$$

On obtient ainsi un déterminant du troisième ordre

$$(23)\qquad \begin{vmatrix} a_0b_2 - b_0a_2\ , & a_1b_2 - b_1a_2 - b_0a_3\ , & -b_1a_3 \\ a_0b_1 - b_0a_1\ , & a_0b_2 - b_0a_2 & , -b_0a_3 \\ b_0 \quad , & b_1\ , & ,\ b_2 \end{vmatrix}$$

qui est identique au déterminant du cinquième ordre (9) trouvé par la première méthode (n° 278).

*Complément de la théorie *.*

284. Nous avons trouvé la condition nécessaire et suffisante pour que deux équations aient au moins une racine commune. Je me propose de compléter la théorie de l'élimination, en indiquant la manière de reconnaître le nombre des racines communes, lorsque la condition précédente est remplie, et de former l'équation qui donne ces racines communes. Je généraliserai pour cela la remarque sur laquelle repose la méthode de Bezout et d'Euler (n° 281) : lorsque deux polynômes entiers $f(x)$ et $\varphi(x)$, de degrés m et n, ont p racines communes, c'est-à-dire un plus grand commun diviseur $\psi(x)$ du degré p, il existe un couple de polynômes u et v, de degrés $n-p$ et $m-p$, tels que la quantité $uf(x) + v\varphi(x)$ soit identiquement nulle, et il n'en existe qu'un, abstraction faite d'un facteur constant arbitraire.

Si l'on pose, en effet,

$$f(x)=\psi(x)f_1(x) \quad , \quad \varphi(x)=\psi(x)\varphi_1(x),$$

et si l'on désigne par u et v deux polynômes entiers quelconques, on a

$$uf(x)+v\varphi(x)=\psi(x)[uf_1(x)+v\varphi_1(x)].$$

Toute valeur de x, autre que les racines communes, qui annule la quantité $uf(x)+v\varphi(x)$, n'annulant pas le premier facteur $\psi(x)$ du second membre, annule le second facteur $uf_1(x)+v\varphi_1(x)$. Si la première quantité est identiquement nulle, la seconde l'est également, et l'on a $uf_1(x)=-v\varphi_1(x)$; les polynômes $f_1(x)$ et $\varphi_1(x)$ étant premiers entre eux, le polynôme u est divisible par $\varphi_1(x)$; on en déduit

$$u=\varphi_1(x)Q \quad , \quad v=-f_1(x)Q,$$

Q étant un polynôme entier quelconque. Telle est l'expression générale des polynômes entiers u et v qui rendent la quantité $uf(x)+v\varphi(x)$ identiquement nulle. Si q est le degré du polynôme Q, les degrés des polynômes u et v sont $n-p+q$ et $m-p+q$. On obtient les polynômes des moindres degrés en faisant $q=0$, c'est-à-dire en remplaçant Q par une constante arbitraire A; on a alors

$$u=A\varphi_1(x) \quad , \quad v=-Af_1(x);$$

faisant abstraction de ce facteur constant, nous dirons qu'il existe un seul couple de polynômes u et v, de degrés $n-p$ et $m-p$, jouissant de la propriété énoncée. Il n'en existe pas de degrés moindres. Mais il en existe une infinité de degrés plus élevés, puisque le polynôme Q est arbitraire.

D'après cela, la détermination du nombre p des racines communes revient à celle des degrés $n-p$ et $m-p$ des

polynômes u et v, de manière que la recherche de ces polynômes comporte une solution et une seule. Nous regardons comme une même solution les couples de polynômes u et v dont les coefficients sont proportionnels. Voici comment on procédera.

285. Supposons que le déterminant Δ, représenté par la formule (11), et qui est identique au polynôme résultant R, soit nul. Les deux équations proposées (2) ont au moins un racine commune et, par conséquent, il existe au moins un couple de polynômes u et v de degrés $n-1$ et $m-1$; il n'en existe qu'un, s'il n'y a qu'une racine commune; il en existe une infinité, s'il y a plusieurs racines communes. Nous avons calculé ces polynômes au n° 281, et nous avons remarqué que le déterminant Δ est formé avec les coefficients des équations (12), les coefficients d'une même équation étant disposés par colonnes. En faisant abstraction de la dernière de ces équations, on a $m+n-1$ équations du premier degré

$$(24)\quad\left\{\begin{array}{llr} a_0\alpha_0 & +b_0\beta_0 & =0,\\ a_1\alpha_0+a_0\alpha_1 & +b_1\beta_0+b_0\beta_1 & =0,\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\\ \qquad a_m\alpha_{n-2}+a_{m-1}\alpha_{n-1} & \qquad +b_n\beta_{m-2}+b_{n-1}\beta_{m-1} & =0, \end{array}\right.$$

à $m+n-1$ inconnues $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \ldots, \frac{\beta_0}{\alpha_0}, \frac{\beta_1}{\alpha_0}, \ldots$. On a obtenu ces équations en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x dans l'expression $uf(x)+v\varphi(x)$; pour chaque solution des équations (24), cette expression se réduit à une constante, qui est le premier membre de la dernière des équations (12); mais cette constante est nulle;

car les deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ ayant une racine commune, si l'on attribue à x cette valeur, l'expression s'annule. Ainsi à chaque solution des équations (24) correspond un couple de polynômes u et v de degrés $n-1$ et $m-1$, et réciproquement. Si le déterminant des coefficients des inconnues dans les équations (24) est différent de zéro, il n'y a qu'une solution et, par conséquent, une seule racine commune; si ce déterminant est nul, comme il n'y a pas impossibilité, il y a une infinité de solutions (n° 62) et, par conséquent, plusieurs racines communes.

Examinons la formation de ce déterminant. On le déduit du déterminant principal Δ, en supprimant les coefficients de α_0, c'est-à-dire la première ligne, et les coefficients de la dernière des équations (12), c'est-à-dire la dernière colonne. C'est donc le déterminant mineur relatif au premier élément de la dernière colonne du déterminant Δ (n° 56). Mais, dans ce déterminant mineur, les éléments de la première colonne sont tous nuls, excepté b_0; si on l'ordonne par rapport à ces éléments, il ne renferme que le terme $(-1)^{n-1}b_0\Delta^{(1)}$, en désignant par $\Delta^{(1)}$ le nouveau déterminant mineur relatif à cet élément b_0, savoir:

$$(25)\qquad \Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & a_{m-1} & a_m \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & a_{m-2} & a_{m-1} \\ b_0 & b_1 & \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant principal Δ est formé de $m+n$ lignes, contenant, les n premières les coefficients a, les m suivantes les coefficients b; on déduit $\Delta^{(1)}$ de Δ en supprimant la première ligne de chaque groupe, ainsi que la première et la dernière colonnes.

Lorsque le déterminant $\Delta^{(1)}$ est différent de zéro, il n'y a qu'une racine commune; on la calculera de la manière suivante : reportons-nous aux équations (10) du n° 279. En supprimant la première équation de chaque groupe, on a $m+n-2$ équations du premier degré

$$(26)\quad \left|\begin{array}{rl}
a_0x^{m+n-2}+a_1x^{m+n-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & =0,\\
a_0x^{m+n-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & =0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_0x^{m+1}+\ldots\ldots+a_mx & =0,\\
a_0x^m+\ldots+a_{m-1}x+a_m & =0,\\
b_0x^{m+n-2}+b_1x^{m+n-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & =0,\\
b_0x^{m+n-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & =0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
b_0x^{n+1}+\ldots+b_nx & =0,\\
b_0x^n+\ldots+b_{n-1}x+b_n & =0,
\end{array}\right.$$

à $m+n-2$ inconnues, $x, x^2, \ldots, x^{m+n-2}$. Le déterminant des coefficients des inconnues est précisément $\Delta^{(1)}$. La valeur de x est donnée par l'équation du premier degré

$$(27)\qquad \Delta^{(1)}x+\Delta_1^{(1)}=0,$$

dans laquelle $\Delta_1^{(1)}$ désigne le déterminant que l'on obtient en remplaçant dans $\Delta^{(1)}$ les éléments de la dernière colonne par les termes connus

$$0, \ldots, 0, a_m, 0, \ldots, 0, b_n.$$

Par exemple, s'il s'agit des équations (7), dont la for-

mule (9) représente le déterminant principal, le système (26) est formé des trois équations

$$
\begin{aligned}
a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 &= 0,\\
b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x \qquad &= 0,\\
b_0x^2 + b_1x + b_2 &= 0,
\end{aligned}
$$

et l'on a

$$
\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1^{(1)} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_2 \end{vmatrix}.
$$

286. Supposons que l'on ait à la fois $\Delta = 0$, $\Delta_1^{(1)} = 0$. D'après ce que nous venons de dire, les deux équations proposées ont au moins deux racines communes, et, par conséquent, il existe au moins un couple de polynômes u et v de degrés $n-2$ et $m-2$; il n'en existe qu'un, s'il n'y a que deux racines communes; il en existe une infinité, s'il y a plus de deux racines communes.

Calculons ces polynômes; soient

$$
\begin{aligned}
u &= \alpha_0x^{n-2} + \alpha_1x^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-2},\\
v &= \beta_0x^{m-2} + \beta_1x^{m-3} + \ldots + \beta_{m-2}.
\end{aligned}
$$

En égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de x dans l'expression $uf(x) + v\varphi(x)$, on obtient les $m+n-2$ équations

$$
(28)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
a_0\alpha_0 & + b_0\beta_0 & & = 0,\\
a_1\alpha_0 + a_0\alpha_1 & + b_1\beta_0 + b_0\beta_1 & & = 0,\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
\quad a_m\alpha_{n-3} + a_{m-1}\alpha_{n-2} & & + b_n\beta_{m-3} + b_{n-1}\beta_{m-2} & = 0,
\end{array}
\right.
$$

homogènes, et du premier degré à $m+n-2$ inconnues

$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-2}$. Le déterminant de ce système, quand on place les coefficients de chaque équation dans une même colonne n'est autre que $\Delta^{(1)}$. En faisant abstraction de la dernière des équations (28), on a $m+n-3$ équations à $m+n-3$ inconnues $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \ldots, \frac{\beta_0}{\alpha_0}, \frac{\beta_1}{\alpha_0}, \ldots$ On obtient ces équations en égalant à zéro les coefficients de $x^{m+n-2}, x^{m+n-3} \ldots, x^2$ dans l'expression $uf(x) + v\varphi(x)$, qui se réduit alors à un polynôme du premier degre $Ax + B$; mais comme les deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ ont au moins deux racines communes, c'est-à-dire admettent un diviseur du second degré, on a séparément $A = 0$, $B = 0$ et l'expression est identiquement nulle. Ainsi à chaque solution des équations du premier degré correspond un couple de polynômes u et v, de degrés $n-2$ et $m-2$, et réciproquement. Si le déterminant des coefficients des inconnues dans ces équations est différent de zéro, il n'y a qu'une solution et, par conséquent, les deux équations proposées n'ont que deux racines communes; si le déterminant est nul, comme il n'y a pas impossibilité, il y a une infinité de solutions et, par conséquent, plus de deux racines communes.

On déduit ce déterminant du déterminant $\Delta^{(1)}$, représenté par la formule (25), en supprimant les coefficients de α_0, c'est-à-dire la première ligne, et ceux de la dernière des équations (28), c'est-à-dire la dernière colonne. C'est donc le déterminant mineur relatif au premier élément de la dernière colonne de $\Delta^{(1)}$. Mais alors les éléments de la première colonne sont tous nuls, excepté l'élément b_0; si on l'ordonne par rapport à ces éléments, il ne renferme que le terme $(-1)^{n-2} b_0 \Delta^{(2)}$, en désignant par $\Delta^{(2)}$ le nouveau déterminant

mineur relatif à cet élément b_0, savoir

$$(29)\qquad \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{m-2} & a_{m-1} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{m-3} & a_{m-2} \\ b_0 & b_1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & b_{n-3} & b_{n-2} \end{vmatrix}.$$

On déduit $\Delta^{(2)}$ de $\Delta^{(1)}$, comme $\Delta^{(1)}$ de Δ, en supprimant la première ligne des a et la première ligne des b, ainsi que la première et la dernière colonnes.

Lorsque le déterminant $\Delta^{(2)}$ est différent de zéro, il n'y a que deux racines communes; on les obtiendra de la manière suivante : en supprimant dans le système (26) la première équation de chaque groupe, on a $m+n-4$ équations du premier degré

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} a_0x^{m+n-3}+a_1x^{m+n-4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0,\\ a_0x^{m+n-4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_0x^{m+1}+\ldots+a_m x &= 0,\\ a_0x^{m}+\ldots+(a_{m-1}x+a_m) &= 0,\\ b_0x^{m+n-3}+b_1x^{m+n-4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0,\\ b_0x^{m+n-4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &+ 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b_0x^{n+1}+\ldots+b_n x &= 0,\\ b_0x^{n}+\ldots+(b_{n-1}x+b_n) &= 0, \end{aligned}\right.$$

à $m+n-4$ inconnues $x^2, x^3, \ldots, x^{m+n-3}$, les termes qui contiennent x à la première puissance étant regardés comme connus et joints aux derniers. Le déterminant des coefficients des inconnues est précisément $\Delta^{(2)}$; en résolvant ces équations, on en déduit pour l'inconnue x^2 une expression de la forme $Ax+B$. Les deux racines communes sont donc données par l'équation du second degré

$$\Delta^{(2)}x^2+\Delta_1^{(2)}x+\Delta_2^{(2)}=0, \tag{31}$$

où $\Delta_1^{(2)}$ et $\Delta_2^{(2)}$ désignent les déterminants que l'on obtient en remplaçant dans $\Delta^{(2)}$ les coefficients de x^2, c'est-à-dire les éléments de la dernière colonne, par les coefficients de x, ou par les termes connus.

Par exemple, si $m=4$ et $n=3$, on a

$$\Delta^{(2)}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1^{(2)}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2^{(2)}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_4 \\ b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_3 \end{vmatrix}.$$

287. Supposons que l'on ait à la fois $\Delta=0$, $\Delta^{(1)}=0$, $\Delta^{(2)}=0$. D'après ce que nous venons de dire, les deux équations proposées ont au moins trois racines communes, et par conséquent il existe au moins un couple de polynômes u et v des degrés $n-3$ et $m-3$; il n'en existe qu'un, s'il n'y a que trois racines communes; il en existe une infinité, s'il y a plus de trois racines communes. En calculant ces polynômes, on sera conduit à considérer un déterminant $\Delta^{(3)}$ qui se déduit de $\Delta^{(2)}$, comme $\Delta^{(2)}$ de $\Delta^{(1)}$, ou $\Delta^{(1)}$ de Δ. Si ce nouveau déterminant $\Delta^{(3)}$ est différent de zéro, il n'y a que trois racines communes, qui seront donnés par une équation du troisième degré

$$(32)\qquad \Delta^{(3)}x^3+\Delta_1^{(3)}x^2+\Delta_2^{(3)}x+\Delta_3^{(3)}=0.$$

S'il est égal à zéro, les deux équations proposées ont plus de trois racines communes.

On continuera de cette manière jusqu'à ce qu'on arrive à un déterminant dérivé $\Delta^{(p)}$ différent de zéro. On conclut de là que, si les p déterminants successifs

$$\Delta,\ \Delta^{(1)},\ \Delta^{(2)},\ \ldots,\ \Delta^{(p-1)},$$

dont chacun se déduit du précédent suivant la loi indiquée, sont nuls, et si le suivant $\Delta^{(p)}$ n'est pas nul, les deux équations proposées ont p racines communes et n'en ont que p. Ces p racines communes sont données par l'équation

$$(33)\qquad \Delta^{(p)}x^p+\Delta_1^{(p)}x^{p-1}+\ldots+\Delta_p^{(p)}=0,$$

du degré p, dont les coefficients sont des déterminants de l'ordre $m+n-2p$, et sont homogènes et du degré $n-p$ par rapport aux coefficients a, et aussi homogènes et du degré $m-p$ par rapport aux coefficients b.

288. Nous terminerons ce chapitre par un théorème important dû à Bezout et qui se rattache à la question de l'élimination. Étant donnés deux polynômes entiers $f(x)$ et $\varphi(x)$, premiers entre eux, des degrés m et n, il existe deux polynômes entiers u et v, des degrés $n-1$ et $m-1$, tels que l'expression $uf(x)+v\varphi(x)$ soit indépendante de x.

Lorsque les deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont premiers entre eux, le déterminant (11) est différent de zéro. La valeur de ce déterminant ne change pas, quand on remplace les éléments de la dernière colonne par les résultats que l'on obtient en leur ajoutant ceux de l'avant-dernière colonne

multipliés par x, ceux de la précédente multipliés par x^2, ..., enfin ceux de la première multipliés par x^{m+n-1} (n° 58); mais ces résultats ne sont autre chose que les premiers membres des équations (10), c'est-à-dire

$$x^{n-1}f(x),\ x^{n-2}f(x),\ \ldots,\ f(x),\ x^{m-1}\varphi(x),\ \ldots,\ \varphi(x).$$

Si maintenant nous ordonnons le déterminant par rapport aux éléments de la dernière colonne, nous aurons (n° 56)

$$(34)\qquad \begin{aligned}\Delta = [A_1^{m+n}x^{n-1} + A_2^{m+n}x^{n-2} + \ldots + A_n^{m+n}]f(x)\\ + [A_{n+1}^{m+n}x^{m-1} + A_{n+2}^{m+n}x^{m-2} + \ldots + A_{m+n}^{m+n}]\varphi(x).\end{aligned}$$

En désignant par u et v les deux polynômes placés dans les parenthèses et qui sont, le premier du degré $n-1$, le second du degré $m-1$, on obtient l'expression

$$(35)\qquad uf(x) + v\varphi(x) = \Delta,$$

dans laquelle Δ est une quantité indépendante de x et différente de zéro.

Remarquons que les polynômes u et v sont les déterminants que l'on obtient quand on remplace dans le déterminant Δ les éléments de la dernière colonne par

$$x^{n-1},\ x^{n-2},\ \ldots,\ x,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0,$$

ou par

$$0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0,\ x^{m-1},\ x^{m-2},\ \ldots,\ x,\ 1.$$

Ils sont premiers entre eux; car, s'ils avaient une racine commune, en attribuant à x cette valeur, on aurait $\Delta = 0$.

CHAPITRE III.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS.

289. La question est de déduire d'une équation donnée

$$(1) \qquad f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0$$

une nouvelle équation dont les racines aient avec celles de la première une relation donnée.

Supposons d'abord que chaque racine y de la nouvelle équation soit égale à une fonction rationnelle

$$(2) \qquad y = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

d'une racine x de la première, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant deux polynômes entiers premiers entre eux. On obtiendra l'équation cherchée en éliminant x entre les deux équations (1) et (2). A une valeur de x correspond une seule valeur de y; si les deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont premiers entre eux, les m valeurs de y étant finies, l'équation en y sera aussi du degré m. Si les deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ avaient un plus grand commun diviseur du degré p, la nouvelle inconnue y aurait p racines infinies, et l'équation en y serait du degré $m-p$; mais, dans ce cas, on diviserait le premier membre de l'équation (1) par ce plus grand commun diviseur, de manière à l'abaisser au degré $m-p$; nous supposerons donc les deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ premiers entre eux.

Considérons, en particulier, la transformation linéaire

$$(3) \qquad y = \frac{ax + b}{a'x + b'}, \text{ d'où } x = \frac{b - b'y}{a'y - a};$$

l'équation nouvelle, mise sous forme entière, est

$$(4) \qquad (a'y - a)^m f\left(\frac{b - b'y}{a'y - a}\right) = 0.$$

A cette catégorie appartiennent : 1° la transformation $y = ax$, qui consiste à multiplier les racines de l'équation proposée par un nombre constant a; nous en avons fait usage pour ramener la recherche des racines commensurables fractionnaires à celle des racines entières (n° 234); lorsque $a = -1$, les racines sont simplement changées de signes (n° 208); 2° la transformation $y = x + b$, qui consiste à augmenter les racines d'une quantité constante b; elle nous a servi à faire disparaître le second terme d'une équation (n° 213); 3° la transformation $y = \frac{1}{x}$, qui donne l'équation $y^m f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$, dont les racines sont les inverses de celles de la proposée (n° 215).

290. La transformation linéaire

$$y = \frac{x + a}{x + b}, \text{ d'où } x = \frac{a - by}{y - 1},$$

permet de ramener l'équation du troisième degré à la forme binôme. Prenons l'équation sous la forme

$$(5) \qquad x^3 + px + q = 0.$$

En égalant à zéro les coefficients de y^2 et de y dans l'équa-

tion transformée, on a les deux relations

$$3ab^2 + pa + 2pb - 3q = 0 \quad , \quad 3a^2b + 2pa + pb - 3q = 0;$$

en éliminant successivement les deux premiers termes et les deux derniers, et divisant par la quantité $a - b$ qui est différente de zéro, on en déduit

$$a + b = \frac{3q}{o} \quad , \quad ab = -\frac{p}{3}.$$

Les deux constantes a et b sont les racines d'une équation du second degré et l'équation transformée devient

$$(b^3 + pb - q)y^3 - (a^3 + pa - q) = 0, \tag{6}$$

d'où l'on tire

$$y = \sqrt[3]{\frac{a^3 + pa - q}{b^3 + pb - q}}. \tag{7}$$

On opère ainsi la résolution de l'équation du troisième degré.

291 *. On démontre aisément que toute transformation rationnelle (2) peut être ramenée à une transformation entière. Car m et n étant les degrés des deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ premiers entre eux, on sait (n° 288) qu'il existe deux polynômes u et v, des degrés $n - 1$ et $m - 1$, tels que l'expression $uf(x) + v\varphi(x)$ est égale à une quantité indépendante de x et différente de zéro. Si l'on multiplie par v le numérateur et le dénominateur de la fraction, on a

$$y = \frac{v\psi(x)}{v\varphi(x)} = \frac{v\psi(x)}{\Delta - uf(x)};$$

en vertu de l'équation (1), cette fraction se réduit à une

fonction entière

$$y = \frac{v\psi(x)}{\Delta}.$$

On peut supposer aussi que la fonction ne renferme aucune puissance de x supérieure à $m-1$. En effet, de l'équation (1) on déduit

$$x^m = -A_1 x^{m-1} - \ldots - A_m;$$

en multipliant les deux membres par x, et remplaçant x^m par sa valeur, on a l'expression de x^{m+1} par un polynôme entier du degré $m-1$ et ainsi de suite. En portant ces valeurs de x^m, x^{m+1}, ... dans la fonction entière, il ne restera que les puissances inférieures à m.

On conclut de là que la transformation rationnelle la plus générale se ramène à la transformation entière du degré $m-1$,

$$(8) \qquad y = a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1},$$

qui renferme m coefficients arbitraires. On obtiendra l'équation en y en éliminant x entre l'équation (1) et l'équation (8) mise sous la forme

$$(9) \quad a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-2} x + (a_{m-1} - y) = 0.$$

En procédant comme nous l'avons expliqué au n° 279, on égalera à zéro le déterminant Δ, qui est du degré m par rapport à y.

L'équation (27) du n° 285 donne l'expression de x par une fraction rationnelle en y, ce qui montre que l'on peut revenir de l'équation en y à l'équation en x par une transformation rationnelle.

292. On appelle *équation réciproque* une équation telle que si x est une racine, $\frac{1}{x}$ est aussi une racine. Soit

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

l'équation proposée. En opérant la transformation $y = \frac{1}{x}$, on obtient l'équation

$$A_my^m + A_{m-1}y^{m-1} + \ldots + A_1y + A_0 = 0.$$

Ces deux équations, devant admettre les mêmes racines, ont leurs coefficients proportionnels. On a donc

$$\frac{A_0}{A_m} = \frac{A_1}{A_{m-1}} = \ldots = \frac{A_m}{A_0}.$$

L'égalité des deux rapports extrêmes donne $\left(\frac{A_0}{A_m}\right)^2 = 1$, et par suite $\frac{A_0}{A_m} = \pm 1$. Ainsi, pour qu'une équation soit réciproque, il est nécessaire et il suffit que les coefficients des termes également distants des extrêmes soient égaux, ou égaux et de signes contraires.

L'équation peut admettre les racines $+1$ ou -1, qui sont à elles-mêmes leurs inverses; après la suppression d'un facteur tel que $(x-1)^p(x+1)^q$, on a une équation dont les racines se correspondent deux à deux, et qui, par conséquent, est de degré pair; le produit des racines étant égal à $+1$, le dernier coefficient est égal au premier, et, par suite, les coefficients des termes également distants des extrêmes sont égaux; l'équation est donc de la forme

$$(10) \qquad A_0 x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0.$$

On l'abaisse au degré moitié par la transformation du second degré $y = x + \frac{1}{x}$; car à chaque couple de racines inverses correspond une seule valeur de y. Si l'on divise tous les termes par x^n et si l'on groupe deux à deux les termes également distants des extrêmes, l'équation devient

$$(11) \quad A_0\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + A_1\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) \ldots + A_n = 0.$$

Mais on a identiquement

$$\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{p+1} + \frac{1}{x^{p+1}}\right) + \left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}\right),$$

d'où

$$x^{p+1} + \frac{1}{x^{p+1}} = \left(x^p + \frac{1}{x^p}\right) y - \left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}\right).$$

En donnant à p successivement les valeurs 1, 2, 3, ... on trouve

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

En portant ces valeurs dans l'équation (11), on obtient une équation en y du degré n. A chaque valeur de y correspon-

dent deux valeurs de y données par l'équation du second degré $x^2 - yx + 1 = 0$.

293. Supposons maintenant que chaque racine y de la nouvelle équation soit égale à une fonction rationnelle $\varphi(x_1, x_2)$ de deux racines x_1 et x_2 de la proposée. Pour obtenir la nouvelle équation, il suffira d'éliminer x_1 et x_2 entre les trois équations

$$(12) \qquad f(x_1) = 0 \quad , \quad f(x_2) = 0 \quad , \quad y = \varphi(x_1 , x_2),$$

c'est-à-dire de chercher la condition pour que ces trois équations soient satisfaites par un même système de valeurs de x_1 et x_2.

Si m est le degré de l'équation proposée, le nombre des valeurs de y est égal au nombre des arrangements des m racines deux à deux, c'est-à-dire à $m(m-1)$. Mais, dans le calcul, rien n'indique que la racine x_2 n'est pas la même que x_1, de sorte que l'équation finale admettrait les m solutions étrangères $y = \varphi(x_1 , x_1)$, et serait du degré m^2. On évite cet inconvénient, en remplaçant l'équation $f(x_2) = 0$ par $f(x_2) - f(x_1) = 0$, et divisant le premier membre de celle-ci par $x_2 - x_1$, afin de supprimer l'hypothèse $x_2 = x_1$. On effectue cette division, en remarquant que l'on a identiquement

$$f(x_2) = f(x_1 + \overline{x_2 - x_1}) = f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{1} f'(x_1) + \ldots + \frac{(x_2 - x_1)^m}{1.2\ldots m} f^m(x_1),$$

d'où

$$(13) \; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{1.2} f''(x_1) + \ldots + \frac{(x_2 - x_1)^{m-1}}{1.2\ldots\ldots m} f^m(x_1) = 0.$$

Lorsque la fonction $\varphi(x_1 , x_2)$ est symétrique par rapport à

x_1 et à x_2, le nombre des valeurs de y est égal au nombre des combinaisons des m racines deux à deux, c'est-à-dire à $\frac{m(m-1)}{2}$; tel sera le degré de l'équation finale.

294. Cherchons, par exemple, l'équation dont les racines sont les différences des racines de l'équation proposée deux à deux. On posera $y=x_2-x_1$; en remplaçant x_2-x_1 par y dans l'équation (13), on aura à éliminer x_1 entre cette équation et l'équation $f(x_1)=0$, c'est-à-dire x entre l'équation

$$f'(x)+\frac{y}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{y^{m-1}}{1.2\ldots m}f^m(x)=0, \tag{14}$$

et l'équation proposée $f(x)=0$. L'équation en y sera du degré $m(m-1)$; mais, comme elle a ses racines égales deux à deux et de signes contraires, elle ne contiendra que des puissances paires de y et, par conséquent, on l'abaissera au degré moitié en posant $y^2=z$.

La combinaison de deux racines réelles donne une valeur de z réelle et positive; celle de deux racines imaginaires conjuguées une valeur de z réelle et négative. On en déduit une manière de trouver les conditions pour qu'une équation, à coefficients réels, ait toutes ses racines réelles; l'équation en z, devant avoir toutes ses racines réelles et positives, sera complète et son premier membre ne présentera que des variations (n° 207). Cette condition est d'ailleurs suffisante; car, lorsqu'elle est remplie, l'équation en z n'a pas de racine négative et, par conséquent, la proposée n'a pas de racines imaginaires.

Si l'équation proposée est du troisième degré et de la

forme

$$(15) \qquad x^3 + px + q = 0,$$

l'équation (14) est

$$(16) \qquad 3x^2 + 3xy + (y^2 + p) = 0.$$

En multipliant les deux membres de la première par 3, ceux de la seconde par x, et retranchant membre à membre, on obtient l'équation

$$(17) \qquad 3yx^2 + (y^2 - 2p)x - 3q = 0.$$

On a alors à éliminer x entre les deux équations du second degré (16) et (17), ce qui donne l'équation (n° 276)

$$(18) \qquad z^3 + 6pz^2 + 9p^2z + (4p^3 + 27q^2) = 0.$$

La condition pour que l'équation proposée ait ses trois racines réelles est $4p^3 + 27q^2 < 0$. C'est ce que nous avons trouvé par d'autres méthodes (n°s 214 et 220).

295. Cherchons encore l'équation qui admet pour racines les sommes des racines de l'équation proposée deux à deux. Nous poserons $y = x_1 + x_2$; en remplaçant x_2 par $y - x_1$ dans l'équation (13), on a à éliminer x entre l'équation

$$(19) \quad f'(x) + \frac{y - 2x}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{(y - 2x)^{m-1}}{1\,2\ldots m} f^m(x) = 0$$

et l'équation proposée. La relation $y = x_1 + x_2$ étant symétrique, l'équation en y sera du degré $\frac{m(m-1)}{1.2}$.

Si l'équation proposée est l'équation (15) du troisième degré, l'équation (19) est

$$(20) \qquad x^2 - yx + (y^2 + p) = 0.$$

En multipliant par x les deux membres de cette équation, et retranchant de l'équation (15) membre à membre, on a

$$(21) \qquad yx^2 - y^2x + q = 0.$$

Comme à une même valeur de y correspondent deux valeurs x_1 et x_2 de x, les deux équations du second degré (20) et (21) doivent avoir deux racines communes et par conséquent leurs coefficients proportionnels, ce qui donne la condition

$$(22) \qquad y^3 + py - q = 0.$$

Cette équation en y a ses racines égales et de signes contraires à celles de l'équation proposée, ce qui est évident *à priori*, à cause de la relation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, d'où $y = x_1 + x_2 = - x_3$.

Considérons l'équation du quatrième degré

$$(23) \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

L'équation en y sera du sixième degré; mais, à cause de la relation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, les valeurs de y étant deux à deux égales et de signes contraires, on l'abaissera au troisième degré en posant $y^2 = z$. L'équation (19) est ici

$$(24) \qquad 2yx^2 - 2y^2x + (y^3 + py + q) = 0.$$

En multipliant les deux membres de l'équation (23) par $2y$, ceux de l'équation (24) par x^2, et retranchant membre à membre, on en déduit l'équation du troisième degré

$$(25) \qquad 2y^2x^3 - (y^3 - py + q)x^2 + 2qyx + 2ry = 0.$$

Une combinaison analogue des deux équations (24) et (25) donne l'équation du second degré

$$(26) \qquad (y^3 + py - q)x^2 - y(y^3 + py - q)x + 2ry = 0.$$

Les deux équations du second degré (24) et (26), devant avoir deux racines communes, ont leurs coefficients proportionnels; on obtient de la sorte l'équation

$$(27) \qquad z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0,$$

que nous avons déjà trouvée par une autre méthode (n° 216). On ramène ainsi la résolution de l'équation du quatrième degré à celle d'une équation du troisième degré; à chaque racine de l'équation (27) correspondent deux racines de l'équation (23) données par l'équation (24).

CHAPITRE IV*.

RÉSOLUTION DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES.

CONTINUITÉ DES RACINES.

296. LEMME I. *Lorsque les* n *derniers coefficients d'une équation algébrique entière, ordonnée suivant les puissances décroissantes de* x, *sont très-petits, l'équation admet* n *racines très-petites.*

Soit

$$(1) \qquad f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

l'équation proposée. Nous appelons quantité très-petite une quantité, réelle ou imaginaire, dont le module est très-

petit, et de même quantité très-grande une quantité, réelle ou imaginaire, dont le module est très-grand. Nous supposerons d'abord que le premier coefficient a_0 ne soit pas très-petit, par exemple soit égal à l'unité.

Nous pouvons mettre les relations qui existent entre les petits coefficients et les racines sous la forme

$$x_1x_2 \ldots x_m = (-1)^m \frac{a_m}{a_0},$$

$$x_2x_3 \ldots x_m + x_1 S_{m-1}^{m-2} = (-1)^{m-1} \frac{a_{m-1}}{a_0},$$

$$x_3x_4 \ldots x_m + (x_1 + x_2) S_{m-2}^{m-3} + x_1x_2 S_{m-2}^{m-4} = (-1)^{m-2} \frac{a_{m-2}}{a_0},$$

. . . .

en désignant par S_p^q la somme des produits des p dernières racines q à q. Si le dernier coefficient a_m est très-petit, le produit des racines ayant une valeur très-petite, l'une d'elles x_1 sera très-petite. Si l'avant-dernier coefficient a_{m-1} est aussi très-petit, d'après la seconde des relations précédentes, le produit $x_2x_3 \ldots x_m$ étant très-petit, une seconde racine x_2 sera très-petite, et ainsi de suite.

Réciproquement, lorsque n racines sont très-petites, les n derniers coefficients sont très-petits.

297. LEMME II. *Lorsque les* n *premiers coefficients d'une équation sont très-petits, l'équation admet* n *racines très-grandes.*

Supposons d'abord que le dernier terme a_m ne soit pas très-petit; si l'on pose $x = \frac{1}{y}$, l'équation se transforme et devient

$$(2) \qquad a_m y^m + a_{m-1} y^{m-1} + \ldots + a_1 y + a_0 = 0.$$

Cette dernière équation ayant n racines très-petites, la première a n racines très-grandes.

Supposons maintenant que le dernier terme a_m soit aussi très-petit. Si l'on fait $x = x' + \alpha$, et si l'on pose

$$(3) \quad \begin{cases} a'_1 = \frac{m}{1} a_0 \alpha + a_1, \\ a'_2 = \frac{m(m-1)}{1.2} a_0 \alpha^2 + \frac{m-1}{1} a_1 \alpha + a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

l'équation (1) devient

$$(4) \qquad a_0 x'^m + a'_1 x'^{m-1} + a'_2 x'^{m-2} + \dots + a'_m = 0.$$

Les n premiers coefficients de cette nouvelle équation, étant des fonctions entières et homogènes des n premiers coefficients de l'équation proposée, sont très-petits; d'ailleurs le terme constant $f(\alpha)$ a une valeur arbitraire a'_m (il suffit de prendre pour α une racine finie de l'équation $f(\alpha) - a'_m = 0$). La nouvelle inconnue x' ayant n valeurs très-grandes, l'inconnue x a aussi n valeurs très-grandes.

Il en résulte que si les n premiers et les n' derniers coefficients d'une équation sont très-petits, l'équation admet n racines très-grandes et n' très-petites. Nous venons de démontrer la première partie de cette proposition; on déduit la seconde de la première en posant $x = \frac{1}{y}$.

298. THÉORÈME. *Lorsqu'une équation admet* n *racines égales à α, l'équation que l'on obtient en faisant varier très-peu les coefficients de l'équation proposée admet* n *racines voisines de α.*

Si l'équation (1) admet n racines égales à α, l'équation (4),

que l'on obtient en posant $x = x' + \alpha$, aura n racines égales à zéro; le premier membre devant être divisible par x'^n, les n derniers coefficients $a'_{m-n+1}, \ldots, a'_{m-1}, a_m$ seront nuls. En vertu des relations (3), quand les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_m$ de l'équation proposée éprouvent des variations très-petites, les coefficients $a_0, a'_1, a'_2, \ldots$ de l'équation (4) éprouvent aussi des variations très-petites; les n derniers, étant d'abord nuls, auront des valeurs très-petites; après cette variation des coefficients, l'inconnue x' aura donc n valeurs très-petites, et par conséquent l'inconnue x aura n valeurs voisines de α.

En particulier, si α est racine simple, l'équation nouvelle admettra une racine voisine de α et une seule.

Il résulte de là que les m racines d'une équation sont des fonctions continues des coefficients. Supposons que, pour des valeurs particulières des coefficients, les m racines soient inégales; si, à partir de ces valeurs, on fait varier les coefficients d'une manière continue, les m racines varieront d'une manière continue; lorsque les coefficients acquerront des valeurs satisfaisant à certaines relations déterminées, plusieurs racines deviendront égales entre elles; elles se sépareront ensuite, puis d'autres racines deviendront égales pour d'autres valeurs des coefficients, etc.

Lorsque les n premiers coefficients tendent vers zéro, n racines augmentent à l'infini.

Corollaire. Considérons une équation algébrique et entière $F(x,y) = 0$ du degré m entre les deux variables x et y; si on l'ordonne par rapport à y, les coefficients sont des fonctions entières de x et, par conséquent, varient d'une manière continue avec x; les m valeurs de y sont donc des

fonctions continues de x; on dit que y est une *fonction implicite* de x (n° 148).

Résolution de deux équations à deux inconnues.

299. Deux équations algébriques entre les deux inconnues x et y, ordonnées par rapport aux puissances décroissantes de y, sont de la forme

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + a_2 y^{m-2} + \ldots + a_m = 0, \\ b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \ldots + b_n = 0, \end{array} \right.$$

les coefficients étant des polynômes entiers en x.

Il s'agit de trouver les systèmes de valeurs de x et y qui satisfont à la fois aux deux équations proposées. Soit $x = x_1$, $y = y_1$ une solution; si dans les équations (5) on remplace x par x_1, on a deux équations à une seule inconnue y, qui admettent une racine commune y_1. Comme nous l'avons vu (n° 279), la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations (5) aient une racine commune est

$$(6)\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & a_m & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & a_0 & & . & . & a_{m-1} & a_m \\ b_0 & b_1 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & b_n & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation à une seule inconnue donnera les valeurs de x.

300. Lorsque les équations proposées sont complètes, si

m est le degré de la première par rapport aux deux inconnues x et y, n celui de la seconde, a_0 et b_0 sont des coefficients constants, a_1 et b_1 des polynômes du premier degré en x renfermant chacun deux coefficients, a_2 et b_2 des polynômes du second degré, et ainsi de suite; a_m est un polynôme du degré m, b_n un polynôme du degré n. Le degré de chacun de ces polynômes est marqué par l'indice de la lettre qui le représente. Nous supposerons en outre que leurs coefficients ont des valeurs tout à fait arbitraires. Un terme quelconque du déterminant Δ est de la forme

$$\pm a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \cdots\cdots a_{\alpha_n} b_{\beta_1} b_{\beta_2} \cdots\cdots b_{\beta_m},$$

a_{α_1} étant un élément de la première ligne, a_{α_2} un de la seconde, ... , a_{α_n} un de la n^e ligne, b_{β_1} un de la première ligne du second groupe, b_{β_2} un de la seconde, ... , b_{β_m} un de la dernière; les indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_m$ indiquent les rangs des colonnes dans lesquels sont situés ces éléments. D'après cela, l'élément a_{α_1} est du degré $\alpha_1 - 1$, l'élément a_{α_2} du degré $\alpha_2 - 2, \ldots\ldots$, l'élément a_{α_n} du degré $\alpha_n - n$ par rapport à x; de même, l'élément b_{β_1} est du degré $\beta_1 - 1$, l'élément b_{β_2} du degré $\beta_2 - 2, \ldots\ldots$, l'élément b_{β_m} du degré $\beta_m - m$. Le produit de ces éléments est du degré

$$(\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m) - (1 + 2 + \ldots + n) \\ - (1 + 2 + \ldots + m);$$

mais, comme chaque terme du déterminant renferme un élément de chacune des colonnes, la somme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \beta_1 + \beta_2 + \ldots,$$

est la somme des $m+n$ premiers nombres; le degré du déterminant est donc égal à

$$\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{m(m+1)}{2}=mn,$$

c'est-à-dire au produit des degrés des deux équations proposées. Les coefficients de l'équation (6), ordonnée par rapport aux puissances de x, sont des fonctions entières des coefficients des équations proposées. Nous supposerons que l'équation (6) a ses mn racines inégales, sans quoi ces coefficients satisferaient à une certaine condition.

Les valeurs de y qui correspondent aux diverses valeurs de x sont données par l'équation du premier degré

$$\Delta^{(1)}y+\Delta_1^{(1)}=0, \tag{7}$$

dans laquelle $\Delta^{(1)}$ et $\Delta_1^{(1)}$ sont des polynômes entiers en x (n° 285). Nous supposerons aussi que pour les mn valeurs de x qui satisfont à l'équation (6), le dénominateur $\Delta^{(1)}$ est différent de zéro, sans quoi les deux équations $\Delta=0$, $\Delta^{(1)}=0$ auraient une racine commune, ce qui exigerait encore que les coefficients vérifiassent une certaine relation. Ainsi, dans le cas général, à chaque valeur de x correspond une seule valeur de y, et les deux équations proposées admettent mn solutions. L'équation (6), à une seule inconnue x, et l'équation *adjointe* (7), forment alors un système équivalent au système des deux équations (5).

301. Si l'on fait varier d'une manière continue les coefficients des deux équations proposées, les coefficients de l'équation (6), qui sont des fonctions entières de ces coefficients, varieront aussi d'une manière continue, et par conséquent

les mn valeurs de x, ainsi que les valeurs correspondantes de y, varieront d'une manière continue. Concevons que deux racines x_1 et x_2 deviennent égales entre elles, les deux valeurs correspondantes de y tendront vers des valeurs y_1 et y_2; les deux polynômes $\Delta^{(1)}$ et $\Delta_1^{(1)}$ s'annuleront pour $x = x_1$, et les deux valeurs de y seront données par l'équation du second degré

$$(8) \qquad \Delta^{(2)} y^2 + \Delta_1^{(2)} y + \Delta_2^{(2)} = 0,$$

dont les coefficients sont des polynômes entiers en x (n° 286).

En général, si p racines de l'équation (6) deviennent égales entre elles, les p valeurs correspondantes de y sont données par l'équation du degré p,

$$(9) \qquad \Delta^{(p)} y^p + \Delta_1^{(p)} y^{p-1} + \ldots + \Delta_p^{(p)} = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions entières de x (n° 287).

Si les p premiers coefficients de l'équation (6), ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, deviennent nuls, p valeurs de x augmentent à l'infini; en d'autres termes, p valeurs de $\frac{1}{x}$ deviennent égales à zéro; c'est un cas particulier des racines égales. L'équation (9), dont on divisera tous les termes par la plus haute puissance de x qu'ils renferment, donnera les p valeurs correspondantes de y. En général, le dernier terme est d'un degré plus élevé que les autres, et les p valeurs de y sont aussi infinies.

302. Supposons maintenant que les coefficients des polynômes $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{q-1}$, ordonnés suivant les puissances de x, tendent simultanément vers zéro; les deux équations proposées se réduisent à

$$(10)\quad \begin{cases} a_p y^{m-p} + a_{p+1} y^{m-p-1} + \ldots + a_m = 0, \\ b_q y^{n-q} + b_{q+1} y^{n-q-1} + \ldots + b_n = 0. \end{cases}$$

Pour avoir les valeurs de x qui correspondent aux valeurs finies de y, il faut égaler à zéro le déterminant

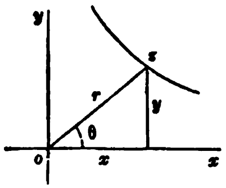
$$(11)\quad \delta = \begin{vmatrix} a_p & a_{p+1} & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a_p & \ldots & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & a_m \\ b_q & b_{q+1} & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & b_q & \ldots & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Chaque terme de ce déterminant contient $n-q$ éléments a et $m-p$ éléments b. Si l'on diminuait de p unités le degré de chaque élément a et de q unités celui de chaque élément b, en vertu du raisonnement précédent, le degré de δ serait $(m-p)(n-q)$. Mais comme il faut ajouter $(n-q)p+(m-p)q$ unités, le degré est $mn-pq$. Tel est le nombre des solutions finies. Dans les pq autres solutions, la valeur de y est infinie.

*Note sur le nombre des racines d'une équation; méthode de Cauchy.**

303. On dit qu'une quantité imaginaire $z = x + yi$ varie d'une manière continue, lorsque les deux quantités réelles x et y varient d'une manière continue. Cette variation est figurée par la courbe que décrit le point z. Le module r varie d'une manière continue et aussi chacun des arguments θ. Il y a exception toutefois lorsque la quantité s'annule, c'est-à-dire lorsque la courbe passe par l'origine; dans ce cas,

l'argument éprouve une variation brusque égale à π, si la branche de courbe décrite par le point z admet une tangente unique au point o.



Lorsque le point z décrit une courbe fermée dans le plan, il est évident que le module de la quantité imaginaire reprend la même valeur; mais l'argument peut changer. Quand la courbe fermée ne comprend pas l'origine o, l'argument reprend aussi la même valeur; mais, quand la courbe comprend l'origine, l'argument augmente ou diminue de 2π, suivant le sens dans lequel s'effectue le mouvement. Pour préciser, nous supposerons que la courbe est décrite dans un sens tel qu'un observateur ait toujours à sa gauche l'aire enveloppée par la courbe; c'est ce que nous appellerons le sens direct ou positif. Dans ce cas, lorsque la courbe comprend l'origine, l'argument augmente de 2π.

Une fonction entière

$$f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m$$

admet une valeur unique et déterminée $X + Yi$ pour chaque valeur de la variable z. Nous allons démontrer que cette fonction varie d'une manière continue avec la variable.

304. Lemme. *Étant donné un polynôme entier*

$$Az + Bz^2 + \ldots\ldots + Gz^m$$

ne renfermant pas de terme constant, on peut assigner un nombre positif ρ, tel que pour toutes les valeurs de z dont le module est égal ou inférieur à ρ, le module du polynôme soit plus petit qu'un nombre donné α, si petit qu'il soit.

Appelons $a, b, \ldots\ldots, g$ les modules des coefficients; le module d'une somme de quantités imaginaires étant plus petit que la somme des modules de ces quantités (n° 164), le module du polynôme est plus petit que

$$ar + br^2 + \ldots\ldots + gr^m.$$

Mais on peut assigner un nombre ρ, tel que pour toutes les valeurs de r égales ou inférieures à ρ, ce dernier polynôme ait une valeur plus petite que α (n° 175); pour toutes les valeurs de z dont le module est égal ou inférieur à ρ, le polynôme proposé aura un module plus petit que α.

305. THÉORÈME I. *Une fonction entière d'une variable imaginaire est continue.*

Si, dans le polynôme proposé

$$(1) \qquad f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m,$$

nous remplaçons z par $z' = z + h$ et si nous développons chaque terme d'après la loi du binôme, nous obtiendrons un résultat de la forme

$$f(z+h) = f(z) + Ah + Bh^2 + \ldots + Gh^m,$$

d'où

$$f(z') - f(z) = Ah + Bh^2 + \ldots + Gh^m.$$

En vertu du lemme précédent, on peut assigner un nombre ρ, tel que pour toutes les valeurs de h dont le module est égal ou inférieur à ρ, le module de la différence $f(z') - f(z)$ soit moindre qu'un nombre donné α.

Le point z' représente la différence $z' - z = h$, par rapport à des axes menés par le point z parallèlement aux axes primitifs; il en résulte que, si du point z comme centre,

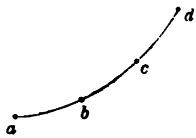
avec un rayon égal à ρ, on décrit un cercle, pour tous les points z' situés dans ce cercle, le module de la différence $f(z') - f(z)$ sera moindre que ε; c'est en cela que consiste la continuité.

Corollaire. Du développement précédent on déduit

$$\frac{f(z')-f(z)}{z'-z} = \mathrm{A} + \mathrm{B}h + \ldots\ldots + \mathrm{G}h^{m-1};$$

lorsque le point z' se rapproche indéfiniment du point z, d'une manière quelconque, le second membre tend vers une limite déterminée A; cette limite est ce qu'on appelle la *dérivée* du polynôme; on la calcule par la règle énoncée au n° 116.

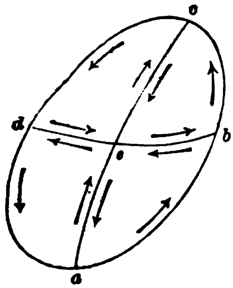
306. Lemme I. *La variation qu'éprouve l'argument d'une fonction entière, quand la variable décrit une ligne* ab *ne passant par aucun point racine, est égale à la somme des variations qu'il éprouve sur les différentes portions* ab, bc, cd *de cette ligne, et celà quel que soit celui des arguments possibles que l'on prenne au commencement de chacun des arcs.*



Lemme II. *Si l'on divise une aire en plusieurs parties par des transversales, la variation qu'éprouve l'argument d'une fonction entière, quand la variable décrit le contour de l'aire totale dans le sens positif, est égale à la somme des variations qu'il éprouve, quand la variable décrit le contour de chacune des aires partielle dans le même sens.*

Considérons l'aire enveloppée par la courbe *abcd*, et qui est divisée en quatre parties par des transversales. Nous supposons qu'aucune des lignes ne passe par un point racine,

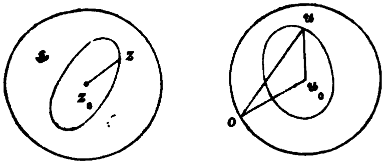
et que chaque contour est parcouru dans le sens positif,



c'est-à-dire dans un sens tel qu'un observateur ait toujours à sa gauche l'aire enveloppée par le contour. La variation de l'argument de la fonction suivant le contour *abea* est égale à la somme des variations suivant les arcs *ab*, *be*, *ea*; de même la variation de l'argument suivant le contour *bceb* est égale à la somme des variations suivant les arcs *bc*, *ce*, *eb*, et ainsi de suite. Mais chacune des transversales *ae*, *be*, *ce*, *de* est parcourue deux fois dans des sens opposés, ce qui donne des variations égales et de signes contraires; il reste donc dans la somme les variations relatives aux arcs *ab*, *bc*, *cd*, *da*, c'est-à-dire la variation relative au contour entier *abcda*.

307. Théorème II. *La variation de l'argument d'une fonction entière est nulle, lorsque la variable décrit le contour d'une aire ne comprenant aucune racine.*

Désignons par u la fonction entière $u=f(z)$; à chaque valeur $z=x+yi$ de la variable correspond une valeur $u=X+Yi$ de la fonction, que nous représenterons géométriquement comme la variable. Soit z_0 une valeur de la variable z à



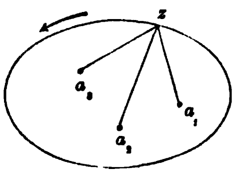
laquelle correspond pour la fonction une valeur u_0 différente de zéro. La fonction étant continue, on peut assigner un nombre ρ, tel que si le module de $z-z_0$ est égal ou inférieur à ρ, le module de $u-u_0$ ou la distance u_0u soit moindre que

le module de u_0 ou la distance ou_0. D'après cela, si le point z décrit une courbe fermée comprise dans le cercle décrit du point z_0 comme centre avec un rayon égal à ρ, le point u décrira une courbe fermée située dans le cercle décrit du point u_0 comme centre avec un rayon égal à la distance ou_0; l'argument de u reprendra donc sa valeur primitive.

Supposons maintenant que le point z décrive le contour d'une aire ne comprenant aucune racine. On pourra partager cette aire en parties assez petites pour que chacune d'elles jouisse de la propriété précédente. Puisque la variation de l'argument de la fonction est nulle sur le contour de chaque aire partielle, d'après le lemme II, elle est nulle aussi sur le contour de l'aire totale.

308. THÉORÈME III. *La variation de l'argument d'un polynôme entier suivant le contour d'une aire parcourue dans le sens positif, est égale au produit de 2π par le nombre des racines comprises dans cette aire.*

Marquons les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, qui représentent les racines situées dans l'aire considérée; si l'on prend pour origine successivement chacun de ces points, en conservant la direction des axes, le même point z représentera, par rapport à ces différents systèmes d'axes, les binômes



$z-a_1$, $z-a_2, \ldots\ldots, z-a_n$. Mais on a

$$f(z)=(z-a_1)(z-a_2)\ldots\ldots(z-a_n)\,\varphi(z),$$

et l'argument du polynôme $f(z)$ est égal à la somme des arguments des facteurs. Quand le point z décrit la courbe fermée, dans le sens positif, l'argument de chacun des facteurs $z-a_1$, $z-a_2, \ldots\ldots, z-a_n$ augmente de 2π; puisque le

polynôme $\varphi(z)$ n'a aucune racine à l'intérieur de la courbe, en vertu du théorème précédent, son argument reprend sa valeur primitive; donc l'argument du polynôme $f(z)$ augmente de $2\pi \times n$. Ceci ne suppose pas que toutes les racines soient distinctes.

309. THÉORÈME IV. *Un polynôme entier du degré* m *a* m *racines.*

Posons $z' = \frac{1}{z}$ et soit $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$; nous aurons $r' = \frac{1}{r}$, $\theta' = -\theta$. Concevons que l'on représente la nouvelle variable z' sur un autre plan, à partir d'une origine o'. Quand le point z décrit autour du point o un cercle de rayon r, dans le sens positif, le point z' décrit autour du point o' un cercle de rayon $\frac{1}{r}$, dans le sens négatif; à la partie du premier plan extérieure au premier cercle correspond la partie du second plan intérieure au second cercle, et réciproquement.

Mettons le polynôme proposé sous la forme

$$(3) \qquad f(z) = z^m(A_0 + A_1 z' + A_2 z'^2 + \cdots\cdots + A_m z'^m),$$

et considérons le polynôme

$$(4) \qquad A_0 + A_1 z' + A_2 z'^2 + \cdots\cdots + A_m z'^m$$

placé entre parenthèses. Si l'on désigne par $a_0, a_1, \ldots, a_m$ les modules des coefficients, le module de ce second polynôme est plus grand que la différence

$$a_0 - (a_1 r' + a_2 r'^2 + \cdots\cdots + a_m r'^m);$$

mais on peut déterminer un nombre ρ', tel que pour toutes les valeurs de r' égales ou inférieures à ρ', la valeur du

polynôme

$$a_1 r' + a_2 r'^2 + \ldots\ldots + a_m r'^m$$

soit plus petite que a_0; si l'on appelle a le plus grand des modules a_1, a_2, ..., a_m, il suffit pour cela de prendre $\rho' = \frac{a_0}{a + a_0}$ (nº 175); pour toutes les valeurs de z' dont le module est égal ou inférieur à ρ', le polynôme (4) a un module différent de zéro, et par conséquent ce polynôme n'a aucune racine à l'intérieur du cercle décrit de l'origine o' comme centre avec le rayon ρ'. Il en résulte que toutes les racines du polynôme proposé sont situées à l'intérieur du cercle décrit de l'origine o comme centre avec un rayon R égal à $\frac{1}{\rho'}$.

Snpposons maintenant que la variable z décrive la circonférence R dans le sens positif, la variable z' décrira en même temps la circonférence ρ' dans le sens négatif. L'argument du facteur z^m augmente de $2\pi \times m$. Le cercle ρ' relatif à la variable z' ne comprenant aucune racine, l'argument du second facteur, c'est-à-dire du polynôme (4), reprend sa valeur primitive (nº 307).

L'argument du polynôme proposé éprouve donc une variation égale à $2\pi \times m$; on en conclut, en vertu du théorème précédent, que le nombre des racines de ce polynôme est m.

Toutes les racines étant comprises dans le cercle R, ce nombre $R = 1 + \frac{a}{a_0}$ est une *limite supérieure* des modules des racines.

FIN.